複合機スキャン用紙　宿題 11　(2019/12/11 出題, 12/17(火) 3 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部				Department 学科			Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年		Class 組		Number 番			Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日	

問 11　(1) Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $\Omega \neq \emptyset$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とするとき、$F(z) := \displaystyle\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ $(z \in \Omega)$ が f の**原始関数**であるためには、Ω と f はどういう条件を満たさねばならないか答えよ。
($a \in \Omega$ と書いておいた方がよかった。)

(2) 円盤における Cauchy の積分公式 $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$ (仮定をここに書くのは省略) に当てはめることによって、以下の線積分の値を求めよ (部分分数分解などはしないでやること)。

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}$　(b) $\displaystyle\int_{|z+3|=2} \frac{dz}{z(z+4)}$　(c) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z+2)^2}$　(Γ は $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周)

問 11 解説

(1) 何かある a に対して、任意の $z \in \Omega$ に対して $[a,z]$ に沿う線積分が定義できるためには、$[a,z]$ が f の定義域 Ω に含まれていなければならない。この条件は Ω が (a に関して) 星型であることを意味する。

F が f の原始関数とは $F' = f$ ということで、これから F は正則、そして (F が無限回微分可能であるから) f は正則でなければならない。

逆に f が正則であり、Ω が a について星型であれば、$F(z) := \displaystyle\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$ が f の原始関数である (授業で証明した)。

(2) まず定理を復習する。

> Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$, $r > 0$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$D := D(c;r)$ で Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、任意の $a \in D$ に対して
> $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

説明を書けない人が多い。(a), (b) どちらも、被積分関数が定義出来ていない点が 2 つある。そのうちのどちらが閉曲線 $|z-c|=r$ の中 (つまり $D(c;r)$) にあり、どちらが外にあるか、それだけでも書こう。中にある方を a, 分母にある $z-a$ を除いたものを $f(z)$ とすると、定理の仮定が満たされ、積分の値は $2\pi i f(a)$ と分かる。

(a) $c=0$, $r=1$, $a=0$, $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^2}$ とすると、円盤領域に置ける Cauchy の積分公式の条件 ($a \in D(c;r)$, かつ f は $\overline{D}(c;r)$ を含むある開集合 ($D(0;1.5)$ とか $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$) で正則である) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i\cdot\frac{1}{(0+2)^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

(b) $c=-3$, $r=2$, $a=-4$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ とすると、円盤領域に置ける Cauchy の積分公式の条件 ($a \in D(c;r)$, かつ f は $\overline{D}(c;r)$ を含むある開集合 ($D(-3;3)$ とか $\mathbb{C}\setminus\{0,-3\}$) で正則) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z+3|=2}\frac{dz}{z(z+4)} = \int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\cdot f(a) = 2\pi i\cdot\frac{1}{-4} = -\frac{\pi i}{2}.$$

(c) 被積分関数 $\dfrac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ で正則である。その範囲で積分路 Γ は円周 $|z|=1$ に変形できる。ゆえに (a) の結果を用いて

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)^2} = \frac{\pi i}{2}.$$

要点: 積分路 Γ が $|z|=1$ に変形できることと、その理由を書く。■

(2020/1/8) 積分路が変形出来る理由をどのように書けば良いか質問されました。この授業での解答としては、上のように簡単に書けば良いと思いますが (大体真面目に書いてある本が少ない — 直観的に障害物がないと分かるでしょうくらいのノリ？僕は個人的にはこれが気に入らないので、質問してきた学生は見所があると思いました (笑))、学生は気になったようです。

どのようにやるか、実は色々なやり方があります。代表的なものを 3 つ示します。

1. 授業できちんと証明したのは、星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えて良い、という定理だけですね。これを使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の 4 つの段階を踏めば良い。

   例えば第 1 象限の部分は、$1+i$ を中心として、半径が 1.1 (1 より大きく、$1+i$ と 0 との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい) の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考えます。Ω_1 で被積分関数は正則です ($0, -2$ は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれます。ですから、Γ_1 を C_1 に置き換えられます。

   第 2 象限でも同様に $-1+i$ 中心の円を考えます。$-1+i$ と $0, -2$ との距離は $\sqrt{2}$ なので、第 1 象限のときと同じ半径 1.1 で大丈夫。正方形の周 Γ の左上部分 Γ_2 は、円周 C の左上部分 C_2 に置き換えられます。

   第 3 象限 (Γ_3 を C_3), 第 4 象限 (Γ_4 を C_4) でも同様。

2. 各 j に対して、Γ_j と C_j は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いて、

$$\int_{\Gamma_j} f(z)dz - \int_{C_j} f(z)dz = \int_{\partial D_j} f(z)dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z)dz = \int_{C_j} f(z)dz$$

   とする手があります。Green の定理ちゃんと分かっているという人には、これはアリかもしれない。

3. 普通の数学の本では「連続的変形」というのをすることが多い。$\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ の中で、正方形を連続的に円周に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作る。その写像は割と簡単に作れますが (原点に向かって縮める感じ)、ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という定理はお話に出しただけで、証明はしていません (講義ノートの付録にはある (今だと p. 226, 定理 E.3))。これはちょっと背伸びが必要かな。