

複合機スキャン用紙 宿題1 (2019/9/25 出題, 10/1 2 限提出, 裏面使用可)



・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
 ・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score
採点結果

--	--	--

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名			/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日					

- 問1** (1) $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 2 + i$ とするとき、 $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $\text{Re } z_1$, $\text{Im } z_1$, $\overline{z_1}$ を求めよ (結果は $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の形に表せ)。
 (2) $z^2 = 2 - 3i$ を満たす複素数 z を求めよ ($z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおいて、 x, y に関する連立方程式を導いて、それを解け)。

問1解説 (1)

$$z_1 + z_2 = 6 - 2i, \quad z_1 - z_2 = 2 - 4i,$$

$$z_1 z_2 = 11 - 2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 - 2i,$$

$$\operatorname{Re} z_1 = 4, \quad \operatorname{Im} z_1 = -3, \quad \bar{z}_1 = 4 + 3i, \quad |z_1| = 5.$$

(2) $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z^2 = 2 - 3i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 2 - 3i$. 実部・虚部を比較して

$$x^2 - y^2 = 2, \quad 2xy = -3.$$

第2式から得られる $y = -\frac{3}{2x}$ を第1式に代入して

$$x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0.$$

$x^2 \geq 0$ に注意して

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = 1 + \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13} + 2}{2}.$$

ゆえに

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{13} + 4}}{2}.$$

ゆえに複号同順で

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2x} = \mp \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{13} + 4}}{2}} = \mp \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{13} + 4}} = \mp \frac{3\sqrt{2\sqrt{13} - 4}}{\sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 4^2}} \\ &= \mp \frac{3\sqrt{2\sqrt{13} - 4}}{\sqrt{4 \cdot 13 - 16}} = \mp \frac{3\sqrt{2\sqrt{13} - 4}}{6} = \mp \frac{\sqrt{2\sqrt{13} - 4}}{2}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = x + yi = \pm \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{13} + 4}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{13} - 4}}{2} i \right). \blacksquare$$