授業の訂正

桂田 祐史

2019年10月1日〜

授業中の間違いのうち、授業の後から気づいたものを記録することにしています。変だなと思ったら、なるべく授業中に指摘・質問して下さい。

- 10月1日の講義で「極形式」というべきを、複数回「指数形式」と書いてしまいました (宿題 問2のプリントにもそう書いてしまった)。WWW に置いてある宿題の PDF はすでに修正済みです。
  …と思っていたら、同じ間違いを他のところ (講義ノートまで！) でやらかしていることに気づきました。

- 10月29日の講義で、問4 (2) を解説したけれど、板書しているときに、ちょっと雑かな、でもこれくらいで良いことにしようかな、と迷いながら書いていました。やはり気持ちが悪いので、きちんと書きます。

  $f(z)=(\overline{z})^3$ であるから、$x,y\in\mathbb{R}$ とするとき

  $$\begin{aligned} f(x+yi) &= (\overline{x+yi})^3=(x-yi)^3=x^3-3x^2\cdot(yi)+3x(yi)^2-(yi)^3 \\ &= x^3-3x^2yi-3xy^2+y^3i=x^3-3xy^2+(-3x^2y+y^3)i. \end{aligned}$$

  ゆえに f の実部・虚部を u, v とすると

  $$u(x,y)=x^3-3xy^2,\quad v(x,y)=-3x^2y+y^3.$$

  これから

  $$u_x=3x^2-3y^2,\quad u_y=-6xy,\quad v_x=-6xy,\quad v_y=-3x^2+3y^2.$$

  もし f が正則ならば、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つので、代入して整理すると

  $$x^2-y^2=0,\quad xy=0.$$

  これから $x=y=0$. すなわち $z=0$ をのぞいて、Cauchy-Riemann 方程式は成立しない。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則ではない。(f は 0 では微分可能であるが、それ以外の点では微分可能ではない。) ■

- 11月13日の講義で、Abel による定理

  > $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\ge 0}$ は $\beta_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ は収束する。

  の証明で、「板書が間違っている」という指摘について、「間違っていたら後で直します」

と言ったことの後始末。やはり、間違っていました。$\sum_{k=1}^{n-1} s_k(\beta_k-\beta_{k+1})$ でなく、$\sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k-\beta_{k+1})$ です。

念のため、証明を再掲。

証明 $s_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ $(n \geq 0)$ とおくとき、仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n)$ $|s_n| \leq M$. $\alpha_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$, $\alpha_0 = s_0$ であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\,\beta_k \\
&= s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k\beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1}\beta_k \\
&= s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k\beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\beta_{k+1} \\
&= s_0\beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k\beta_k + s_n\beta_n\right) - \left(s_0\beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\beta_{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n.
\end{aligned}$$

(この式変形を **Abel の級数変形法**と呼ぶ。微分可能な関数についての部分積分に相当する。)

右辺第 2 項について、$|s_n\beta_n| \leq M\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

右辺第 1 項については、

$$|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \leq M\,(\beta_k - \beta_{k+1})\,, \quad \sum_{k=0}^{n} M(\beta_k - \beta_{k+1}) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0$$

であるから、優級数の定理より $n \to \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。■

- 11 月 19 日の講義で、Abel の連続性定理を紹介した。その中で、任意の正数 K に対して

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K \right\}$$

とおいた。実は $K \leq 1$ のとき、$\Omega_K = \emptyset$ である (Mathematica で図を描いていて気が付きました。このことの証明は、講義ノートに書き加えました)。間違いとも言えないけれど、「任意の $K > 1$ に対して」とする方が良かった。講義ノートは 11/19 晩に修正した。

- 12 月 11 日の講義で、定理の証明に必要な命題を 1 つ飛ばしてしまった。三角形の周に沿う線積分についての Goursat-Pringsheim の定理の一般化

> Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、かつある $a \in \Omega$ を除いた $\Omega \setminus \{a\}$ で正則、Δ は Ω 内の三角形とするとき、
>
> $$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$
>
> ここで $\partial\Delta$ は、三角形 Δ の周を正の向きに一周する閉曲線である。

を紹介したが、この系として、次の定理を書いておくべきだった (のに忘れてしまった)。

(星型領域における Cauchy の積分定理の拡張) Ω が星型領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、かつある $a \in \Omega$ を除いた $\Omega \setminus \{a\}$ で正則ならば、Ω 内の任意の区分的 C^1 級曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

(証明は、f が Ω で正則な場合と全く同様に出来る。そこで用いる G-P の定理の仮定を一般化できる、というだけの話。)

円盤領域における Cauchy の積分定理の証明中の

$$0 = \int_C g(z)\,dz$$

の証明に用いるのは、この定理である。(g は、$\Omega \setminus \{a\}$ では正則であることがすぐ分かるが、a では連続であることくらいしか分からないので— 実は g は a でも微分可能であるが、それは今の段階では分からないこと)。