第9回 2019/10/26 (土曜, 補講)

前回の優級数の定理の証明の最後に使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

命題 3.3 (級数が絶対収束するならば収束する) $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とするとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n|$ は収束する。

証明 $\displaystyle s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして)

$$|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \le S_m - S_n = |S_n - S_m|.$$

ゆえに一般に $|s_n - s_m| \le |S_n - S_m|$ が成り立つ。

$\sum |a_n|$ が収束すれば、$\{S_n\}$ は収束列であるから Cauchy 列である。上の不等式により、$\{s_n\}$ も Cauchy 列であり、ゆえに収束列である。すなわち $\sum a_n$ は収束する。■ (優級数の定理の証明とほとんど同じようなことをしている。)

さて、前回の補題を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_0 で収束するならば、z_1 でも収束する。

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_1 で発散するならば、z_0 でも発散する。

命題の形にしておく。

系 3.4 (発散する点より遠い点では発散する) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_1$ で発散するならば、$|z - c| > |z_1 - c|$ を満たす任意の z に対して発散する。

以上の準備のもと、次の定理を証明する。

定理 3.5 (収束半径・収束円の存在) $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\ge 0}$ は複素数列とする。このとき冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、次のうちどれか1つが成立する。

(i) $z = c$ 以外の任意の z に対して発散する。

(注: どんな場合も $z = c$ では収束する。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$.)

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

(iii) ある $\rho \in (0, +\infty)$ が存在して、$|z - c| < \rho$ ならば収束し、$|z - c| > \rho$ ならば発散する。

証明のあらすじ (i) でも、(ii) でもないとする。そうすると、収束する $z_1\ (\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。上の補題、系により $|z_1-c|\le|z_0-c|$. もしも等号が成り立つならば、$\rho:=|z_1-c|=|z_0-c|$ とおけば良い。

$|z_1-c|<|z_0-c|$ と仮定する。黒板に図を描いて、2 色のチョークを持ち、「z_1 よりも c に近いところでは収束」、「z_0 よりも c から遠いところでは発散」。ここから二分法を始める。図で説明をするところを言葉にするのは面倒なので省略。

「詳しくは講義ノートで」。■

言葉の定義をしよう。

定義 3.6 (収束半径, 収束円) 上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho:=0$, (ii) のとき $\rho=+\infty$ とおき、ρ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の**収束半径** という。また

$$D(c;\rho)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<\rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の**収束円**という。
($\rho=0$ のとき $D(c;\rho)=\emptyset$, $\rho=+\infty$ のとき $D(c;\rho)=\mathbb{C}$ であることに注意)

「収束半径」をこのように定義すると、

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $|z-c|<\rho$ ならば収束、$|z-c|>\rho$ ならば発散

何かある数が収束半径であることを示すために、このことはよく使われる。

注意 3.7 (繰り返しになるかもしれないが、くどくなっても) 収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある z でどうなるかは、収束するか、発散するか、何も言ってない。それはケース・バイ・ケース。■

例 3.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$. 実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}z^k=\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z\neq 1)\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) & (z=1)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-z} & (|z|<1)\\ \text{発散} & (|z|\ge 1).\end{cases}$$

これから、$|z|<1$ ならば収束、$|z|>1$ ならば発散する。ゆえに $\rho=1$. 収束円は $D(0;1)$. この結果は、実は非常に非常に重要である。冪級数は等比級数に似ていて、その収束・発散は等比級数と比較して証明されることが多いから。■

次は教わったはず？

命題 3.9 (Cauchy-Hadamard の判定法) $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で、任意のベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は

$$\rho = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

$\dfrac{1}{\rho} = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ と書く人が多いけど… ρ を知りたいならば $\rho =$ と書くのが良いでしょう！

上極限 $\limsup$ に慣れていない (教わっていない) 人が多いと想像する。

上極限の定義くらいは紹介

$\{a_n\}$ を実数列, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。
$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \lambda$ とは、次の 2 条件を満たすことをいう。

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)\ a_n < \lambda + \varepsilon$.
これは十分大きい任意の n に対して $a_n < \lambda + \varepsilon$ が成り立つ、ということ。

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)\ a_n > \lambda - \varepsilon$.
これは $a_n > \lambda - \varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということ。

(これは授業中には言わなかった。) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは、任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、$a_n > U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。

上極限の説明をすると、結構時間がかかる、Cauchy-Hadamard を使わなくても大抵は何とかなる、そこでこの定理の証明は省略する。

代わりに簡略化バージョンを掲げておく。

系 3.10 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、$\rho = \dfrac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

証明 $\lim$ が存在すれば、それは $\limsup$ に等しいから。 ■

多くの場合、次の定理を使うのが簡単である。

命題 3.11 (d'Alembert の判定法, ratio test) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明 $c = 0$ の場合に証明すれば良い。$\rho := \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z| < \rho$ ならば収束し、$|z| > \rho$ ならば発散することを示す。

$|z| < \rho$ とする。$|z| < R < \rho$ となる R をとる。$(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > R.$$

この条件を満たす N を一つとる。$m \geq 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m}z^{N+m}\right| = \left|A_N \frac{A_{N+1}}{A_N} \cdot \frac{A_{N+2}}{A_{N+1}} \cdots \frac{A_{N+m}}{A_{N+m-1}} z^N z^m\right| \leq \left|A_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \leq \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \leq b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R.$$

上と同様にして、任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \geq \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

ゆえに $a_n z^n$ は 0 に収束しないので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、ρ は収束半径である。■

この証明のストーリーはよく出て来る。Cauchy-Hadamard の判定法の証明もほぼ同様である。

例 3.12 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

- 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow$ $|z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散。ゆえに…

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ であるから $\rho = 1$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ であるから $\rho = 1$. ■

以下の例でも、ratio test で済む。

例 3.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n$. $\rho=1$, 収束円は $D(0;1)$.

$c=0$, $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ $(n\in\mathbb{N})$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\cdots=1$. ゆえに… ■

例 3.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n$. $\rho=1$, 収束円は $D(0;1)$.

$c=0$, $a_n=n^2$ $(n\in\mathbb{N})$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\cdots=1$. ゆえに… ■

例 3.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$. $\rho=+\infty$, 収束円は $\mathbb{C}$.

$c=0$, $a_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ であるので… ■

例 3.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$. $\rho=0$, 収束円は $\emptyset$.

$c=0$, $a_n=n!$ $(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ であるので… ■

例 3.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n$. $\rho=2$, 収束円は $D(1;2)$.

$c=1$, $a_n=\dfrac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ であるので… ■

例 3.18 $R>0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{R}\right)^n$ について、$\rho=R$, 収束円 $D(c;R)$. ■

例 3.19 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$. これは実は $\sin z$ の Taylor 展開である (そのことはここでは使わない)。

$c=0$, そして

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n\ \text{は奇数},\ n=2k+1\ \text{とおいて})\\ 0 & (n\ \text{は偶数})\end{cases}$$

である。$a_n=0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式を直接使うことは出来ない。

$z^2=\zeta$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k.$$

ここでは共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に 0 でない因数かけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

すると

$$(\star)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k$$

の収束・発散が問題になる。

$$b_k:=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$. ■