複素関数練習問題 No. 2

桂田 祐史

2017 年 10 月 3 日

この文書では、i は虚数単位を表す。さらに記号の復習: $a \equiv b \pmod{c} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z})\ a - b = kc.$

複素指数関数

複素数 $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、$e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y)$ により e^{x+iy} を定める。これは (高等学校で学んだ) 実変数の指数関数 e^x の拡張である。特に $\theta \in \mathbb{R}$ のとき、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$

問題 25. $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ のときに $e^{i\theta}$ の値を求めよ。

問題 26. 任意の複素数 z_1, z_2 に対して、$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ が成り立つことを示せ。

問題 27. 任意の複素数 z に対して、以下の (1)〜(4) が成り立つことを示せ。

(1) $e^z \neq 0$, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$　(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $(e^z)^n = e^{nz}$　(3) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$　(4) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

問題 28. 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、$\left|e^{i\theta}\right| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ が成り立つことを示せ。

問題 29. 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ が成り立つことを示せ。

問題 30. 次のことを示せ。

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = 2k\pi i.$ (ゆえに e^z の周期は $2\pi i$.)

(2) 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = e^w \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ w = z + 2k\pi i.$

問題 31. 次の方程式を解け (複素数の範囲の解をすべて求めよ)。

(1) $e^z = -1$　(2) $e^z = i$　(3) $e^z = 0$

問題 32. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ が単射であるか、全射であるか、それぞれ理由をつけて答えよ。

ド・モアブルの公式と等比数列の和

ド・モアブルの公式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ は、複素指数関数を用いると、$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ と書き直せる。等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1 - r^n}{1 - r}$ (ただし $r \in \mathbb{C}$, $r \neq 1$ とする) がしばしば利用される。

問題 33. $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 5\varphi$ を $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ で表せ。

問題 34. $\cos\dfrac{\pi}{8}$ と $\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ。(三角関数の半角の公式を使って求められるが、複素数を用いて。)

問題 35. $n \in \mathbb{N}$ とするとき、$\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$ を求めよ。

問題 36. 2 以上の任意の自然数 N に対して、$\omega = \cos\dfrac{2\pi}{N} + i\sin\dfrac{2\pi}{N}$ とおくとき、任意の整数 p に対して、次の式が成り立つことを示せ。

$$1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(N-1)p} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \begin{cases} N & (p \equiv 0 \pmod N \text{ のとき}) \\ 0 & (p \not\equiv 0 \pmod N \text{ のとき}). \end{cases}$$

問題 37. $A = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$ と $B = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$ を簡単にせよ。
(やや難しいが、Fourier 解析に重要な応用のある問題であり、有名である。)

極形式, 偏角

複素数 z を $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ を用いて $z = re^{i\theta}$ と表したとき、右辺を z の極形式と呼ぶ。r, θ は、$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ としたときの、(x, y) の極座標である。$r = |z|$ である。以下 $z \neq 0$ と仮定する[1]。このとき、θ は 2π の整数倍の差を除いて定まる。その θ を z の偏角 (an argument of z) と呼び、(一意的には定まらないが) 記号 $\arg z$ で表す。$-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲に限定すると、θ はただ一つに定まり、それを z の偏角の主値と呼び、$\operatorname{Arg} z$ で表す。

問題 38. $z = -1 + \sqrt{3}i$ の極形式を求めよ。また z^{15} の値を求めよ。

問題 39. 次の各複素数の偏角の主値と極形式を求めよ。(6) は逆三角関数を用いて答えよ。

(1) 1 (2) i (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ (4) $1 + i$ (5) $-1 - \sqrt{3}i$ (6) $4 + 3i$

問題 40. $z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ と $\dfrac{1}{z}$ (ただし $z \neq 0$ とする) の極形式を求め、図示せよ。

n 乗根 (2 項方程式)

問題**??**は、何も見ないでも解けるようにしておくこと (非常に重要)。後はおまけ。

問題 41. 極形式を利用することで、$n = 2, 3, \cdots, 8$ に対して、$z^n = 1$ と $z^n = -1$ の解を求め、図示せよ。可能ならば代数的な式変形でも解いてみよ。

問題 42. 2 以上の自然数 N に対して、$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ とおくとき、次式が成り立つことを示せ。

$$z^N - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{N-1}).$$

問題 43. 1 の 5 乗根, 10 乗根を三角関数を使わずに $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表せ。

問題 44. 複素数 c の 3 乗根は、$c = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R})$ として、$\sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{3}}$, $\sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}$, $\sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}$ と表せるが、$c = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$ $(\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R})$ とおいて、$(x+iy)^3 = \alpha + i\beta$ から得られる連立方程式 $x^3 - 3xy^2 = \alpha$, $3x^2y - y^3 = \beta$ を解いて求めようとすると、どうなるか考察せよ (平方根の求め方の真似)。

問題 45. 定木とコンパスによる正 n 角形の作図について、Gauss が発見したことを調べよ。

問題 46. 2 以上の任意の自然数 N に対して、$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ とおく。(j, k) 成分 $(j, k \in \{1, \ldots, N\})$ が $\omega^{(j-1)(k-1)}$ に等しい N 次正方行列を W とするとき[2]、$\dfrac{1}{\sqrt{N}} W$ はユニタリ行列であることを示せ。
($W^* W = W W^* = NI$ (I は N 次の単位行列) を確認すればよい。W は離散 Fourier 変換と呼ばれる。)

[1]そうしないと、θ は何でも良いことになってしまい、議論が少し面倒になる。0 の偏角は定義しないのが普通である。

[2]行列を成分で定めるとき、(i, j) 成分を指定するのが普通だが、複素数が関係するときは、虚数単位と記号がかぶるので、i は使わず、j, k を指定する本がある。そのやり方を採用した。

misc.

2 以上の自然数 n と正数 ρ に対して、ρ の (実数の範囲の) n 乗根 $\sqrt[n]{\rho}$ というものを用いたので、念のため根拠を確認する。

問題 47. 中間値の定理を用いて、次の (1), (2) を証明せよ。

(1) $n \in \mathbb{N}$ が偶数ならば、任意の $\rho \geq 0$ に対して、$r^n = \rho,\ r \geq 0$ を満たす r が一意的に存在する。

(2) $n \in \mathbb{N}$ が奇数ならば、任意の $\rho \in \mathbb{R}$ に対して、$x^n = \rho,\ x \in \mathbb{R}$ を満たす x が一意的に存在する。

解答 25. $e^{i0}=1,\ e^{i\pi/6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\ e^{i\pi/4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}},\ e^{i\pi/3}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ e^{i\pi/2}=i,\ e^{i2\pi/3}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2},$ $e^{i3\pi/4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}},\ e^{i5\pi/6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\ e^{i\pi}=-1,\ e^{i3\pi/2}=-i,\ e^{i2\pi}=1.$

解答 26. $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\ (x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R})$ とおくと、$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$ であるから、

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2}\left(\cos\left(y_1+y_2\right)+i\sin\left(y_1+y_2\right)\right)\\
&= e^{x_1}e^{x_2}\left[\left(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2\right)+i\left(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2\right)\right]\\
&= e^{x_1}e^{x_2}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)\\
&= e^{x_1}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\cdot e^{x_2}\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)\\
&= e^{z_1}e^{z_2}.\blacksquare
\end{aligned}$$

解答 27.

(1) $e^ze^{-z}=e^{z+(-z)}=e^0=1$ であるから、$e^z\neq 0,\ \dfrac{1}{e^z}=e^{-z}.$

(2) $n\geq 0$ に対して、帰納法で $(e^z)^n=e^{nz}$ を示そう。

(i) $n=0$ のとき $(e^z)^n=(e^z)^0=1,\ e^{nz}=e^{0\cdot z}=e^0=1$ であるから成り立つ。

(ii) $n=k\ (k\in\mathbb{Z},\ k\geq 0)$ のとき成り立つと仮定すると、

$$(e^z)^{k+1}=(e^z)^k\cdot e^z=e^{kz}e^z=e^{kz+z}=e^{(k+1)z}.$$

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より任意の $n\in\mathbb{Z},\ n\geq 0$ に対して成り立つ。$n<0$ のときは、$m:=-n$ とおくと、$n=-m,$ $m\in\mathbb{N}$ であるから、

$$(e^z)^n=(e^z)^{-m}=\frac{1}{(e^z)^m}=\frac{1}{e^{mz}}=e^{-mz}=e^{nz}.$$

(3) $z=x+iy\ (x,y\in\mathbb{R})$ とおくと、

$$e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

であるから、

$$\overline{e^z}=e^x\cos y-ie^x\sin y=e^x\cos(-y)+ie^x\sin(-y)=e^x\left(\cos(-y)+i\sin(-y)\right)=e^{x-iy}=e^{\overline{z}}.$$

(4) $z=x+iy\ (x,y\in\mathbb{R})$ とおく。

$$\left|e^{iy}\right|=\left|\cos y+i\sin y\right|=\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y}=\sqrt{1}=1$$

であるから、

$$\left|e^z\right|=\left|e^xe^{iy}\right|=\left|e^x\right|\left|e^{iy}\right|=e^x\cdot 1=e^x=e^{\mathrm{Re}\,z}.\blacksquare$$

解答 28. 実質的に前問で済んでいるが、ここでは直接証明しておく。$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ であるから、

$$\begin{aligned}
&\left|e^{i\theta}\right|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sqrt{1}=1,\\
&\overline{e^{i\theta}}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{i(-\theta)}=e^{-i\theta)},\\
&\frac{1}{e^{i\theta}}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)}=\frac{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=e^{-i\theta}.\blacksquare
\end{aligned}$$

解答 29.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

を $\cos\theta, \sin\theta$ についての連立 1 次方程式とみなして解くと、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \blacksquare$$

解答 30.

(1) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow e^x (\cos y + i\sin y) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \wedge \cos y + i\sin y = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge \cos y = 1 \wedge \sin y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge ((\exists k \in \mathbb{Z})\ y = 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad z = 2k\pi i. \end{aligned}$$

(注: $\Leftrightarrow$ の $\Rightarrow$ では、まず $e^x(\cos y + i\sin y) = 1$ の両辺の絶対値を取って $e^x = 1$ を得てから、それを代入して $1 \cdot (\cos y + i\sin y) = 1$.)

(注) 複素対数関数を学んだ後ならば、次のように解答して良い。1 の極形式が $1 = 1e^{i0}$ (つまり $r = 1$, $\theta = 0$) であることから、

$$z = \log 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2)

$$e^z = e^w \Leftrightarrow 1 = e^w e^{-z} \Leftrightarrow e^{w-z} = 1 \Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbb{Z})\ w - z = 2k\pi i). \blacksquare$$

解答 31.

(1) $e^{i\pi} = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} e^z = -1 &\Leftrightarrow e^z e^{i\pi} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z+i\pi} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z + i\pi = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = (2k-1)\pi i. \end{aligned}$$

(2) $e^{i\pi/2} = i$ であるから

$$\begin{aligned} e^z = i &\Leftrightarrow e^z / e^{i\pi/2} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z - i\pi/2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z - i\pi/2 = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = (2k + 1/2)\pi i. \end{aligned}$$

(3) 任意の z に対して $e^z \neq 0$ である。このことは既に証明済みであるが、念のためもう一度書くと、

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$$

であるから、$e^z \neq 0$. ゆえに方程式 $e^z = 0$ の解は存在しない。 $\blacksquare$

解答 32. (念のため、単射、全射を復習しておく。定義は

$$\begin{aligned} f \text{ が単射} &\Leftrightarrow [(\forall z_1, z_2) z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)], \\ f \text{ が全射} &\Leftrightarrow (\forall w)(\exists z) w = f(z) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f \text{ が単射でない} &\Leftrightarrow [(\exists z_1, z_2) z_1 \neq z_2 \wedge f(z_1) = f(z_2)], \\ f \text{ が全射でない} &\Leftrightarrow (\exists w)(\forall z) w \neq f(z). \end{aligned}$$

である。)

単射ではない。実際、$z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi i$ とおくと、$z_1 \neq z_2$ であるのに $e^{z_1} = 1 = e^{z_2}$.

全射ではない。実際、$0 \in \mathbb{C}$ であるが、$e^z = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は存在しない。 ■

(後で指数関数の定義域、終域を適当に制限して、その逆関数である "複素対数関数" を定義することになる。)

解答 33.

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = \operatorname{Re}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3\right] \\ &= \operatorname{Re}\left(\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi + i^2 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi\right) \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = \operatorname{Re}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4\right] \\ &= \operatorname{Re}\left(\cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi + 6i^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i^3\cos\varphi\sin\varphi^3 + i^4\sin^4\varphi\right) \\ &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5\varphi &= \operatorname{Im}(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = \operatorname{Im}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5\right] \\ &= \operatorname{Im}\left(\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi + 10i^2\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 10i^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5i^4\cos\varphi\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi\right) \\ &= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 34. $z = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$ とおくと、$z = e^{i\pi/8}$.

$$z^2 = e^{2\cdot i\pi/8} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \wedge 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}$. これを解いて

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right).$$

$\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$, $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$ であるから、

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \blacksquare$$

解答 35. (準備中)

解答 36. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{kp}$ は初項 1, 公比 ω^p の等比数列の和である。$p\equiv 0 \pmod N$ のとき $\omega^p=1$ であるから

$$\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{kp}=\sum_{k=0}^{N-1}1=N.$$

$p\not\equiv 0 \pmod N$ のとき $\omega^p\neq 1$ であるから、

$$\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{kp}=1\cdot\frac{(\omega^p)^N-1}{\omega^p-1}=\frac{(\omega^N)^p-1}{\omega^p-1}=\frac{1^p-1}{\omega^p-1}=0.\blacksquare$$

解答 37. $A+iB$ は公比 $e^{i\varphi}$ の等比数列の和であるので

$$A+iB=1+e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\cdots+e^{in\varphi}=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\varphi}=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\varphi}\right)^k=\frac{1-\left(e^{i\varphi}\right)^n}{1-e^{i\varphi}}.$$

分母を実数になるように変形する。分母分子に $1-e^{i\varphi}$ の共役複素数をかけても良いが、$e^{-i\varphi/2}$ をかけるのが手っ取り早い[3]。

$$A+iB=\frac{e^{-i\varphi/2}\left(1-e^{in\varphi}\right)}{e^{-i\varphi/2}\left(1-e^{i\varphi}\right)}=\frac{e^{-i\varphi/2}-e^{i(n-1/2)\varphi}}{e^{-i\varphi/2}-e^{i\varphi/2}}.$$

右辺の分母は $-2i\sin\varphi/2$, 分子は

$$\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}-(\cos(n-1/2)\varphi+i\sin(n-1/2)\varphi)=\cos\frac{\varphi}{2}-\cos(n-1/2)\varphi-i\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\sin(n-1/2\varphi)\right).$$

であるから、

$$A+iB=i\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}+\frac{\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

ゆえに

$$A=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}},\quad B=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

解答 38. $|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2.$

$$\frac{z}{|z|}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\theta+i\sin\theta$$

を満たす θ として $\theta=\frac{\pi}{3}$ が取れる。ゆえに

$$z=-1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

これから

$$z^{15}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{15}=2^{15}e^{15\cdot i\frac{\pi}{3}}=2^{15}e^{5\pi i}=2^{15}\cdot e^{\pi i}=-2^{15}=-32768.\blacksquare$$

解答 39. (準備中)

[3] 細かい工夫のようだが、この問題は実は Fourier 解析では非常に重要であるので、覚えた方が良いかもしれない。

解答 40.

$$\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = \overline{r}\,\overline{e^{i\theta}} = re^{-i\theta},$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

ゆえに $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ の極形式はそれぞれ、$\overline{z} = re^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. 図示については準備中。■

解答 41. $n = 6, 8$ 以外は講義ノートに書いてあるので、ここでは省略する。$n = 8$ の場合は (詳しいことは省略するが)

- $z^8 = 1$ の解は、極形式で $e^{ik\pi/4}$ $(k = 0, 1, \cdots, 7)$ であり、± 1, $\pm i$, $\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号は任意の組み合わせを許す)。
- $z^8 = -1$ の方は、実は宿題で $e^{i\pi/8}$ を求めてあり、後はそれに $z^8 = 1$ の解をかけたものになる。■

解答 42. $z = \omega^k$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ は互いに相異なり (従って個数は N)、$z^N - 1 = 0$ を満たす。ゆえに $z^N - 1 = 0$ のすべての根である。ゆえに $z^N - 1 = a\displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(z - \omega^k)$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在するはずだが、z^N の係数を両辺で比較することにより $a = 1$. ゆえに $z^N - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(z - \omega^k) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{N-1})$.
■

解答 43. (準備中)

解答 44. (準備中)

解答 45. (参考書案内をした方が良いかな…)。

解答 46. $\overline{\omega} = \omega^{-1}$ であることに注意する。W の (j,k) 成分は $\omega^{(j-1)(k-1)}$. W^* の (k,ℓ) 成分は $\overline{W}$ の (ℓ,k) 成分であり、$\overline{\omega^{(\ell-1)(k-1)}} = \overline{\omega}^{(\ell-1)(k-1)} = \omega^{-(\ell-1)(k-1)}$. ゆえに WW^* の (j,ℓ) 成分は

$$\sum_{k=1}^{N}\omega^{(j-1)(k-1)}\omega^{-(\ell-1)(k-1)} = \sum_{k=1}^{N}\omega^{(j-\ell)(k-1)} = \sum_{k'=0}^{N-1}\omega^{(j-\ell)k'} = \begin{cases} N & (j-\ell \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$1 \le j \le N, 1 \le \ell \le N$ のとき、$j - \ell \equiv 0 \pmod{N}$ は $j = \ell$ と同値であるから、WW^* の (j,ℓ) 成分は $N\delta_{j\ell}$ である。すなわち $WW^* = NI$. ゆえに $UU^* = I$. これは U が unitary 行列であることを示している。■

解答 47. (1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ とするとき、$f(x)$ は x の多項式であるから f は連続である。$f'(x) = nx^{n-1} > 0$ $(x > 0)$ であるから f は $[0,\infty)$ で狭義単調増加であるから単射である。したがって、任意の $\rho \in [0,\infty)$ に対して、$f(r) = \rho$, $r \ge 0$ を満たす r は存在しても一意的である。一方、存在することは以下のように場合分けして示される。

- $\rho = 0$ のとき、$x = 0$ とすると $x \in [0,\infty)$, $f(x) = \rho$.
- $\rho = 1$ のとき、$x = 1$ とすると $x \in [0,\infty)$, $f(x) = \rho$.
- $\rho > 1$ のとき、$f(0) = 0 < \rho$, $f(\rho) = \rho^n > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解が $(0,\rho)$ 内に存在する。
- $0 < \rho < 1$ のとき、$f(0) = 0 < \rho$, $f(1) = 1 > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解 $(0,1)$ 内に存在する。

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ とするとき、(1) とほぼ同様にして、f は連続かつ狭義単調増加かつ単射である (n が奇数であることから、$f'(x) = nx^{n-1} > 0$ ($x \neq 0$) となるので、負の範囲も含めて狭義単調増加になることに注意)。任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して $f(r) = \rho$ となる r が存在することは、(1) と同様に示される。$\rho < 0$ の場合は、r を $f(r) = -\rho$ を満たす数とすると、$f(-r) = \rho$ が成り立つ。 ■