複素関数練習問題 No. 1

桂田 祐史

2017 年 10 月 3 日, 2020 年 1 月 12 日

この文書では、i は虚数単位を表す。

複素数の四則

問題 1. (複素数の商の定義の確認) 与えられた複素数 $w=u+iv$ $(u,v\in\mathbb{R})$ に対して、方程式 $zw=1$ は、$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とおくとき

$$xu-yv=1,\quad xv+yu=0 \tag{$\sharp$}$$

という x, y についての連立 1 次方程式と同値である。この連立 1 次方程式 ($\sharp$) を解け。

問題 2. $z_1=1-i$, $z_2=2+3i$ に対して、以下のものを求めよ。
z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

問題 3. (1) i^n $(n\in\mathbb{Z})$ を求めよ。 (2) $(1+i)^{20}$ を求めよ。

問題 4. 以下の値を求めよ。ただし n は自然数とする。

$$(1+2i)^3,\quad \frac{5}{-3+4i},\quad \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2,\quad (1+i)^n+(1-i)^n.$$

問題 5. $z=x+iy$ (x と y は実数) とするとき、以下の式の実部、虚部を求めよ。

$$z^4,\quad \frac{1}{z},\quad \frac{z-1}{z+1},\quad \frac{1}{z^2}.$$

問題 6. 次式が (すべての符号の組み合わせについて) 成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1\quad\text{and}\quad\left(\frac{\pm1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1.$$

平方根

問題 7. 以下の数の平方根を求めよ。

(1) -1 (2) i (3) $-i$ (4) $1+i$ (5) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

問題 8. α, β を実数とするとき、$z^2=\alpha+i\beta$ を満たす z を求めよ。

問題 9. (1) $z^4=-1$ を解け。 (2) $z^4=i$ を解け。 (3) $z^4=-i$ を解け。
(平方根の平方根として 4 乗根を求めてみよう、という趣旨。)

問題 10. $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ とするとき、次の 2 次方程式を解け。

$$z^2+(\alpha+i\beta)\,z+\gamma+i\delta=0$$

実部, 虚部, 共役複素数

問題 11. 以下の数について、実部、虚部、共役複素数を求めよ。
(1) $1+2i$　(2) $-3-4i$　(3) 5　(4) $-6i$　(5) 0

問題 12. 任意の複素数 z に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

問題 13. 任意の複素数 z_1, z_2 に対して、次式が成り立つことを示せ (最後の等式では、$z_2 \neq 0$ とする)。

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}, \quad \overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$$

問題 14. 複素平面内の任意の直線は、$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ を用いて次式で表せることを示せ。

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \gamma = 0.$$

問題 15. 複素平面内の任意の円は、$c \in \mathbb{C}$ と、$\beta < |c|^2$ を満たす $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて次式で表せることを示せ。

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0.$$

問題 16. $f(z)$ を実係数多項式、$c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$\overline{f(c)} = f(\overline{c})$$

が成り立つことを示せ。(これから c が $f(z)$ の根であれば、$\overline{c}$ も $f(z)$ の根である。)

問題 17. $f(z)$ を実係数多項式, m を自然数とする。複素数 c が $f(z)$ のちょうど m 重根であれば、$\overline{c}$ も $f(z)$ のちょうど m 重根であることを示せ。

問題 18. 実数 a, b, c, d に対して、$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ が $z = 1+i$, $2+3i$ を解に持つとする。a, b, c, d を求めよ。

問題 19. x と y を実数とするとき、$z = x+iy$ と $z = x-iy$ に対して、$\dfrac{z}{z^2+1}$ の値を計算し、それらが互いに複素共役であることを確かめよ。

絶対値

問題 20. 以下の数について、絶対値を求めよ。
(1) 0　(2) $1+2i$　(3) $-3-4i$　(4) 5　(5) $-6i$　(6) $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$　(7) $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

問題 21. 任意の複素数 z に対して、$|\overline{z}| = |z|$ が成り立つことを証明せよ。

問題 22. 任意の複素数 z_1, z_2 に対して、$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$ が成り立つことを証明せよ。

問題 23. 任意の複素数 z_1, z_2 に対して、$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ が成り立つことを証明せよ。

問題 24. 次の恒等式を示せ (Lagrange の恒等式の複素数形)。

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \sum_{1\leq j<k\leq n} \left|a_j\overline{b_k} - a_k\overline{b_j}\right|^2.$$

(これから Cauchy-Schwarz の不等式 $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2}$ が導ける。)

解答 1. (これは素直な良い問題と思う。)

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\blacksquare$$

解答 2. (結構煩わしい。以下の計算は Mathematica で検算済み。)

$$\begin{aligned}
&z_1+z_2 = (1-i)+(2+3i) = (1+2)+i(-1+3) = 3+2i, \\
&z_1-z_2 = (1-i)-(2+3i) = (1-2)+i(-1-3) = -1-4i, \\
&z_1z_2 = (1-i)(2+3i) = 1\cdot 2+1\cdot 3i-i\cdot 2-i\cdot 3i = 2+3i-2i+3 = 5+i, \\
&z_1/z_2 = \frac{1-i}{2+3i} = \frac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{1\cdot 2+1\cdot(-3i)-i\cdot 2+i\cdot 3i}{2^2+3^2} = -\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i.\blacksquare
\end{aligned}$$

解答 3. (これも素直な問題と思う。)

(1) $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ より、n について周期 4 となることが分かる。これから

$$i^n = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \\ i & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ -1 & (n \equiv 2 \pmod 4) \\ -i & (n \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

(2) $(1+i)^2 = 1^2+2i+i^2 = 2i$ であるから、$(1+i)^{20} = \left((1+i)^2\right)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = 1024\cdot(-1) = -1024.$ $\blacksquare$

解答 4. (間違えずに計算するのは結構大変だ。以下も Mathematica で検算済み。)

$$\begin{aligned}
&(1+2i)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot(2i)+3\cdot 1\cdot(2i)^2+(2i)^3 = 1+6i-12-8i = -11-2i, \\
&\frac{5}{-3+4i} = \frac{5(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-15-20i}{(-3)^2+4^2} = \frac{-15-20i}{25} = \frac{-3-4i}{5}, \\
&\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot 3+2\cdot 2i+i\cdot 3+2i^2}{3^2+2^2}\right)^2 = \left(\frac{4+7i}{13}\right)^2 \\
&\qquad = \frac{16+2\cdot 4\cdot 7i+49i^2}{169} = \frac{-33+56i}{169}.
\end{aligned}$$

$(1+i)^n+(1-i)^n$ はどうしよう。— 質問されたので答えます。この問 4 は Ahlfors のテキストから持ってきたものです。極形式を説明していないところで出題されているので結構悩ましいですね。極形式を知っていれば、$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ なので $(\sqrt{2}^n\cdot 2\cos\frac{n\pi}{4} = 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}$ とすぐ答えられますが。$n = 1, 2, \cdots$ を計算して $(2, 0, -4, -8, -8, 0, 16, 32, 32, 0, -64, -128, -128, \cdots)$、規則性 (絶対値は 2 つ進むと大体 2 倍になって、それで $2^{n/2}$ で割ってみると周期 8) に気づくのは相当根性があるか、数列が好きでないと。

$$1+i = \sqrt{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1-i = \sqrt{2}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

とした後、ド・モアブルの公式を使うのかな。講義では複素指数関数を使ってド・モアブルの公式を導いたけれど、高校の数学 III でもド・モアブルの公式は習うので (密輸入だ)。

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right), \quad (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{-n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4}\right)$$

に気づけば

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

こんなところでしょうか？実質的に極形式を使っているわけですが。■

解答 5. (こういう計算はきちんと出来るようにしておきたい。以下も Mathematica で検算済み。例えば (1) では `ComplexExpand[(x+I y)^4]` とすると良い。)

$$z^4=(x+iy)^4=x^4+4x^3\cdot iy+6x^2\cdot(iy)^2+4x\cdot(iy)^3+(iy)^4=x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3)$$

であるから、

$$\mathrm{Re}\left[z^4\right]=x^4-6x^2y^2+y^4,\quad \mathrm{Im}\left[z^4\right]=4x^3y-4xy^3.$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

であるから

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \mathrm{Im}\,\frac{1}{z}=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1}&=\frac{x+iy+1}{x+iy-1}=\frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy}=\frac{[(x+1)+iy]\,[(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2}\\&=\frac{\left[(x+1)(x-1)+(x+1)\cdot(-iy)+iy(x-1)-i^2y^2\right]}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1-2iy}{(x-1)^2+y^2}\end{aligned}$$

であるから

$$\mathrm{Re}\,\frac{z+1}{z-1}=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}\,\frac{z+1}{z-1}=\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(x+iy)^2}=\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2}=\frac{x^2-2ixy+i^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)+2ixy}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \mathrm{Im}\,\frac{1}{z^2}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.■$$

解答 6. 前半。$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を見た瞬間、$z^3=1$ の虚数解と気づくので、計算しなくても 1 であることは分かるけれど、四則演算の練習と考えて、地道に展開してみる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3&=\frac{(-1)^3+3(-1)^2\cdot i\sqrt{3}+3(-1)\cdot i^2(\sqrt{3})^2+i^3\left(\sqrt{3}\right)^3}{8}=\frac{-1+3\sqrt{3}i+9-i3\sqrt{3}}{8}=\frac{8}{8}=1,\\\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3&=\frac{(-1)^3-3(-1)^2\cdot i\sqrt{3}+3(-1)\cdot i^2(\sqrt{3})^2-i^3\left(\sqrt{3}\right)^3}{8}=\frac{-1-3\sqrt{3}i+9+i3\sqrt{3}}{8}=\frac{8}{8}=1.\end{aligned}$$

あるいは (これは 2 乗すると、もう一方になることを「知っている」ので)

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

となることから、

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{(-1)^2-i^2\cdot 3}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

後半はなるべく楽をしたい (6 乗の計算を 4 回実行したくない)。

$$\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \mp \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (\text{複号は任意の組み合わせ})$$

であるから、

$$\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\mp \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^2 = 1^2 = 1. \blacksquare$$

解答 7. (平方根は計算できるようにしておくこと。) $\alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ の平方根 ($z^2 = \alpha + i\beta$ の解) は、$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおいて、連立方程式

$$x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta$$

を解くことで求まる。

(1) $\pm i$ (2) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ (3) $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ (4) $\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)$
(5) $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

(4) は宿題に出した。途中経過を書いておく。

$$z^2 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = 1.$$

$2xy = 1$ より、$y = \frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して、

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

ゆえに

$$x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}.$$

これから

$$y = \frac{1}{2x} = \pm\frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + iy = \pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right). \blacksquare$$

解答 8. (結果のみ。注意すべきは $\sqrt{\beta^2} = |\beta|$ であること。)

$$z = \begin{cases} \pm\sqrt{\alpha} & (\beta = 0 \text{ かつ } \alpha \geq 0) \\ \pm i\sqrt{-\alpha} & (\beta = 0 \text{ かつ } \alpha < 0) \\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right) & (\beta \neq 0). \end{cases} \blacksquare$$

解答 9. この問題は某テキストから拝借したものだが、極形式に基づく n 乗根の計算法を用いると、見通しよく計算できる。しかし、平方根のセクションにおいてある問題なので、以下のように平方根の計算で求めることを想定しているのであろう。

一つの素朴なやり方: c の 4 乗根は $z^4 = c$ の解であるが、$Z := z^2$ とおくと、$Z^2 = c$ であるから、Z は c の平方根である。ゆえに z は、c の二つの平方根の平方根である。

少し工夫すると、c の一つの平方根の、一つの平方根 ζ を求めれば、$\zeta, i\zeta, -\zeta, -i\zeta$ が c の 4 乗根になる。

以下、(1) は最初のやり方、(2) と (3) は後で説明したやり方で求めてみる。

(ここから解答)

(1) -1 の平方根は $\pm i$ である。i, $-i$ の平方根は、問題 7 (2), (3) で求めてある。$z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

(2) i の平方根は、$\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. $1+i$ の平方根として、(問題 7 (4) から) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ が取れるので、$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ の 4 乗根として、$\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ が取れる。これに 1, i, -1, $-i$ をかけて、

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

(3) $-i$ の平方根は、$\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. $1-i$ の平方根として、$\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ が取れるので、$\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ の 4 乗根として、$\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ が取れる。これに 1, i, -1, $-i$ をかけて、

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \blacksquare$$

解答 11. (こういう問題は間違わないように。)

(1) $\mathrm{Re}(1+2i) = 1$, $\mathrm{Im}(1+2i) = 2$, $\overline{1+2i} = 1-2i$

(2) $\mathrm{Re}(-3-4i) = -3$, $\mathrm{Im}(-3-4i) = -4$, $\overline{-3-4i} = -3+4i$

(3) $\mathrm{Re}\,5 = 5$, $\mathrm{Im}\,5 = 0$, $\overline{1+2i} = 1-2i$

(4) $\mathrm{Re}(-6i) = 0$, $\mathrm{Im}(-6i) = -6$, $\overline{-6i} = 6i$

(5) $\mathrm{Re}\,0 = 0$, $\mathrm{Im}\,0 = 0$, $\overline{0} = 0$ $\blacksquare$

解答 12. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくとき、

$$\overline{z} = x - iy.$$

x, y についての連立 1 次方程式として解くと

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

ゆえに

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,z = \frac{z-\overline{z}}{2i}. \blacksquare$$

解答 13. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

一方、

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1),\\ \bar{z_1} \cdot \bar{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

であるから、

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}.$$

商については工夫をしてみる。積の共役複素数が共役複素数の積に等しいことは証明したので、

$$\overline{z_1/z_2} \cdot \overline{z_2} = \overline{(z_1/z_2) \cdot z_2} = \overline{z_1}.$$

これから

$$\overline{z_1/z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \blacksquare$$

解答 14. 次のことは高校で学んでいる。

> xy 平面内の任意の直線は、ある $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ を用いて
>
> $$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$
>
> と表される。また逆に、任意の $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ に対して、
>
> $$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$
>
> は xy 平面内の直線を表す。

$a = \dfrac{1}{2}(\alpha + i\beta)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき、

$$\begin{aligned}a\bar{z} + \bar{a}z &= a\bar{z} + \overline{a\bar{z}} = 2\operatorname{Re}(a\bar{z}) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}(\alpha + i\beta)(x - iy)\right] = \operatorname{Re}\left[\alpha x + \beta y + i(\beta x - \alpha y)\right]\\ &= \alpha x + \beta y.\end{aligned}$$

ゆえに

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \gamma = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

また $a \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ である。

　以上から、ほぼ明らかであるが、ていねいにやると以下のようになる。

　平面内の任意の直線に対して、ある $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在して、方程式 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ で表される。$a := (\alpha + i\beta)/2$ とおくと、$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であり、この方程式は $a\bar{z} + \bar{a}z + \gamma = 0$ と同値である。

　任意の $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、$\alpha := 2\operatorname{Re} a$, $\beta := 2\operatorname{Im} a$ とおくと、$a = (\alpha + i\beta)/2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. 方程式 $a\bar{z} + \bar{a}z + \gamma = 0$ は、$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ と同値であり、平面内の直線を表す。$\blacksquare$

解答 15. 中心を c, 半径を r とすると、$|z-c|=r$.

$$\begin{aligned}|z-c|=r \quad &\Leftrightarrow |z-c|^2=r^2\\ &\Leftrightarrow (z-c)\overline{(z-c)}=r^2\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-c\bar{z}-\bar{c}z+c\bar{c}=r^2\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-c\bar{z}-\bar{c}z+|c|^2-r^2=0.\end{aligned}$$

$\beta=|c|^2-r^2$ とおくと、$\beta<|c|^2$. ■

解答 16. 講義 (1.5, 命題 1.6 の証明の中) で証明したので、ここでは省略する。■

解答 17. (ちょっと雑だけど。) c が $f(z)$ のちょうど m 重根であるためには

(♯) $$f^{(j)}(c)=0 \quad (j=0,\cdots,m-1), \quad f^{(m)}(c)\neq 0$$

が成り立つことが必要十分である。$f(z)$ が z の実係数多項式であれば、$f^{(j)}(z)$ $(j=0,\cdots,m)$ も z の実係数多項式であるから、$\overline{f(c)}=f(\bar{c})$ が成り立つ。ゆえに (♯) は次と同値である。

$$f^{(j)}(\bar{c})=0 \quad (j=0,\cdots,m-1), \quad f^{(m)}(\bar{c})\neq 0.$$

これは $\bar{c}$ が $f(z)$ のちょうど m 重根であることを示している。■

解答 18. $f(z):=z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ とおくと、$f(z)$ は z の実係数多項式である。$1+i$ が根であることから、$1-i$ も根であり、$2+3i$ が根であることから、$2-3i$ も根である。ゆえに $f(z)$ は $z-(1+i)$, $z-(1-i)$, $z-(2+3i)$, $z-(2-3i)$ を因数に持つ。ゆえに

$$f(z)=g(z)\left(z-(1+i)\right)\left(z-(1-i)\right)\left(z-(2+3i)\right)\left(z-(2-3i)\right)$$

と表されるはずであるが、次数と最高次の係数を比較して、$g(z)=1$ である。ゆえに

$$f(z)=\left(z-(1+i)\right)\left(z-(1-i)\right)\left(z-(2+3i)\right)\left(z-(2-3i)\right).$$

これでも良いが、展開すると

$$f(z)=\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-4z+13\right)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26.■$$

解答 19. $z=x+iy$ のとき

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{x^3+xy^2+x}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}+i\frac{-y^3-x^2y+y}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}.$$

$z=x-iy$ のとき

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{x^3+xy^2+x}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}+i\frac{y^3+x^2y-y}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}.■$$

解答 20. (素直な問題で、こういうのはさっと解けるようになって欲しい。)

(1) $0=0+i\cdot 0$ であるから、$|0|=\sqrt{0^2+0^2}=\sqrt{0}=0$.

(2) $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

(3) $|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

(4) $5=5+i\cdot 0$ であるから、$|5|=\sqrt{5^2+0^2}=\sqrt{5^2}=5$.

(5) $-6i=0+(-6)i$ であるから、$|-6i|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=\sqrt{6^2}=6$.

(6) $|-2i(3+i)(2+4i)(1+i)| = |-2|\,|i|\,|3+i|\,|2+4i|\,|1+i| = 2{\cdot}1{\cdot}\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{10}\sqrt{20}\sqrt{2} = 2\cdot 10\cdot 2 = 40.$

(7) $\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \dfrac{|3+4i|\,|-1+2i|}{|-1-i|\,|3-i|} = \dfrac{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+2^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \dfrac{5}{2}.$ ■

解答 21. 任意の複素数 z に対して、$z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$\bar{z} = x - iy.$ ゆえに

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|\,.■$$

解答 22. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ であった。

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\,\overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\ \overline{z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\,|z_2|^2 = (|z_1|\,|z_2|)^2$$

であるから

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|\,.■$$

解答 23.

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\,\overline{(z_1+z_2)} \\
&= (z_1+z_2)\,(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
(|z_1|+|z_2|)^2 - |z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 - \left(|z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2\right) \\
&= 2\,(|z_1z_2| - \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}))\,.
\end{aligned}$$

一般に $|\mathrm{Re}\,z| \le |z|$ であるから、

$$\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2) \le |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\,|\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2| = |z_1z_2|\,.$$

ゆえに

$$(|z_1|+|z_2|)^2 - |z_1+z_2|^2 \ge 0.$$

これから

$$|z_1|+|z_2| \ge |z_1+z_2|\,.■$$

解答 24. (準備中)