



・ 学生番号は機械で読み取りますので、きれいに記入ください。
 ・ 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score
採点結果

--	--	--

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名			/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日					

問8 (1) 以下の方程式を (複素数の範囲で) 解け。 (a) $\sin z = i$ (b) $\cos z = \frac{1}{2}$
 (2) $f''(z) - 5f'(z) + 6f(z) = 0, f(0) = 1, f'(0) = 2$ を満たす収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とその収束半径を求めよ。(ヒント: $b_n := n!a_n$ とおき、 b_n を求める。)

問 8 解説

$$(1) \text{ (a) } \sin z = i \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = -2 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = -1 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow X = -1 \pm \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow e^{iz} = -1 \pm \sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)e^{i0}, (\sqrt{5} + 1)e^{i\pi} \Leftrightarrow iz = \log(\sqrt{5} - 1) + i \cdot 2n\pi, \log(\sqrt{5} + 1) + i(2n + 1)\pi \\ \Leftrightarrow z = 2n\pi - i \log(\sqrt{5} - 1), (2n + 1)\pi - i \log(\sqrt{5} + 1).$$

$$(b) \cos z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow z = (2n \pm \frac{1}{3})\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(2)

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - 5(n + 1)a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

漸化式に $a_n = \frac{b_n}{n!}$ を代入すると

$$\frac{b_{n+2}}{n!} - 5\frac{b_{n+1}}{n!} + 6\frac{b_n}{n!} = 0.$$

分母を払って

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0.$$

また $b_0 = 1, b_1 = 2$. これから $b_n = 2^n$. (余談になるけれど、 $b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ が一般解で、初期条件から $C_1 = 1, C_2 = 0$ が得られて $b_n = 2^n$ 。) ゆえに $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = e^{2z}. \blacksquare$$