複合機スキャン用紙 宿題 7 (2018/11/19 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日

問 7 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$ の和を求めよ (授業で求めた $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和は用いて良い)。 (2) (授業で説明したように) 冪級数で e^z, $\cos z$, $\sin z$ を定義したとき、$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ が成り立つことを示せ。

問 7 解説　(1) まず

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = (z-1)^{-1} \quad (\text{収束円 } D(0;1)).$$

微分して z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (\text{収束円 } D(0;1)).$$

微分して z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = -\frac{z^2+z}{(z-1)^3} \quad (\text{収束円 } D(0;1)).$$

ここまでは授業でやった。もう一度微分して z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = -\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \quad (\text{収束円 } D(0;1)).$$

(2)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

であるから

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{n!} z^n.$$

$n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき $(1+(-1)^n)i^n = 0$, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ が偶数のとき $(1+(-1)^n)i^n = 2i^{2k} = 2(-1)^k$ であるから

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos z.$$

$n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき $(1-(-1)^n)i^n = 2i^{2k+1} = 2(-1)^k i$, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ が偶数のとき $(1+(-1)^n)i^n = 0$ であるから

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k i}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sin z. \blacksquare$$