複合機スキャン用紙 宿題 6 (2018/11/12 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科					Subject/Teacher 科目/教員名	/				
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番				Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日		

問 6 (1) 次の各関数を 0 のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ (等比級数の和の公式を利用して解答すること)。

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ (b) $g(z) = \dfrac{1}{(z+3)^2}$ (c) $h'(z) = \dfrac{1}{z-4}$, $h(0) = 0$ を満たす h

(2) $F(z) = \dfrac{1}{z+5}$ を -2 のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問 6 解説　要点は

- 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ が収束 $\Leftrightarrow |r|<1$. 和は $\dfrac{1}{1-r}$.
- 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が $\rho \Leftrightarrow |z-c|<\rho$ で収束かつ $|z-c|>\rho$ で発散。
- 冪級数の収束半径は、項別微分、項別積分しても変わらない。

(1) (a)

$$f(z)=\frac{1}{z-i}=\frac{1}{-i(1+iz)}=\frac{i}{1-(-iz)}=i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}z^n.$$

この級数が収束 $\Leftrightarrow |-iz|<1 \Leftrightarrow |-i|\,|z|<1 \Leftrightarrow |z|<1$ であるから、収束半径は 1.

(b)

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n.$$

この級数が収束 $\Leftrightarrow \left|-\frac{z}{3}\right|<1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|-3|}<1 \Leftrightarrow |z|<3$ であるから、収束半径は 3. 項別微分して

$$g(z)=\frac{1}{(z+3)^2}=-\left((z+3)^{-1}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n z^{n-1}}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}z^n.$$

収束半径は (微分前と変わらず) 3.

(c)

$$h'(z)=\frac{1}{-4\left(1-\frac{z}{4}\right)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}.$$

この級数が収束 $\Leftrightarrow \left|\frac{z}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z|<4$ であるから、収束半径は 4. 項別積分して

$$h(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}+h(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 4^n}.$$

収束半径は (積分前と変わらず) 4.

(2)

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{1}{z+5}=\frac{1}{(z+2)+3}=\frac{1}{3\left(1+\frac{z+2}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{(-3)^n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z+2)^n.\end{aligned}$$

この級数が収束 $\Leftrightarrow \left|-\dfrac{z+2}{3}\right|<1 \Leftrightarrow |z+2|<3$ であるから、収束円は $D(-2;3)$. ■