複合機スキャン用紙　宿題 5　(2018/11/12 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/								
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日					

問 5　(1) 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+1)^2}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-3)^n$　(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}(z-5)^n$　(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n-1}}{(-2)^n}=-\frac{z^2}{2}+\frac{z^5}{4}-\cdots$

(2) (a) 「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ は収束する。」は良く知られている定理であるが逆は成り立たない。反例をあげよ。(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 であるとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径 ρ について何が言えるか。

問 5 解説

(1) (a) $c=-1$, $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2/n)^2}{(1+1/n)^2}=1.$$

ゆえに収束半径は 1. 収束円は $D(-1;1)$.

(b) $c=3$, $a_n=n!$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

ゆえに収束半径は 0. 収束円は $D(3;0)=\emptyset$.

(c) $c=5$, $a_n=\dfrac{4^n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(1+1/n)}=\frac{1}{4}.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{4}$. 収束円は $D(5;1/4)$.

(d) $\zeta:=z^3$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n-1}}{(-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+2}}{(-2)^{n+1}}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{(-2)^{n+1}}.$$

$b_n:=\frac{1}{(-2)^{n+1}}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=2.$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{(-2)^{n+1}}$ について、$|\zeta|<2$ ならば収束し、$|\zeta|>2$ ならば発散する。

ゆえに $|z|<\sqrt[3]{2}$ ならば収束し、$|z|>\sqrt[3]{2}$ ならば発散する。ゆえに収束半径は $\sqrt[3]{2}$. 収束円は $D(0;\sqrt[3]{2})$.

(2) (a) $a_n=n+\frac{1}{n^2}$, $b_n=-n$. (収束しない級数同士を足すと “キャンセル” によって収束級数になることがある。)

(b) 結論を先に述べると: $\rho_1\neq\rho_2$ ならば $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2\}$. $\rho_1=\rho_2$ ならば $\rho\geq\rho_1$.

実際、もしも $\rho_1<\rho_2$ ならば、$\rho=\rho_1$ である。

- $|z-c|<\rho_1$ のとき、二つの冪級数は収束するので、和の冪級数 $\sum(a_n+b_n)(z-c)^n$ も収束する。
- (証明 1) $|z-c|>\rho_1$ のとき、$\sum(a_n+b_n)(z-c)^n$ は収束しない。もしも収束したと仮定すると、$\rho_1<|z'-c|<\rho_2$ を満たすある z' で $\sum(a_n+b_n)(z'-c)^n$ は収束するが ($|z-c|<\rho_2$ ならば $z'=z$ で良いし、そうでない場合は、$z'=c+(\rho_1+\rho_2)/2$ とすれば良い)、$\displaystyle\sum_n b_n(z'-c)^n$ は収束するので、

$$\sum a_n(z'-c)^n=\sum\left((a_n+b_n)(z'-c)^n-b_n(z'-c)^n\right)$$

も収束することになり、矛盾が生じる。

(証明 2) $\rho_1<|z-c|<\rho_2$ を満たす任意の z に対して、$\sum a_n(z-c)^n$ は発散し、$\sum b_n(z-c)^n$ は収束する。ゆえに $\sum(a_n+b_n)(z-c)^n$ は発散する (もし収束すれば $a_n=(a_n+b_n)-b_n$ だ

から、$\sum a_n(z-c)^n$ も収束することになり矛盾する)。当然 $|z-c| \geq \rho_2$ を満たす任意の z に対しても発散する (もし収束する z が存在したら、$|z-c| < \rho_2$ を満たす任意の z に対して収束することになって、前半に矛盾する)。ゆえに $|z-c| > \rho_1$ ならば $\sum(a_n+b_n)(z-c)^n$ は発散する。

以上から $\sum(a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_1 である。

同様に $\rho_1 > \rho_2$ ならば、ρ_2 が収束半径である。ゆえに $\rho_1 \neq \rho_2$ のとき、$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

$\rho_1 = \rho_2$ の場合。$|z-c| < \rho_1$ のとき、二つの冪級数が収束するので、和の冪級数も収束する。一方、$|z-c| > \rho_1$ のとき、二つの冪級数は発散するが、和の冪級数は収束する場合がある。ゆえに一般に言えるのは $\rho \geq \rho_1$. ■