複合機スキャン用紙　宿題 4　(2018/10/22 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部　Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年　Class 組　Number 番	Date 日付	Year 年　Month 月　Day 日

問 4　(1) 次の各関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを示せ。

(a) $f(z) = z^4$ $(z \in \mathbb{C})$　(b) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$　(c) $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$

(2) $f(z) = (\overline{z})^2$ $(z \in \mathbb{C})$ は正則関数でないことを示せ。

(3) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則とする。このとき $g(z) := f(\overline{z})$ $(z \in \mathbb{C})$ で定義される関数 g は正則であるかどうか、理由をつけて答えよ。

問 4 解説

(1) (a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ であるから

$$f(x+yi) = (x+yi)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot iy + 6x^2 \cdot (iy)^2 + 4x \cdot (iy)^3 + (iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3).$$

ゆえに f の実部・虚部はそれぞれ

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi) = 4x^3y - 4xy^3.$$

ゆえに

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad u_y = -12x^2y + 4y^3, \quad v_x = 12x^2y - 4y^3, \quad v_y = 4x^3 - 12xy^2.$$

確かに $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たしている。

(b)

$$f(x+yi) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

ゆえに f の実部・虚部はそれぞれ

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
u_y &= \frac{(x^2+y^2)\cdot 0 - 2y \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
v_x &= \frac{(x^2+y^2)\cdot 0 - 2x \cdot (-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
v_y &= \frac{(x^2+y^2)\cdot (-1) - 2y \cdot (-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

確かに $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たしている。

(c)

$$f(x+yi) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ゆえに f の実部・虚部はそれぞれ

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi) = e^x \sin y.$$

ゆえに

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

確かに $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たしている。

(2) $f(z) = (\overline{z})^2$ であるから

$$f(x+yi) = (x-yi)^2 = x^2 - 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

ゆえに f の実部・虚部はそれぞれ

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = -2xy.$$

ゆえに

$$u_x = 2x, \quad u_y = -2y, \quad v_x = -2y, \quad v_y = -2x.$$

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ は $(x, y) = (0, 0)$ 以外では満たさない。ゆえに f は正則関数ではない。

(3) f の実部・虚部をそれぞれ u, v とし、g の実部・虚部をそれぞれ U, V とする。

$$f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y), \quad g(x, y) = U(x, y) + iV(x, y).$$

ところで $g(z) = f(\overline{z})$ であるから

$$g(x + yi) = f(x - yi) = f(x + (-y)i) = u(x, -y) + iv(x, -y).$$

ゆえに

$$U(x, y) + iV(x, y) = u(x, -y) + iv(x, -y).$$

実部・虚部を比較して

$$U(x, y) = u(x, -y), \quad V(x, y) = v(x, -y).$$

ゆえに

$$U_x(x, y) = u_x(x, -y), \quad U_y(x, y) = -u_y(x, -y), \quad V_x(x, y) = v(x, -y), \quad V_y(x, y) = -v_y(v, -y).$$

u と v は正則関数の実部・虚部であるから、微分可能であり、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。これから U と V も微分可能であり、

$$U_x = u_x = v_y = -V_y, \quad U_y = -u_y = -(-v_x) = v_x = V_x.$$

g が正則であるためには、$U_x = V_y$ かつ $U_y = -V_x$ が必要十分であるが、それは

$$U_x = U_y = V_x = V_y = 0$$

と同値である。定義域が領域であれば、g (よって f も) が定数関数である場合をのぞいて、正則ではない。一般には定義域の連結成分ごとに定数関数である場合をのぞいて、正則ではない、ことになる。■