複合機スキャン用紙　宿題 3　(2018/10/15 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部　Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年　Class 組　Number 番	Date 日付	Year 年　Month 月　Day 日

問 3　(1) 1 と -1 の 6 乗根を次の 2 通りの方法で求め、複素平面上に図示せよ。(i) 「$c = \rho e^{i\phi}$ ($\rho > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$) の n 乗根は $\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$」という定理を使う。(ii) $z^6 = 1$ や $z^6 = -1$ を解く。
(2) 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求めよ。
(a) $f(z) = z^3$ $(\Omega = \mathbb{C})$　(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $(\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\})$　(c) $f(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $(\Omega = \mathbb{C})$

問 3 解説

(1) (1 の 6 乗根) (i) $z^6 = 1 = 1e^{i\cdot 0}$ の解は、$e^{ik\frac{2\pi}{6}} = e^{ik\frac{\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, \cdots, 5)$ であるから、

$$e^0 = 1, e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) $z^6 - 1 = 0$ の左辺は

$$z^6 - 1 = (z^3+1)(z^3-1) = (z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1)$$

であるから (最初に 2 つの因数に分けた段階で、1 と -1 の 3 乗根になることが分かる)[1]

$$z = -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

(-1 の 6 乗根) (i) $z^6 = -1 = 1e^{i\pi}$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, e^{i\frac{7\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

(ii) $z^6 + 1 = 0$ の左辺は[2]

$$\begin{aligned} z^6 + 1 &= (z^2+1)(z^4-z^2+1) = (z^2+1)(z^4+2z^2+1-3z^2) \\ &= (z^2+1)\left[(z^2+1)^2 - \left(\sqrt{3}z\right)^2\right] = (z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1) \end{aligned}$$

であるから、3 つの 2 次方程式を解いて

$$z = \pm i, \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}.$$

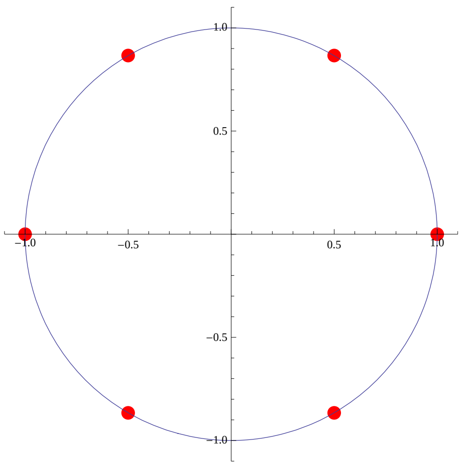

図 1: $z^6 = 1$ の解

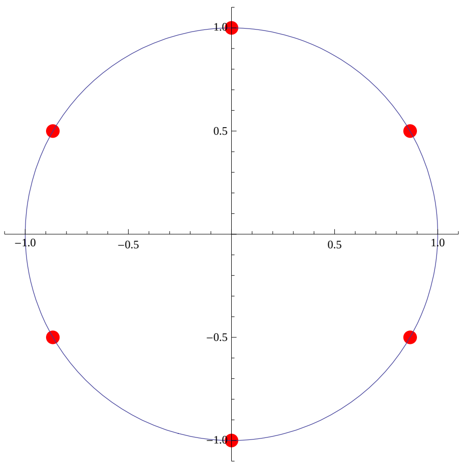

図 2: $z^6 = -1$ の解

---

[1]あるいは $z^6 - 1 = (z^2-1)(z^4+z^2+1)$ から始めても良い。$z^4+z^2+1 = 0$ を $z^2 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ と解くと面倒になるが、複素数の平方根の計算の仕方は説明してあるので出来ないといけない。$z^4+z^2+1 = z^4+2z^2+1-z^2 = \left(z^2+1\right)^2 - z^2 = \left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)$ としても出来る。

[2]最初に $z^6+1 = (z^3+i)(z^3-i)$ としてしまうと、代数的に解くのは少し面倒かもしれない。$(-i)^3 = i$ なので、$z^3+i = (z-i)(z^2+iz-1)$ のように因数分解出来るけれど、気づきにくいよね。

(2) (a)

$$f(x+yi) = (x+yi)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

であるから

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

(b)

$$f(x+yi) = \frac{1}{(x+yi)^2+1} = \frac{1}{x^2+2xyi+(yi)^2+1} = \frac{1}{x^2-y^2+1+2xyi} = \frac{x^2-y^2+1-2xyi}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$$

であるから

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi) = \frac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi) = \frac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}.$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x+yi) &= \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} \\ &= \frac{(e^{-y}+e^{y})}{2} \cos x - i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \sin x = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x. \end{aligned}$$

ゆえに

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi) = \cosh y \cos x, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi) = -\sinh y \sin x. \blacksquare$$