複合機スキャン用紙　宿題 2　(2018/10/8 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部　Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年　Class 組　Number 番	Date 日付	Year 年　Month 月　Day 日

問 2　(1) $\theta = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}$ のときの $e^{i\theta}$ の値を求めよ。(2) $\cos 4\varphi$ と $\sin 3\varphi$ を $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ で表せ(多項式の形で書け)。答えは一通りではないが、どれか一つ書けばよい。(3) $z = -3 - 3i$ のとき、z の極形式と $\mathrm{Arg}\, z$ の値を求めよ。(4) $z = ae^{i\theta}$, $a > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ とするとき、$\overline{z}$ と $\dfrac{1}{z}$ の極形式を求めよ。条件 $a > 0$ の代わりに $a < 0$ とした場合はどうなるか。

問２解説

(1) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ であるから、各 θ に対して $\cos\theta, \sin\theta$ を求めよ、という問題である。

$$e^{i\cdot 0}=1,\quad e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\quad e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i,\quad e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

(2) 一般に $(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ であるから

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi &= \mathrm{Re}\left[(\cos\varphi+i\sin\varphi)^4\right]\\ &= \mathrm{Re}\left[\cos^4\varphi+4\cos^3\varphi\cdot i\sin\varphi+6\cos^2\varphi\cdot i^2\sin^2\varphi+4\cos\varphi\cdot i^3\sin^3\varphi+i^4\sin^4\varphi\right]\\ &= \cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi.\end{aligned}$$

同様にして

$$\sin 3\varphi=\mathrm{Im}\left[(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3\right]=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi.$$

注: 答えは一通りではない。例えば $\sin 3\varphi=2\sin\varphi-4\sin^3\varphi$ とか。どれか正しい結果を書けば良い。

(3) 要点は

複素数 z に対して、$z=$ 正の数 $\times e^{i\,\text{実数}}$ の形に表したものが、z の極形式である。

$z=-3-3i$ のとき、$|z|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}.$

$$z=3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $-\pi<\theta\le\pi$ を満たす θ は、$\theta=-\dfrac{3\pi}{4}$ である。ゆえに z の極形式は

$$z=3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\quad (z=3\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}\text{ でも良い}).$$

偏角の主値は

$$\mathrm{Arg}\,z=-\frac{3\pi}{4}\quad (\text{これは唯一の解}).$$

(4) $z=ae^{i\theta}$ のとき

$$\overline{z}=\overline{a}\overline{e^{i\theta}}=ae^{-i\theta}.$$

$a>0$, $-\theta\in\mathbb{R}$ であるから、$\overline{z}=ae^{-i\theta}$ は $\overline{z}$ の極形式である。

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{ae^{i\theta}}=\frac{1}{a}e^{-i\theta}.$$

$\dfrac{1}{a}>0$, $-\theta\in\mathbb{R}$ であるから、$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}e^{-i\theta}$ は $\dfrac{1}{z}$ の極形式である。

$a<0$ の場合は、$-1=e^{i\pi}$ に注意して、

$$\overline{z}=ae^{-i\theta}=(-a)e^{i\pi}e^{-i\theta}=(-a)e^{i(\pi-\theta)}.$$

$-a>0$, $\pi-\theta\in\mathbb{R}$ であるから、$\overline{z}=(-a)e^{i(\pi-\theta)}$ は $\overline{z}$ の極形式である。

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{ae^{i\theta}}=-\frac{1}{a}e^{i(\pi-\theta)}.$$

$-\dfrac{1}{a}>0$, $\pi-\theta\in\mathbb{R}$ であるから、$\dfrac{1}{z}=-\frac{1}{a}e^{i(\pi-\theta)}$ は $\dfrac{1}{z}$ の極形式である。 ■