問 14　(提出の必要なし。解答は WWW に掲載。)

問 14　以下の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin\pi x}{x^2+4}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}$

問 14 解答　(1) $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ とおく。被積分関数は偶関数だから $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. $P(z) := (z^2+1)^3$, $Q(z) := 1$, $f(z) := \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、$P(z), Q(z)$ は z の多項式で (板書では $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$)、$\deg P(z) = 6 \geq 2 = \deg Q(z) + 2$. また $x \in \mathbb{R}$ ならば $P(x) \geq (0+1)^3 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. 授業で説明した定理によって、

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c) = \pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$P(z) = (z+i)^3(z-i)^3$ であるから、P の零点は i, $-i$ であり、その位数はともに 3. $Q(\pm i) = 1 \neq 0$ であるから、i と $-i$ は f の 3 位の極である。このうち虚部が正であるのは i のみ。

$$\begin{aligned} I &= \pi i \operatorname{Res}(f;i) = \pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-i)^3 f(z)\right] = \frac{\pi i}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' \\ &= \frac{\pi i}{2}\lim_{z\to i}\frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5} = \frac{\pi i}{2}\cdot\frac{3\cdot 4}{2^5 i^5} = \frac{\pi\cdot 3\cdot 4}{2^6} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

(2) 求める積分を I とおく。$\sin\pi x = \operatorname{Im}(e^{i\pi x})$ であるから、

$$I = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+4}\,dx.$$

$P(z) := z^2+4$, $Q(z) := z$, $f(z) := \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、$P(z), Q(z)$ は z の多項式で、$\deg P(z) = 2 \geq 2 = \deg Q(z) + 1$. また $x \in \mathbb{R}$ ならば $P(x) \geq 0 + 4 = 4$ であるから $P(x) \neq 0$. さらに $\pi > 0$. ゆえに授業で説明した定理が適用できて

$$I = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}; c\right)\right).$$

$q(z) := ze^{i\pi z}$ とおくと、q は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。$P(z) = (z+2i)(z-2i)$ であるから、P の零点は $\pm 2i$ で、(さすがに明らかに) 位数はともに 1. ゆえに $\pm 2i$ は $\dfrac{q(z)}{P(z)} = f(z)e^{i\pi z}$ の高々 1 位の極で、そのうち虚部が正であるのは $2i$.

$$\operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}; 2i\right) = \frac{q(2i)}{P'(2i)} = \frac{2ie^{i\pi\cdot 2i}}{2\cdot 2i} = \frac{e^{-2\pi}}{2}.$$

ゆえに

$$I = \operatorname{Im}\left(2\pi i\cdot\frac{e^{-2\pi}}{2}\right) = \operatorname{Im}\left(i\pi e^{-2\pi}\right) = \pi e^{-2\pi}.$$

(3) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、これは $|z| = 1$ のパラメーター表示であり、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

また $dz = ie^{i\theta}d\theta$ より、$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$. ゆえに ($\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ に注意して)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz}dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2iz+i(z^2+1)/2+(z^2-1)/2} \\ &= 2\int_{|z|=1} \frac{dz}{(i+1)z^2+4iz+(i-1)} = (1-i)\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2(1+i)z+i}.\end{aligned}$$

$z^2+2(1+i)z+i=0$ の根は

$$\begin{aligned} z &= -(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2-i} = -(1+i) \pm \sqrt{i} = -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ &= -1-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), -1+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

前者を α, 後者を β とすると、このうち $|z|<1$ にあるのは β.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2(1+i)z+i};\beta\right) = \lim_{z\to\beta}\left((z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right) = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta} = (1-i)\cdot 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)} = \sqrt{2}\pi. \blacksquare$$