複合機スキャン用紙　宿題 13　(2019/1/21 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student's ID 学生番号 | | | | | | | | | | Name 氏名 | |
| Department 所属 | Faculty 学部 | | Department 学科 | | | Subject/Teacher 科目/教員名 | / | | | | |
| Class 年・組・番号 | Grade 年 | | Class 組 | | Number 番 | Date 日付 | Year 年 | | Month 月 | | Day 日 |

**問 13**　(1) $f(z)=\dfrac{z-4}{(z-1)(z-2)^3}$ のとき、$\mathrm{Res}(f;1)$, $\mathrm{Res}(f;2)$, $\mathrm{Res}(f;3)$ を求めよ。

(2) 次の関数の極とその位数、その点における留数を求めよ。(a) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$　(b) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$

**問 13 解説**　定理 A,B は授業で説明した。それからすぐに定理 C が出る。この形で覚えておくと便利かも。学生は、定理 D,E,F のようなのを覚えるのは問題ない、と期待している。

- 定理 A 「$c$ が $f$ の $k$ 位の極 $\Leftrightarrow$ $c$ のある近傍 $U$ と、$U$ で正則な $g$ が存在して、$f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z\in U\setminus\{c\})$, $g(c)\neq 0$ が成り立つ。」
- 定理 B 「$c$ が $f$ の $k$ 位の零点 $\Leftrightarrow$ $c$ のある近傍 $U$ と、$U$ で正則な $g$ が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$, $g(c)\neq 0$ が成り立つ。」
- 定理 C「$P$ と $Q$ が $c$ のある近傍 $U$ で正則であり、$c$ が $P$ の $k$ 位の零点で、$Q(c)\neq 0$ であれば、$c$ は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の $k$ 位の極である。」
  条件 $Q(c)\neq 0$ を省くと、結論は「$c$ は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の**高々**$k$ 位の極である。」となる。
- 定理 D 「$c$ が $f$ の高々$k$ 位の極ならば $\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$.」
- 定理 E 「$P$ と $Q$ が $c$ のある近傍で正則で、$c$ が $P$ の 1 位の零点ならば、($c$ は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の高々1 位の極であり) $\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{Q(c)}{P'(c)}$.」
- 定理 F 「$c$ が $\varphi$ の 1 位の極、$\psi$ が $c$ のある近傍で正則ならば、$c$ は $f:=\varphi\psi$ の高々1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;c)=\mathrm{Res}(\varphi;c)\psi(c)$.」

(1) (せっかく新作を作ったのに、間違えて昨年度と同じ問題を出してしまった…)

1 は $f$ の 1 位の極である (実際、$g(z):=\dfrac{z-4}{(z-2)^3}$ は $U:=D(1;1)$ で正則で、$g(1)\neq 0$, $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-1}$ $(z\in U\setminus\{1\})$ であるから、定理 A が適用して…)。定理 D を用いて

$$\mathrm{Res}(f;1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-4}{(z-2)^3}=\left.\frac{z-4}{(z-2)^3}\right|_{z=1}=\frac{-3}{(-1)^3}=3.$$

2 は $f$ の 3 位の極である (実際、$g(z) := \dfrac{z-4}{z-1}$ は $U := D(2;1)$ で正則で、$g(2) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-2)^3}$ $(z \in U \setminus \{2\})$ であるから定理 A を適用して⋯)。定理 D を用いて

$$\operatorname{Res}(f;2) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(3-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-2)^3 f(z)\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left(\frac{z-4}{z-1}\right)''.$$

2 階導関数は素朴に計算しても良いが、少し工夫してみる。

$$\frac{z-4}{z-1} = \frac{z-1-3}{z-1} = 1-\frac{3}{z-1} = 1-3(z-1)^{-1} \quad より \quad \left(\frac{z-4}{z-1}\right)'' = (-3)\cdot(-1)(-2)(z-1)^{-3} = \frac{-6}{(z-1)^3}.$$

ゆえに

$$\operatorname{Res}(f;2) = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{-6}{(z-1)^3}\right|_{z=2} = -3.$$

$f$ は 3 の近傍 $D(3;1)$ で正則であるから、$\operatorname{Res}(f;3) = 0$.

(2) (a) $f$ の分母の $z^3$、分子の $\cos z$ ともに $\mathbb{C}$ で正則である。分母 $=0 \Leftrightarrow z=0$ であるから、$f$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則である。

$c=0$, $k=3$, $U=\mathbb{C}$, $g(z)=\cos z$ として定理 A の仮定が成り立つので、0 は $f$ の 3 位の極である。

$$\operatorname{Res}(f;0) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-0)^3 f(z)\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(\cos z)'' = \frac{1}{2}\left.(-\cos z)\right|_{z=0} = -\frac{1}{2}.$$

(別解) $f(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots}{z^3} = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{24}z - \cdots$ であるから $\operatorname{Res}(f;0) = -\dfrac{1}{2}$.

(b) $f$ の分母 $\cos z$、分子 1 は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。分母 $=0 \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z=(n-1/2)\pi$. $c_n := (n-1/2)\pi$ とおく。$p(z) := \cos z$, $q(z)=1$ とするとき、

$$p'(z) = -\sin z, \quad p(c_n) = 0, \quad p'(c_n) = -\sin(n-1/2)\pi = (-1)^n \neq 0.$$

ゆえに $c_n$ は分母 $p$ の 1 位の零点である。また $q(c_n)\neq 0$. ゆえに $c_n$ は $f$ の 1 位の極である。定理 E が適用できるので

$$\operatorname{Res}(f;c_n) = \frac{q(c_n)}{p'(c_n)} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n.\blacksquare$$