複合機スキャン用紙　宿題 12　(2019/1/7 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組　Number 番	Date 日付	Year 年　Month 月　Day 日

問 12　$f(z) = \dfrac{6z^3+18z^2-46z+37}{z^3+2z^2-7z+4}$ について、以下の問に答えよ ($f(z)$ の部分分数分解の結果は、Mathematica で `Apart[(6z^3+18z^2-46z+37) /(z^3+2z^2-7z+4)]` として験算することを勧める)。

(1) 1 のまわりの Laurent 展開とその収束範囲 (どの円環領域で収束するか？)、主部、留数

(2) 円環領域 $A(1;5,+\infty)$ における Laurent 展開

(3) f の極を全て求め、その位数を答えよ (もちろん全て Laurent 展開を求めれば分かるが、サボることも可能である)。

問 12 解説　まず $f(z)$ の部分分数分解を求めよう。分子 $6z^3+18z^2-46z+37$ を分母 z^3+2z^2-7z+4 で割ると、商が 6, 余りが $6z^2-4z+13$ であるから

$$f(z)=6+\frac{6z^2-4z+13}{z^3+2z^2-7z+4}.$$

分母は $(z-1)^2(z+4)$ と因数分解できるので

$$\frac{6z^2-4z+13}{z^3+2z^2-7z+4}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z+4}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払って

$$6z^2-4z+13=A(z-1)(z+4)+B(z+4)+C(z-1)^2.$$

$z=1$ を代入して $15=5B$. ゆえに $B=3$. $z=-4$ を代入して $125=25C$. ゆえに $C=5$. z^2 の係数を比較して $6=A+C$. ゆえに $A=6-C=1$.

ゆえに

$$f(z)=6+\frac{1}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{5}{z+4}.$$

(1) 等比級数の和の公式から

$$\frac{5}{z+4}=\frac{5}{(z-1)+5}=\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n(z-1)^n.$$

ただし、収束 $\Leftrightarrow \left|-\frac{z-1}{5}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<5$.

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+7+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n(z-1)^n \quad (0<|z-1|<5).$$

主部は $\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{3}{(z-1)^2}$, 留数は 1.

(2) 等比級数の和の公式から

$$\frac{5}{z+4}=\frac{5}{(z-1)+5}=\frac{5}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5}{z-1}}=\frac{5}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{z-1}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{(z-1)^n}.$$

ただし、収束 $\Leftrightarrow \left|-\dfrac{5}{z-1}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|>5$. ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+6-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{(z-1)^n} \quad (5<|z-1|).$$

これが $A(1;5,+\infty)$ における Laurent 展開である。

(3) f は $\mathbb{C}\setminus\{1,-4\}$ で正則である。

f の 1 のまわりの Laurent 展開は (1) で求めてある。その結果から、1 は f の 2 位の極である。

一方、-4 は f の 1 位の極である。実際

$$f(z)=6+\frac{1}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{5}{z+4}$$

であり、右辺の第 1,2,3 項の和が $D(-4;5)$ で正則であるから

$$(\exists \{a_n\}_{n\ge 0})\quad 6+\frac{1}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+4)^n\quad (z\in D(-4;5)).$$

ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+4)^n+\frac{5}{z+4}\quad (z\in A(-4;0,5)).$$

これは f の -4 の周りの Laurent 展開である。これから -4 は 1 位の極であることが分かる。■

(2019/1/25 加筆) 1/22 の講義で「P と Q が c のある近傍 U で正則であり、c が P の k 位の零点で、$Q(c)\neq 0$ であれば、c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の k 位の極である。」という定理を紹介した。-4 が f の分母 $z^3+2z^2-7z+4=(z-1)^2(z+4)$ の 1 位の零点で、分子 $6z^3+18z^2-46z+37$ の零点でないことを確かめると、この定理から -4 が f の 1 位の極であることが分かる。■