



・ 学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。  
 ・ 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score  
採点結果

--	--	--

Student's ID 学生番号										Name 氏名		
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科			Subject/Teacher 科目/教員名			/				
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日					

問 11 円盤における Cauchy の積分公式  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$  (仮定はここには書かない) を用いて、以下の線積分の値を求めよ。定理をどのように適用するか ( $f$  は何か) 説明すること。

(1)  $\int_{|z+4|=2} \frac{dz}{z(z+3)}$     (2)  $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z(z+3)}$

**問 11 解説** どちらの積分も被積分関数は  $\mathbb{C} \setminus \{0, -3\}$  で正則である。

(1)  $0, -3$  のうち円  $|z+4|=3$  の内部  $D = D(-4; 3)$  に属しているのは  $-3$  のみ。そこで  $f(z) := \frac{1}{z}$ ,  $\Omega := D(-4; 4)$  とおくと、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則で、 $\bar{D} \subset \Omega$ . Cauchy の積分公式から

$$\int_{|z+4|=3} \frac{dz}{z(z+3)} = \int_{|z+4|=3} \frac{f(z)}{z+3} dz = 2\pi i f(-3) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{2}{3}\pi i.$$

(2)  $0, -3$  のうち円  $|z-1|=2$  の内部  $D = D(1; 2)$  に属しているのは  $0$  のみ。そこで  $f(z) := \frac{1}{z+3}$ ,  $\Omega := D(1; 4)$  とおくと、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則で、 $\bar{D} \subset \Omega$ . Cauchy の積分公式から

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z(z+3)} = \int_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi i. \blacksquare$$

(2019/1/25 加筆) 留数定理を用いると

$$\int_{|z+4|=3} \frac{dz}{z+3} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z(z+3)}; -3 \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -3} (z+3) \cdot \frac{1}{z(z+3)} = \frac{2\pi i}{-3} = -\frac{2\pi i}{3}.$$

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z+3} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z(z+3)}; 0 \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \cdot \frac{1}{z(z+3)} = \frac{2\pi i}{3} = \frac{2\pi i}{3}.$$