複合機スキャン用紙　宿題 10　(2018/12/4 11:20 までに提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科						Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番					Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日	

問 10　以下の問に答えよ。領域はなるべく式で表すこと (それが出来ない場合は図で示すこと)。「◯◯であること」、「□□でないこと」に根拠を書くように努力すること。授業で紹介された例を書いて構わないが、自分で例を見つけられると良い。

(1) 凸である領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例をあげよ。

(2) 凸でないが星型である領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例をあげよ。

(3) 星型でないが単連結である領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例をあげよ。

(4) 単連結でない領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例をあげよ。

問 10 解説　空集合でない限り「凸 $\Rightarrow$ 星型 $\Rightarrow$ 単連結」であり、逆は真でないことは注意する。だから (2) で凸でないが星型, (3) で星型でないが単連結、と言ってある。

(1)

- $\Omega := \mathbb{C}$
  $a, b \in \Omega$, $t \in [0,1]$ とするとき、$(1-t)a + tb \in \mathbb{C} = \Omega$ であるから、Ω は凸である。
- $\Omega := D(c; r)$ (ただし $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$)
  $a, b \in D(c; r)$ とすると、$|a-c| < r$ かつ $|b-c| < r$. このとき、任意の $t \in [0,1]$ に対して、$c = (1-t)c + tc$ であるから、

$$\begin{aligned}|[(1-t)a + tb] - c| &= |(1-t)(a-c) + t(b-c)| \leq |(1-t)(a-c)| + |t(b-c)| \\ &= |1-t|\,|a-c| + |t|\,|b-c| = (1-t)\,|a-c| + t\,|b-c| \\ &< (1-t)r + tr = r.\end{aligned}$$

  ゆえに $(1-t)a + tb \in D(c; r)$. ゆえに Ω は凸である。
- $\Omega :=$ 三角形の内部. (式で書くと例えば $\{p + ta + sb \mid t > 0,\ s > 0,\ t + s < 1\}$ とか)

(2)

- 平面から半直線を除いたもの。具体的に例えば負の実軸を除いた $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
  $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とする。
  - (凸でないこと) $a = -1 + i$, $b = -1 - i$ とすると、$a, b \in \Omega$ であるが、$[a, b] \not\subset \Omega$ である。実際、$-1 = \frac{1}{2}(a + b) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \in [a, b]$, $-1 \notin \Omega$.
  - (星型であること) $a = 1$ とすると、$a \in \Omega$ であり、任意の $z \in \Omega$, $t \in (0,1]$ に対して、$(1-t)a + tz \in \Omega$ が成り立つ。実際、$z \in \Omega$ であれば、(i) $\operatorname{Im} z > 0$, (ii) $\operatorname{Im} z < 0$, (iii) $z > 0$ のいずれかが成り立つが、それぞれの場合に、(i) $\operatorname{Im}((1-t)a + tz) > 0$, (ii) $\operatorname{Im}((1-t)a + tz) < 0$, (iii) $(1-t)a + tz > 0$ が成り立つ。
- 星の形 (☆の内部)
  これは式で書くの大変そう。簡単なやり方を僕は知りません。

(3)

- $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{x + x^2 i \mid x \geq 0\}$ (複素平面から放物線の半分を除いたもの).
  - 星型でないこと
  - 単連結であること
    平面から半直線を除いた領域は単連結であり、Ω はそれを連続的に変形したものであるから単連結である。
- 凹の字の囲む領域。

$$\begin{aligned}\Omega :&= (-1,1) \times (-1,1) \setminus [-1/2, 1/2] \times [0, \infty) \\ &= \{x + yi \mid -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\} \setminus \{x + yi \mid -1/2 \leq x \leq 1/2,\ y \geq 0\}\end{aligned}$$

(4) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
単連結の定義を式で書いていないので…とりあえず証明を書いておく。

Ω が単連結と仮定して矛盾を導く。単連結領域における Cauchy の積分定理を認めると、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C と、Ω で正則な関数 f に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ となるはずである。ところが、$C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ は Ω 内の区分的 C^1 級閉曲線, $f(z) = \frac{1}{z}$ は Ω で正則な関数であるが、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$. 矛盾が生じるので、$\Omega$ は単連結ではない。