

2018 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2019 年 1 月 30 日 (水曜) 9:30~11:30 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

問 7 は必ず解答せよ。それ以外の問から 5 つを選択して (全部で 6 つの問に) 解答せよ。各問の解答の順番は自由である (ただし 1 つの問の解答は一箇所にまとめて書くこと)。

問 1. $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$ に対し、 $\frac{1}{z}$, z の極形式, z^6 , z の平方根, $\text{Log } z$ を求めよ (極形式以外は $a + bi$ あるいは a あるいは bi ($a, b \in \mathbb{R}$), いずれかの形に表せ)。結果のみで良い。

問 2. (1) $f(z) = \sin z$ ($z \in \mathbb{C}$) とするとき以下の問に答えよ。(a) $f(x + yi)$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の実部・虚部 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を求め、それらを偏微分して Cauchy-Riemann 方程式が成り立つことを確かめよ。(2) $g(z) = (\bar{z})^2$ ($z \in \mathbb{C}$) で定義される関数 g は正則でないことを示せ。

問 3. (1) 冪級数 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ の収束半径と和を求めよ。(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z-1}{2}\right)^{3n}$ を変数 z についての冪級数とみなしたときの収束半径を求めよ。

問 4. 複素数の範囲で以下の方程式を解け。(1) $z^8 + 1 = 0$ (2) $\sin z = i$

問 5. 関数 $f(z) := \frac{z^2 + 1}{(z+1)(2z-1)}$ について、以下のものを求めよ。

(1) 0 のまわりの Taylor 展開 (2) $1/2 < |z| < 1$ における Laurent 展開 (3) $1 < |z| < +\infty$ における Laurent 展開

問 6. $f(z) = z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) f の極とその位数を求めよ。(2) $\int_{|z|=\frac{5}{2}} z^2 f(z) dz$ を求めよ。

問 7. 次の定積分の値を求めよ。(1) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$ (2) $J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx$

問 8. 以下の (a)~(e) から 1 つの命題を選んで証明せよ。

(a) \mathbb{C} の領域で定義された正則関数 f の絶対値 $|f|$ が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。

(b) Weierstrass の M-test (定理をきちんと書くこと)

(c) 複素関数 P と Q が点 c を含むある開集合 Ω で正則であり、 c が P の k 位の零点であるとき、 c は $f := \frac{Q}{P}$ の高々 k 位の極である。

(d) c が複素関数 f の高々 k 位の極であるとき、 $\text{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [(z-c)^k f(z)]$.

(e) $P(z)$ と $Q(z)$ が z の複素係数多項式で、 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ を

満たすならば、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{c \text{ は } f \text{ の極} \\ \text{Im } c > 0}} \text{Res}(f; c)$.

詳しい解答を書く余裕がなく、ほとんど結果のみに近いです。すみません。

問 1

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \quad z = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z^6 = 216i,$$

$$z \text{ の平方根} = \pm 3^{1/4} \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}}{2}i \right)$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}}i \right),$$

$$\text{Log } z = \frac{1}{2} \log 6 - \frac{\pi}{4}i.$$

問 2

(1)

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \quad v(x, y) = \cos x \sinh y.$$

これから

$$u_x = \cos x \cosh y, \quad u_y = \sin x \sinh y, \quad v_x = -\sin x \sinh y, \quad v_y = \cos x \cosh y$$

であるから確かに $u_x = v_y, u_y = -v_x$ が成り立っている。

(2) $f(z) = (\bar{z})^2$ であるから

$$f(x + yi) = (x - yi)^2 = x^2 - 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

ゆえに f の実部・虚部はそれぞれ

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = -2xy.$$

ゆえに

$$u_x = 2x, \quad u_y = -2y, \quad v_x = -2y, \quad v_y = -2x.$$

$(x, y) = (0, 0)$ 以外では、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ を満たさない。ゆえに f は正則関数ではない。■

問 3

(1) 収束半径は 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

(2) $\zeta = \left(\frac{z-1}{2}\right)^3$ とおくと、 $|\zeta| < 1$ ならば収束、 $|\zeta| > 1$ ならば発散する。

$$|\zeta| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2.$$

$$|\zeta| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2.$$

ゆえに $|z-1| < 2$ ならば収束、 $|z-1| > 2$ ならば発散。したがって収束半径は 2. ■

問 4

- (1) -1 の 8 乗根、つまり $z^8 = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ の解は、(a) 指数形式を利用すると、 $e^{i(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{8})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{8}}$ ($k = 0, 1, \dots, 7$) であるから、

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}, e^{i\frac{9\pi}{8}}, e^{i\frac{11\pi}{8}}, e^{i\frac{13\pi}{8}}, e^{i\frac{15\pi}{8}}.$$

これらは、以下に示すように $\sqrt{\quad}$ を使って具体的に書けるけれど、少し面倒である。

- (b) 代数的に解くのもあまり簡単ではないが、8 乗根は、4 乗根の平方根であることを用いると少し見通しが良い。 $X = z^2$ とおくと、

$$z^8 + 1 = X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

であるから、

$$z^2 = X = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$ の解は、 $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を解いて、次のように求まる。

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$ の解は、その共役複素数であるので、

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$ の解は、 $x^2 - y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を解いて、次のように求める。

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$ の解は、その共役複素数であるので、

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}i}{2}.$$

ゆえに -1 の 8 乗根は

$$z = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}i}{2}.$$

- (2) $\sin z = i \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = -2 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = -1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow e^{iz} = -1 \pm \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)e^{i0}, (\sqrt{2} + 1)e^{i\pi} \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) iz = \log(\sqrt{2} - 1) + i \cdot 2n\pi, \log(\sqrt{2} + 1) + i(2n + 1)\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = 2n\pi - i \log(\sqrt{2} - 1), (2n + 1)\pi - i \log(\sqrt{2} + 1). \blacksquare$

問 5

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(2z - 1)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z + 1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2z - 1}.$$

- (1)

$$\frac{1}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1),$$

$$\frac{1}{2z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1/2),$$

であるから $|z| < 1/2$ で

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \frac{5}{6} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} (-1)^n - \frac{5}{6} \cdot 2^n \right) z^n = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} - 5 \cdot 2^{n-1}}{3} z^n \end{aligned}$$

(2) $|z| > 1/2$ で

$$\frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{z^n}$$

であるから $1/2 < |z| < \infty$ で

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{z^n} = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{z^n}.$$

(3) $|z| > 1$ の時

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

であるから、 $|z| > 1$ の時

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{z^n} + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} (-1)^n + \frac{5}{6} \cdot 2^{-n} \right) \frac{1}{z^n}.$$

問 6

(1) $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ が極で、すべて位数は 1.

(2)

$$\text{Res}(z^2 f(z); 0) = 0, \quad \text{Res}(z^2 f(z); \pm 1) = \frac{\pm 1}{\pi}, \quad \text{Res}(z^2 f(z); \pm 2) = \frac{\pm 8}{\pi},$$

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} z^2 f(z) dz = 0. \blacksquare$$

問 7

(1)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)} = \frac{\pi}{2} \\ \text{Res}(f; i) &= -\frac{i}{4}, \quad \text{Res}\left(f; \frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}\right) = \mp \frac{1}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

であるから

$$I = 2\pi i \left(\text{Res}(f; i) + \text{Res}\left(f; \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \text{Res}\left(f; \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \right) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{7\pi}{16e}. \\ J &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3}; i\right) \right) = \frac{1}{2} \text{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{-7i}{16e} \right) = \frac{7\pi}{16e}. \blacksquare \end{aligned}$$