# 2017 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2018 年 1 月 29 日 (月) 9:30〜11:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の 8 問から 6 問を選択して解答せよ。各問の解答の順番は自由である。

**問 1.** $z = i - \sqrt{3}$ に対し、$\dfrac{1}{z}$, $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, $z$ の極形式, $z^{10}$, $z$ の平方根, $\operatorname{Log} z$ を求めよ (答のみ可)。

**問 2.** $f(z) = \cosh z$ とするとき以下の問に答えよ。(1) $f(x+iy)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の実部・虚部 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を求め、微分して Cauchy-Riemman 方程式を確かめよ。(2) 方程式 $f(z) = 0$ を解け。

**問 3.** 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(z-3)^n$ について以下のものを求めよ。

(1) 収束円　(2) 原始関数 ($\sum$ を使わずに表せ)　(3) 冪級数の和

**問 4.** $f(z) = \dfrac{4z^3 - 20z^2 + 31z - 17}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$ について、1 の周りの Laurent 展開, 1 における留数 $\operatorname{Res}(f; 1)$, $A(1; 1, +\infty)$ における Laurent 展開を求めよ。　($f(z)$ の分母が $z^3 - 4z^2 + 5z^2$ と誤植してあった。)

**問 5.** $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n := \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\,dz$ とおく。$A_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ の値を求めよ。

**問 6.** (1) $0 < R_1 < R_2$, $f\colon A(0; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ が正則かつ偶関数 (定義域で $f(-z) = f(z)$ を満たす) ならば、$\displaystyle\int_{|z|=r} f(z)\,dz = 0$ $(R_1 < r < R_2)$ が成り立つことを証明せよ。(2) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\tan z}{z^3}; 0\right)$ を求めよ。

**問 7.** 次の定積分の値を求めよ。　(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$

**問 8.** 以下から 1 つ以上 2 つまでを選んで証明せよ。

(a) 正則な関数 $f$ の実部 $u$、虚部 $v$ は Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(b) 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が 2 条件

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \le b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。

を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(c) $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f\colon D(c; R) \to \mathbb{C}$ が正則であり、$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ であるならば、$D(c; R)$ で正則な関数 $g$ が存在して、$f(z) = (z-c)^k g(z)$ $(z \in D(c; R))$ が成り立つ。

(d) $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $f$ は $c$ を $k$ 位の極とするとき、$\operatorname{Res}(f; c) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to c} \left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z)\right]$.

(e) 加法定理 $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ (sin, cos は複素関数とする).

(f) 複素係数多項式 $P(z), Q(z)$ が $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$ を満たすならば $\displaystyle\sum_{c\,\text{は}\,P\,\text{の零点}} \operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P}; c\right) = 0.$

今年度は (最後に時間が足りなくなったこともあり) 易しめにしたつもりですが、そういうことをすると「傾向が変わった」とか言われたりするのかなあ…ほぼ全員試験時間の最後まで粘ってくれたのは良かったです。

**問 1 解説**　答は順に

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4},\quad -\sqrt{3}-i,\quad 2,\quad \frac{5}{6}\pi,\quad 2e^{\frac{5}{6}\pi i},\quad 512+512\sqrt{3}i,\quad \pm\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right),\quad \log 2+\frac{5}{6}\pi i.$$

$z=-\sqrt{3}+i$ であるから、

$$\frac{1}{z}=\frac{-\sqrt{3}-i}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}=\frac{-\sqrt{3}-i}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4}.$$

$$\overline{z}=-\sqrt{3}-i,\quad |z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2,\quad \operatorname{Arg} z=\frac{5}{6}\pi.$$

極形式は

$$z=|z|\,e^{i\operatorname{Arg} z}=2e^{\frac{5}{6}\pi i}.$$

$$z^{10}=2^{10}e^{10\cdot\frac{5}{6}\pi i}=1024e^{\frac{25}{3}\pi i}=1024e^{\frac{\pi i}{3}}=1024\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=512+512\sqrt{3}i.$$

$(x+yi)^2=z$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とおくと、$x^2-y^2=-\sqrt{3}$, $2xy=1$. これを解いて

$$(x,y)=\pm\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

ゆえに

$$z\text{の平方根}=\pm\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right).$$

$$\operatorname{Log} z=\log|z|+i\operatorname{Arg} z=\log 2+\frac{5}{6}\pi i.\blacksquare$$

**コメント**　極形式は三角関数を使わずなるべく指数関数を使って書こうといったけれど、そうしない人が多い (減点はしないけれど)。Arg, Log は (先頭が大文字なのだから) 主値です。

**問 2 解説**

(1) $f(z)=\cosh z=(e^z+e^{-z})/2$ であるから、

$$\begin{aligned}f(x+iy)&=\frac{e^{x+iy}+e^{-(x+iy)}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{x+iy}+e^{-x+i(-y)}\right)=\frac{1}{2}\left[e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right]\\&=\frac{1}{2}\left((e^x+e^{-x})\cos y+i(e^x-e^{-x})\sin y\right)=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y.\end{aligned}$$

ゆえに

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)=\cosh x\cos y,\quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)=\sinh x\sin y.$$

これから

$$u_x=\sinh x\cos y,\quad u_y=-\cosh x\sin y,\quad v_x=\cosh x\sin y,\quad v_y=\sinh x\cos y$$

であるから、確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned} f(z)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^z+e^{-z}}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2z}+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2z}=-1=1\cdot e^{\pi i} \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists n\in\mathbb{Z}) \quad 2z=\log 1+i\,(\pi+2n\pi) \quad (n\in\mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists n\in\mathbb{Z}) \quad z=i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

ゆえに $z=(n+1/2)\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$. ■

**問 3 解説**

(1) $a_n := \dfrac{n+1}{2^n}$ とおくとき、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})} = 2.$$

ゆえに収束半径は 2. 収束円は $D(3;2)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-3|<2\}$.

(2) 項別積分すれば原始関数 $F$ の冪級数展開が得られる。

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}\frac{(z-3)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n-1}}.$$

これは等比級数であるから、和は

$$F(z)=(z-3)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-3}{2}}=\frac{2(z-3)}{5-z}.$$

(原始関数は一意的でないので、定数だけの差があっても良い。例えば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n-1}}=\frac{-4}{z-5}$ も原始関数である。)

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(z-3)^n=F'(z)=\frac{4}{(z-5)^2}. \blacksquare$$

(これはミスしていたのを指摘されて訂正しました。ありがとう。)

**コメント**　素直に項別積分すれば間違えないと思うのだけれど、そうしない人が多く、そういう人は計算をミスしがちだった。

**問 4 解説**　部分分数分解すると

$$(\star) \qquad f(z)=\frac{4z^3-20z^2+31z-17}{z^3-4z^2+5z-2}=4-\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{3}{z-2}.$$

この右辺第 4 項は

$$-\frac{3}{z-2}=-\frac{3}{(z-1)-1}=\frac{3}{1-(z-1)}=3\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z-1|<1).$$

ゆえに $f$ の 1 のまわりの Laurent 展開は

$$\begin{aligned} f(z) &= 4 - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \\ &= 7 + 3\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n + \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} \quad (0 < |z-1| < 1). \end{aligned}$$

また $\mathrm{Res}(f;1)$ は $(z-1)^{-1}$ の係数で

$$\mathrm{Res}(f;1) = -1.$$

一方、

$$\begin{aligned} -\frac{3}{z-2} &= -\frac{3}{(z-1)-1} = -\frac{3}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}} = -\frac{3}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n = -3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} \\ &= -3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z-1| > 1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(z) &= 4 - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} - 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} \\ &= 4 - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} - \frac{3}{(z-1)^2} - 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} \\ &= 4 - \frac{4}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} - 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} \quad (z \in A(1;1,+\infty)).\blacksquare \end{aligned}$$

**コメント**　なるべく同類項はまとめようと言ったのだけれど、そうしない人が多い (答えがチェックしにくい)。収束のチェックをしないのも減点。 ■

**問 5 解説**

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k \quad (z \in \mathbb{C}).$$

であるから、$e^z/z^n$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則であり、

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z^n} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{k-n} \\ &= \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{n!}z^0 + \frac{1}{(n+1)!}z + \cdots \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) \end{aligned}$$

であるから

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^n};0\right) = \frac{1}{(n-1)!}$$

留数定理から

$$A_n = \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}\,dz = 2\pi i\sum_{|c|<1}\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^n};c\right) = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^n};0\right) = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi i}{(n-1)!} = 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2\pi e i.\blacksquare$$

## 問 6 解説

(1) $z = re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、

$$\int_{|z|=r} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\left(\int_0^{\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta\right)$$

右辺カッコ内の第 2 項で、$\varphi := \theta - \pi$ とおくと、$\theta = \pi$ のとき $\varphi = 0$, $\theta = 2\pi$ のとき $\varphi = \pi$, $e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\pi)} = -e^{i\varphi}$, $d\theta = d\varphi$ であるから

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} f\left(-re^{i\varphi}\right)\left(-e^{i\varphi}\right)d\varphi = -\int_0^{\pi} f\left(-re^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}\,d\varphi.$$

$f$ は偶関数であるから $f(-re^{i\varphi}) = f(re^{i\varphi})$ が成り立つので、

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = -\int_0^{\pi} f\left(re^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}\,d\varphi.$$

ゆえに

$$\int_{|z|=r} f(z)\,dz = 0.$$

(2) $\tan z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ は $A(0;0,\pi)$ で正則であるから、$f(z) := \dfrac{\tan z}{z^3}$ とおくと、$f$ も $A(0;0,\pi)$ で正則であり、$f(-z) = \dfrac{\tan(-z)}{(-z)^2} = \dfrac{-\tan z}{-z^3} = \dfrac{\tan z}{z^3} = f(z)$ であるから、$f$ は偶関数である。ゆえに (1) から

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\tan z}{z^3}; 0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,dz = 0. \blacksquare$$

## 問 7 解説

(1) $f(z) := \dfrac{z^2}{z^4+3z^2+2}$, $P(z) := z^4+3z^2+2$, $Q(z) := z^2$ とおくと、$f = \dfrac{Q}{P}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $x \in \mathbb{R}$ のとき $P(x) = x^4+3x^2+2 \geq 2$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,c>0} \mathrm{Res}\,(f;c)\,.$$

$P(z) = (z^2+1)(z^2+2) = (z+i)(z-i)(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)$ であるから、$P$ の零点 $c$ は $c = \pm i, \pm\sqrt{2}i$ でいずれも位数は 1. このうち $\mathrm{Im}\,c > 0$ を満たすものは $c_1 := i$, $c_2 := \sqrt{2}i$.

$$\mathrm{Res}(f;c) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \frac{c^2}{4c^3+6c} = \frac{c}{4c^2+6}$$

であるから

$$\mathrm{Res}(f;c_1) = \frac{i}{4(-1)+6} = \frac{i}{2}, \quad \mathrm{Res}(f;c_2) = \frac{\sqrt{2}i}{4(-2)+6} = -\frac{\sqrt{2}i}{2}.$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f;i) + \mathrm{Res}(f;\sqrt{2};i)\right) = 2\pi i\left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right) = \pi i(i - \sqrt{2}i) = \left(\sqrt{2}-1\right)\pi.$$

(2) 被積分関数は偶関数であるから、

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx.$$

$P(z) := (z^2+1)^2$, $Q(z) := 1$ とおくと、$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $x \in \mathbb{R}$ のとき $P(x) = (x^2+1)^2 \geq 1$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{Q(x)e^{ix}}{P(x)}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)e^{iz}}{P(z)}; c\right).$$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = \pm i$ であるから、$P$ の零点 $c$ のうちで $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは $c = i$ のみで、これは 2 位の零点である。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)e^{iz}}{P(z)}; i\right) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-i)^2\frac{Q(z)e^{iz}}{P(z)}\right] = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to i}\left(ie^{iz}(z+i)^{-2} + e^{iz}(-2)(z+i)^{-3}\right) = \frac{ie^{-1}}{(2i)^2} + \frac{-2e^{-1}}{(2i)^3} \\
&= -\frac{ie^{-1}}{4} - \frac{ie^{-1}}{4} = -\frac{i}{2e}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2e} = \frac{\pi}{e}.$$

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2e}.\blacksquare$$

**問 8 解説** (時間がないので…)