# 複素関数練習問題 No. 4

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/

桂田 祐史

2017 年 11 月 10 日

## 冪級数の収束

**問題 66.** $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0)$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ などを用いて、以下の各関数の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。もとの関数と等しいことの証明は要求しない。

(1) $\sin x$　(2) $\cos x$　(3) $e^x$　(4) $(1+x)^\alpha$　(5) $\log(x+1)$　(6) $\arctan x$ ($\tan^{-1} x$ のこと)

**問題 67.** 以下の (1)〜(4) を示せ。

(1) $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ のとき、$(1+h)^n \geq 1 + nh$.　(2) $r > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$.　(3) $r < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.
(4) $r < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$.

**問題 68.** $r$ を複素数とするとき、次のものを求めよ。　(1) $\lim_{n\to\infty} r^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$

**問題 69.** (数学解析履修者向け) (1) 収束列は有界であることを示せ。 (2) Cauchy 列は有界であることを示せ。
(注意: 「収束」,「Cauchy 列」,「(数列の) 有界」の定義を確認する主旨。)

**問題 70.** (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ。　(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でないならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことを示せ。　(3) (1) の命題の逆の反例をあげよ。

**問題 71.** (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとはどういうことか、定義を述べよ。　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ。
((1) は解答出来てほしい。また (2) の事実は覚えてほしい。)

**問題 72.** (1) 優級数の定理を書け。　(2) 優級数の定理を証明せよ。　((1) は解答出来てほしい。)

**問題 73.** 次のことを示せ。

(1) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数が有界 (i.e., ある実数 $M$ に対して $|a_n| \leq M$) ならば、$|z| < 1$ のとき冪級数は収束する。

(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数がある実数 $M$ に対して $|a_n| \leq Mr^n$ を満たすならば、$|z| < 1/r$ のとき冪級数は収束する。

**問題 74.** 冪級数の収束半径の定義を述べよ。(収束半径が 0, $+\infty$ ということはそれぞれどういうことかも記せ。)

以下、冪級数の収束半径を扱うときは、$\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ と約束する。

**問題 75.** 「冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ が確定する (極限を持つ (収束する)、あるいは $\rho = +\infty$) ならば、$\rho$ はこの冪級数の収束半径である」(**d'Alembert の公式**, あるいは **ratio test**) を示せ。

**問題 76.** 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(z-1)^n$

**問題 77.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ の収束半径が $\rho$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2z^n$ の収束半径を求めよ。

**問題 78.** 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}=z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots$ について、以下の問に答えよ。

(1) $|z|<1$ ならば収束することを示せ。 (2) $|z|\geq 1$ ならば収束しないことを示せ。 (3) 収束半径を求めよ。

((3) は (1), (2) からすぐ分かる。ちなみに d'Alembert の公式は使えない。lim sup を知っているのならば、問 **??** の Cauchy-Hadamard の公式を使うことが出来る。)

次の 2 問は、上極限 lim sup を学んでいる人向けのものである。

**問題 79.** $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}a_n=S$ とはどういうことか定義を述べよ。

**問題 80.** 「冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は、$\rho:=\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ である」(**Cauchy-Hadamard の公式**) を示せ。

**問題 81.** (教科書の演習問題 p. 46) 以下の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^{2^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}z^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$

**問題 82.** (1) 任意の自然数 $k$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$ を示せ。 (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ を示せ。
(Cauchy-Hadamard の公式の利用は、この講義としては特に推奨しない[1]。用いるためには、いくつか準備をしておく必要があり、この問の結果もそれらのうちの一つ。)

**問題 83.** 次の冪級数はいずれも収束半径が 1 であるが、収束円周 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 上の点での収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

((2) が解けて欲しい。「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が収束 $\Leftrightarrow\alpha>1$」は忘れないこと (解析学の常識)。(3) は Abel の級数変形法を使う[2]。)

# 一様収束

収束の問題はうるさく言わないことにするが (定理の証明は講義し、それを理解するよう努力してもらうが、試験でそういう問題の比重は低い)、理解の手助けのために。

**問題 84.** 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_n(x):=\begin{cases}-1 & (x<-\frac{1}{n}\text{ のとき})\\ nx & (-\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{1}{n}\text{ のとき})\\ 1 & (x>\frac{1}{n}\text{ のとき})\end{cases}$$

で定めるとき、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求めよ。$\{f_n\}$ は一様収束するかどうか答えよ。

**問題 85.** $K:=[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$, $f_n(x):=x^n$ $(n\in\mathbb{N},\ x\in K)$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x\in K$ とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求めよ。(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $K$ では一様収束しないが、$0<R<1$ なる任意の $R$ に対して、$[0,R]$ では一様収束することを示せ。

[1] 複素関数論としては、他に学ぶべき重要なことがたくさんあり、そちらの学習に時間を割くことを勧める。
[2] ちょっと高級。数学系の学科では、院試で出題されたりします。

# 解答

**解答 66.** 以下 $a \equiv b$ は $a \equiv b \pmod 4$ という合同式の略記とする。

(1) $f(x) = \sin x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \equiv 0) \\ \cos x & (n \equiv 1) \\ -\sin x & (n \equiv 2) \\ -\cos x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0) \\ 1 & (n \equiv 1) \\ 0 & (n \equiv 2) \\ -1 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n\text{ が偶数}) \\ (-1)^k & (n\text{ が奇数}, n = 2k+1) \end{cases}$$

であるから

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(2) $f(x) = \cos x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n \equiv 0) \\ -\sin x & (n \equiv 1) \\ -\cos x & (n \equiv 2) \\ \sin x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0) \\ 0 & (n \equiv 1) \\ -1 & (n \equiv 2) \\ 0 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n\text{ が奇数}) \\ (-1)^k & (n\text{ が偶数}, n = 2k) \end{cases}$$

であるから

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(3) $f(x) = e^x$ とおく。$f'(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ であるから、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(4) $f(x) = x^\alpha$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

であるから、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される一般 2 項係数である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(5) $f(x) = \log(1+x)$ とおく。$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ であるから、

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+1)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

(6) 等比級数の和の公式から

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

項別積分することで (これは微積分の範囲外になるかもしれない)

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1). \tag{♮}$$

あるいは (項別積分を避けたければ)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$$

を積分して

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\int_0^x\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt.$$

ここで $|x|<1$ に範囲を限定して、$n\to\infty$ とすることで ($\natural$) が得られる (右辺第 1 項は交代級数だから収束するとか、右辺第 2 項の積分は 0 に収束するとか、少し議論が必要であるが、難しくない)。

一般に「関数が収束する冪級数に展開されたら、その関数は Taylor 展開が可能で、その冪級数が Taylor 展開に一致する」という命題が成り立つので、($\natural$) が $\arctan x$ の Taylor 展開である。■

得られた級数の収束半径のチェックと (これは比較的簡単)、剰余項が 0 に収束することの証明も良い演習問題である。後者は (1), (2), (3), (5) は比較的簡単で、(4) は難し目。(6) は等式が成り立つことは示してあるので、剰余項が 0 に収束することを証明する必要がない (Lagrange の剰余項は書くのが難しいが、しないで済むので問題ない)。 ■

**解答 67.** (1) 2 項定理 $(1+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k$ により、$n\ge 2$ のとき $(1+h)^n=1+nh+\cdots$. 右辺の $\cdots$ の各項は 0 以上であるから、$(1+h)^n\ge 1+nh$. $n=1$ のときも成り立つ。

(2) $h:=r-1$ とおくと、$h>0$, $r=1+h$. ゆえに $r^n=(1+h)^n\ge 1+nh$. $\lim_{n\to\infty}n=+\infty$ であるから、$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$. ゆえに $\lim_{n\to\infty}r^n=+\infty$.

(3) $h:=1/r-1$ とおくと、$h>0$, $r=\dfrac{1}{1+h}$ であるから、$0\le r^n=\dfrac{1}{(1+h)^n}\le\dfrac{1}{1+nh}\le\dfrac{1}{nh}$. $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{nh}\to 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、$r^n\to 0$. (4) (1) と同様にして、$n\ge 2$ のとき、$(1+h)^n\ge n(n-1)h^2/2$ が示せる。$h:=1/r-1$ とおくと、$h>0$, $r=\dfrac{1}{1+h}$ であるから、$0\le nr^n=\dfrac{n}{(1+h)^n}\le\dfrac{2n}{n(n-1)h^2}=\dfrac{2}{(n-1)h^2}$. $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{(n-1)h^2}\to 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、$nr^n\to 0$. ■

**解答 68.**

(1) まず結果を述べる。

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}0 & (|r|<1\text{ のとき})\\ 1 & (r=1\text{ のとき})\\ \text{発散} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

- $|r|<1$ の場合は $|r^n-0|=|r|^n\to 0$ $(n\to\infty)$ であるから $r^n\to 0$ $(n\to\infty)$.
- $r=1$ の場合は $r^n=1\to 1$ $(n\to\infty)$ は明らか。
- $|r|=1$ かつ $r\ne 1$ の場合は、
  $$\left|r^n-r^{n+1}\right|=|r^n|\,|1-r|=|1-r|\ne 0$$
  であるから、$n\to\infty$ のとき $r^n$ は収束しない (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$\left|r^n-r^{n+1}\right|\to|c-c|=0$ となるはずで矛盾する)。
- $|r|>1$ の場合は $|r^n|=|r|^n\to\infty$ であるから、$r^n$ は発散する (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$|r^n|\to|c|$ であり、矛盾する。)。

(2) 等比数列の和の公式から、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n}r^j=\begin{cases}\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & (r\ne 1)\\ n+1 & r=1\end{cases}$$

が成り立つので (1) の結果から

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\begin{cases}\dfrac{1}{1-r} & (|r|<1)\\ \text{発散} & (|r|\ge 1).\blacksquare\end{cases}$$

**解答 69.** (数学解析講義ノート[3] が参考になる。)

(1) 収束列が有界というのは、実数列の場合に命題 2.9 (p. 20) で述べて、証明も書いてある。それと同様にやれば良い。

(2) Cauchy 列の有界性は独立した命題としては書いていなかった (命題 5.11 の証明の中で証明してある) ようなので、ここには書いておく。$\{a_n\}$ が Cauchy 列であれば、ある自然数 $N$ が取れて

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。これから $n \geq N$ を満たす任意の $n$ に対して (特に $m = N$ と選ぶことで)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a_N| < 1.$$

これから

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|\,.$$

そこで

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

とおくと、$M \in \mathbb{R}$ であり、任意の自然数 $n$ に対して

$$|a_n| \leq M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。 ■

**解答 70.** (1) $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束して和が $s$ であるとは、$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ということを意味する。今の場合、仮定から $(\exists s \in \mathbb{C})\ \lim_{n\to\infty} s_n = s$. このとき、$a_n = s_n - s_{n-1}$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. (2) これは (1) の対偶であるから成り立つ。 (3) $a_n = \dfrac{1}{n}$ とするとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないが、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

**解答 71.** (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。 (2) (準備中。講義ノートには書いてあります。) ■

**解答 72.** (1) 「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数列で、2 条件 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する、を満たすならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。」

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の $n$ 項までの部分和をそれぞれ $S_n$, $T_n$ とおく: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. $n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \sum_{k=n}^{n} |a_k| - \sum_{k=n}^{m} |a_k| = T_n - T_m.$$

同様に $n < m$ のとき、$|S_n - S_m| \leq T_m - T_n$. ゆえに $n$, $m$ の大小によらず

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|\,.$$

仮定から $\{T_n\}$ は収束するので、$\{T_n\}$ は Cauchy 列である。上の不等式から、$\{S_n\}$ も Cauchy 列である。$\mathbb{C}$ は完備であるから、$\{S_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。■

[3] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-2015.pdf

**解答 73.** (1) $A_n := a_n z^n$, $B_n := M|z|^n$ とおくと、$|A_n| = |a_n|\,|z|^n \le M|z|^n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} M\,|z|^n$ は、公比 $|z|$ の等比級数であり、$|z|<1$ のときこの公比は 1 より小さいので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ は収束する (和は $\dfrac{M}{1-|z|}$)。ゆえに、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。

(2) (宿題にしてあるのでしばらくは見せない。) ■

**解答 74.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が冪級数とするとき、次の (i), (ii), (iii) のいずれか一つが成立する。

(i) $(\forall z\in\mathbb{C}\colon\ z\ne c)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束しない。

(ii) $(\exists r\in\mathbb{R}\colon\ r>0)$ $(\forall z\in\mathbb{C})$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は $|z-c|<r$ ならば収束し、かつ $|z-c|>r$ ならば発散する。

(iii) $(\forall z\in\mathbb{C})$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。

(i) のとき収束半径は 0, (ii) のとき収束半径は $r$, (iii) のとき収束半径は $+\infty$ という。 ■

**解答 75.** (準備中)

**解答 76.**

(1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

ゆえに収束半径は 1 である。収束円は $D(0;1)$.

(2) $a_n = n!$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに収束半径は 0 である。収束円は $\emptyset$.

(3) これは宿題にして、そちらで解説したので後回し。結果だけ書いておくと、収束半径は $\infty$ で、収束円は $\mathbb{C}$.

(4) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である。収束円は $D(1;1/2)$. ■

**解答 77.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ は $\zeta = z^2$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n$ となるので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が $\rho$ であることから、

$$|\zeta|<\rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n \text{ 収束},\quad |\zeta|>\rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n \text{ 発散}.$$

ゆえに

$$|z^2|<\rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束},\quad |z^2|>\rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

すなわち

$$|z|<\sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束},\quad |z|>\sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

したがって $\sqrt{\rho}$ が収束半径である。

後半は Cauchy-Hadamard 使わないとちょっと難しいかな。使わせてもらう。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が $\rho$ であることから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

正数 $r$ に対して、$\sqrt[n]{r^2} = \left(r^2\right)^{1/n} = \left(r^{1/n}\right)^2$ であるから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

従って収束半径 $\rho'$ は $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{1}{\rho'}$ より $\rho' = \rho^2$. ■

**解答 78.** この冪級数を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と書くと、

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = k! \text{ となる } k \in \mathbb{N} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$ とするとき、$k! = 1, 2, 6, 24, 120, 720, \cdots$ であるから、$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = a_8 = \cdots = a_{23} = 0$, $a_{24} = 1, \ldots$.)

(1) $|z| < 1$ とするとき、

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n \le 1 \cdot |z|^n = |z|^n.$$

$b_n := |z|^n$ とおくと、$\{b_n\}$ は $\{a_n z^n\}$ の優級数で、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

(2) 任意の自然数 $n$ に対して、$a_{n!} = 1$ であるから、

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N} : m \ge n) \quad a_m = 1$$

が成り立つ ($m = n!$ とすれば良い)。特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ではない。ゆえにこの冪級数は $z = 1$ で収束しない (実際、一般項 $a_n z^n = a_n$ は 0 に収束しないから)。

(3) (1), (2) から $\rho := 1$ とするとき、$|z| < \rho$ で収束、$|z| > \rho$ で発散するので、収束半径は 1 である。 ■

**解答 79.** 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $a$ に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

であるとは、次の (a), (b) が成り立つことをいう。

(a) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\text{: } n \ge N)$ $a_n < a + \varepsilon$.

(b) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\text{: } n \ge k)$ $a_n > a - \varepsilon$
(言い換えると、任意の正数 $\varepsilon$ に対して $a_n > a - \varepsilon$ を満たす $n$ が無限個存在する。) ■

**解答 80.** (準備中)

**解答 81.**

(1) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{[(n+1)!]^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)^2} = 4.$$

収束半径は 4.

(2) これは問 **??** と同様にして解ける (そのあらすじ: $z=1$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$ は成り立たないので、$z=1$ で収束しないが、$|z|<1$ を満たす任意の $z$ に対して $|a_n z^n| \le n\,|z|^n$ $(n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ で、$\sum_{n=0}^{\infty} n\,|z|^n$ は収束するので、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。以上から収束半径は 1.)。ここでは Cauchy-Hadamard の公式を使って解答してみる。

この冪級数の $n$ 次の係数を $a_n$ とする (すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が成り立つとする) と、

$$a_n = \begin{cases} n & (\exists k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & (\exists k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これから $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (証明: $\sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{n}$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 一方 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、$n := 2^k$ とおくと $n \ge k$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} > 1 - \varepsilon$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$.) ゆえに収束半径は $1/1 = 1$.

(3) $a_n := \dfrac{\log n}{n}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}\,\frac{n+1}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log n}{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1+\dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}} = 1\cdot\frac{1}{1+0/\infty} = 1.\end{aligned}$$

(4) おっと、これは **39** と同じだ (笑)。■

**解答 82.**

(1) 講義ノートの 1.1.4 に書いてある。

(2) 階乗 (より一般にはガンマ関数) を近似するスターリングの公式 (Stirling's approximation, Stirling's formula)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n\to\infty)$$

(この意味は、$n\to\infty$ のとき $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \to 1$ ということ) を知っていれば直接証明するのは簡単だけど、微積分で習ったかな…

というわけで、スターリングの公式を使わないでやってみよう。冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

を考える。この冪級数の収束半径は、$a_n := n!$ とおくとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

であることから 0 である。Cauchy-Hadamard の公式から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ は単調増加数列である。実際

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{n(n+1)} = \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n\cdot(n!)^n}{n!\cdot(n!)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdots\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{1} > 1$$

であるから、$\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} > \sqrt[n]{|a_n|}$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty. \blacksquare$$

**解答 83.**

(1) 一般に、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを思い出そう。$a_n = z^n$ についてこれを用いる。

$|z| = 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z^n| = 1$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ は成り立たない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は収束しない。

(2) $M_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

- $|z| = 1$ を満たす任意の $z$ と、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2} \le M_n$. (等号が成り立つけれど、定理にあてはめるため、不等号で書いてみた。どちらで書いても間違いではない。)
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する (これは常識、和が $\pi^2/6$ であることは忘れても、収束することは忘れてはいけない)。

Weierstrass の M-test (という定理) により、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は $|z| = 1$ で一様に絶対収束する。

(3) 結果だけ先に書いておくと、$z = 1$ では発散、$|z| = 1$ かつ $z \neq 1$ では収束する。

$|z| = 1$ とするとき、$\left|\dfrac{z^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は絶対収束しない。だから微妙なケースである。$z = 1$ では ($\dfrac{z^n}{n} = \dfrac{1}{n}$ なので) 収束しないが、$z = -1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

はいわゆる交代級数に関する Leibniz の定理により収束することが分かる (実は和は $-\log 2$)。Abel の級数変形法 (これは講義できない年度もある) を用いると、$|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす任意の $z$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束することを示せる。 ■