複素関数練習問題 No. 3

桂田 祐史

2017 年 11 月 13 日

複素関数の実部・虚部, 正則性, Cauchy-Riemann の関係式

問題 48. 正則関数の定義を述べよ。

問題 49. (複素指数関数を $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$ で定義するとき) $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$ は正則であり、$f'(z) = e^z$ を満たすことを示せ。

問題 50. 複素関数の実部・虚部とは何か、説明せよ。

問題 51. Cauchy-Riemann 方程式とは何か、説明せよ。

問題 52. 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求め、u_x, u_y, v_x, v_y を計算せよ。

(a) $f(z) = z^3$ $(z \in \Omega := \mathbb{C})$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ $(z \in \Omega := \mathbb{C})$

(ヒントにはならないが、(c) の $f(z)$ は実は $\cos z$ であることが後で分かり、結果もそれなりに重要である。)

問題 53. z の関数として、$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\bar{z}$ は正則でないことを確かめよ。

問題 54. u, v がそれぞれ正則関数 f の実部・虚部であるとするとき、u と v は偏微分可能で、$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たすことを示せ。

(出題の意図: 「f が正則 $\Leftrightarrow$ u と v は微分可能で Cauchy-Riemann 方程式を満たす」という定理の証明は少し難しいが、この簡略版の定理くらいは自力で証明が書けた方が良い。)

問題 55. $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 上で定義された正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ の実部 u と虚部 v が Laplace 方程式

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

を満たすことを示せ。u と v が C^2 級であることは認めて良い。

(後で一般に正則関数は冪級数展開出来ることを証明するので、その系として u と v は C^∞ 級であることが得られる。Laplace 方程式を満たす関数は**調和関数** (harmonic function) と呼ばれるので、この命題は「正則関数の実部虚部は調和関数である」と書くことが出来る。常識とされる命題で、「証明せよ」は良く出題される。)

問題 56. Ω が $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、以下の (1)〜(4) を証明せよ。

(1) Ω で $f' = 0$ が成り立つならば、f は定数関数である。

(2) Ω で $|f|$ が定数関数ならば、f そのものが定数関数である。

(3) Ω で f が実数値しか取らない $((\forall z \in \Omega)\ f(z) \in \mathbb{R})$ ならば、f は定数関数である。

(4) Ω で f が純虚数値しか取らない $((\forall z \in \Omega)\ \dfrac{1}{i}f(z) \in \mathbb{R})$ ならば、f は定数関数である。

(ヒント: すべて条件を f の実部・虚部 u, v を用いて表す。)

問題 57. $f(x) = \cos x + i\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ とするとき、$f(0) = f(2\pi)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) \neq 0$ が成り立つことを確かめよ。(これから複素数値関数では、平均値の定理は成り立たない。)

問題 58. Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とする。C^1 級の $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たす連続関数 v は、もし存在するならば、定数差を除いて一意的に定まる (2 つあれば、その差は定数という意味) ことを示せ。(以下はベクトル解析を既習の人向け) その場合に v を u を用いて表示する式を求めよ。

問題 59. u は $\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された調和関数とする (u は C^2 級で $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たす)。この u に対して、$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす v が存在するとき、v は u の共役調和関数であると言う。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) v は調和関数であることを示せ。　(2) u は v の共役調和関数であるかどうか答えよ。

問題 60. 正則関数 f の実部・虚部 u, v に対して、$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ とおくと、次式が成り立つことを示せ。

$$\det \boldsymbol{f}'(x,y) = u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2 = v_x(x,y)^2 + v_y(x,y)^2 = \left|f'(z)\right|^2$$

問題 61. $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$ で C^2 級の関数に対して、

$$F(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad (0 \le r < 1,\ \theta \in \mathbb{R})$$

で F を定めるとき、

$$F_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta, \quad F_\theta = -f_x r \sin\theta + f_y r \cos\theta \quad (0 \le r < 1,\ \theta \in \mathbb{R}),$$

$$f_x = F_r \cos\theta - \frac{F_\theta \sin\theta}{r}, \quad f_y = F_r \sin\theta + \frac{F_\theta \cos\theta}{r} \quad (0 < r < 1,\ \theta \in \mathbb{R}),$$

$$f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} \quad (0 < r < 1,\ \theta \in \mathbb{R})$$

であることを示せ。

問題 62. n を任意の自然数とする。$u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^n \cos n\theta, \quad v(r\sin\theta, r\sin\theta) = r^n \sin n\theta \quad (0 \le r,\ \theta \in \mathbb{R})$$

で定めるとき、u と v は $\mathbb{R}^2$ で調和であり、u の共役調和関数は v であることを示せ。また、v の共役調和関数を求めよ。

問題 63. 有界な数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して、

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

とおくと、u は $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$ で調和であることを示せ。また u の共役調和関数を求めよ。

misc. (No. 1 の残り物)

有名な Hamilton による $\mathbb{C}$ の定義の導入部分を自分の手で確かめてみよう。

問題 64. $K := \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ に

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \quad (a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

で加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を定義したとき、可換体の公理を満たすことを確かめよ。

問題 65. 代数学の適当なテキストを探して、可換環とその極大イデアルの定義、実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を学び、

$$I = \left\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; (\exists q(x) \in \mathbb{R}[x])\ p(x) = (x^2+1)q(x)\right\} \qquad \text{(要するに } x^2+1 \text{ の倍数の全体)}$$

が $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルであることを示せ。(すると剰余環 $\mathbb{R}[x]/I$ は体になるが、これを $\mathbb{C}$ の定義とすることが出来る。 — これは複素関数論からは離れるので、あくまで参考です。)

解答

解答 48. 複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合 Ω を定義域とする複素数値関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が、定義域の各点 z で微分可能なとき、f は正則であるという。f が z で微分可能とは、極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

が存在することをいう。■

解答 49. (準備中)

解答 50. $\Omega\subset\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ とするとき、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega} &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+iy\in\Omega\right\},\\
u(x,y) &:= \operatorname{Re} f(x+iy) \quad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}),\\
v(x,y) &:= \operatorname{Im} f(x+iy) \quad ((x,y)\in\widetilde{\Omega})
\end{aligned}$$

で定まる関数 u, v をそれぞれ f の実部、虚部と呼ぶ。■

解答 51. 2 つの実変数 (x,y) に関する 2 つの関数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ に関する連立微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{1}$$

を Cauchy-Riemann 方程式と呼ぶ。任意の正則関数の実部・虚部 u, v は、この方程式を満たすことが知られている。■

解答 52.

(a)

$$f(x+iy)=(x+iy)^3=x^3+3x^2\cdot iy+3x\cdot(iy)^2+(iy)^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

であるから、$u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

(Mathematica では、`ComplexExpand[(x+I y)^3]` のようにすると分かりやすく計算してくれる。)

(b)

$$f(x+iy)=\frac{1}{(x+iy)^2+1}=\frac{1}{x^2-y^2+1+2ixy}=\frac{x^2-y^2+1-2ixy}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}$$

であるから

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2+1}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2},\quad v(x,y)=\frac{-2xy}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right)\\
&= \cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+i\sin x\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\\
&= \cos x\cosh y-i\sin x\sinh y. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 53. (準備中)

解答 54.

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{(u(a+h_x,b+h_y)+iv(a+h_x,b+h_y))-(u(a,b)+iv(a,b))}{h_x+ih_y}$$

特に $h_y=0$ という条件を加えて極限を取ると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h_x\to 0} \frac{(u(a+h_x,b)+iv(a+h_x,b))-(u(a,b)+iv(a,b))}{h_x} \\ &= \lim_{h_x\to 0}\left(\frac{u(a+h_x,b)-u(a,b)}{h_x}+i\frac{v(a+h_x,b)-v(a,b)}{h_x}\right) = u_x(a,b)+iv_x(a,b). \end{aligned}$$

一方 $h_x=0$ という条件を加えて極限を取ると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h_y\to 0} \frac{(u(a,b+h_y)+iv(a,b+h_y))-(u(a,b)+iv(a,b))}{ih_y} \\ &= \frac{1}{i}\lim_{h_y\to 0}\left(\frac{u(a,b+h_y)-u(a,b)}{h_y}+i\frac{v(a,b+h_y)-v(a,b)}{h_y}\right) = \frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right). \end{aligned}$$

$$f'(c) = u_x(a,b)+iv_x(a,b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right)$$

から

$$u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b).\blacksquare$$

解答 55. C^2 級の関数の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらないので、

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x}u_x+\frac{\partial}{\partial y}u_y = \frac{\partial}{\partial x}v_y+\frac{\partial}{\partial y}(-v_x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} = 0, \\ v_{xx}+v_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x}v_x+\frac{\partial}{\partial y}v_y = \frac{\partial}{\partial x}(-u_y)+\frac{\partial}{\partial y}u_x = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = 0.\blacksquare \end{aligned}$$

解答 56. f の実部虚部を u, v とする。すなわち

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega} &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+iy\in\Omega\right\}, \\ u(x,y) &:= \operatorname{Re} f(x+iy) \quad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}), \\ v(x,y) &:= \operatorname{Im} f(x+iy) \quad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}). \end{aligned}$$

(1) 任意の $z\in\Omega$ に対して、$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とすると、

$$0 = f'(z) = u_x(x,y)+iv_x(x,y) = \frac{1}{i}\left(u_y(x,y)+iv_y(x,y)\right).$$

これから

$$u_x(x,y) = u_y(x,y) = v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0.$$

Ω は領域 (連結開集合) であるから、u, v は $\widetilde{\Omega}$ で定数に等しい。ゆえに $f=u+iv$ も Ω で定数に等しい。

(2) 仮定より $(\exists C\in\mathbb{R})$ $|f(z)|\equiv C$. もしも $C=0$ ならば $f(z)\equiv 0$ であるから、$f(z)$ そのものが定数である。以下 $C\neq 0$ とする。$u(x,y)^2+v(x,y)^2=C^2$ を偏微分して $uu_x+vv_x=0$ かつ $uu_y+vv_y=0$.

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

もしも行列式が 0 でないならば $u=v=0$, $C=0$ となり仮定に矛盾するので、

$$u_xv_y-v_xu_y = 0.$$

Cauchy-Riemann の関係式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を用いると、

$$u_xv_y-v_xu_y = u_xu_x-(-u_y)u_y = (u_x)^2+(u_y)^2, \quad u_xv_y-v_xu_y = v_yv_y-v_x(-v_x) = (v_x)^2+(v_y)^2$$

であるから、

$$(u_x)^2+(u_y)^2\equiv 0,\quad (v_x)^2+(v_y)^2\equiv 0.$$

これから $u_x\equiv u_y\equiv v_x\equiv v_y\equiv 0$. 以下 (1) と同様にして、$f$ は定数関数である。

(別解) $2uu_x+2vv_x=0$, $2uu_y+2vv_y=0$ を導くのは上と同じ。そこから Cauchy-Riemann の方程式を使って

$$uu_x-vu_u=0,\quad vu_x+uu_y=0.$$

これは

$$\begin{pmatrix}u & -v\\ v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

ということで、この連立1次方程式の係数行列の行列式は

$$u\cdot u-(-v)\cdot v=u^2+v^2=C^2.$$

$C=0$ ならば $u=v=0$ で、$f=u+iv=0$ も定数。$C\neq 0$ ならば (逆行列をかけて) $u_x=u_y=0$ で、再び Cauchy-Riemann の方程式を使うと $v_x=v_y=0$ も導かれ、u も v も定数である。ゆえに $f=u+iv$ も定数。— この答の方が見通しが良いような気がする

(3) 仮定は $v\equiv 0$ ということであるから、$v_x=v_y=0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ から、$u_x=u_y=0$. ゆえに u は定数関数であり、$f=u+iv=u$ も定数関数である。

(4) 仮定は $u\equiv 0$ ということであるから、$u_x=u_y=0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ から、$v_x=v_y=0$. ゆえに v は定数関数であり、$f=u+iv=iv$ も定数関数である。■

解答 57. $f(0)=\cos 0+i\sin 0=1+i\cdot 0=1$, $f(2\pi)=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1+i\cdot 0=1$ であるから、$f(0)=f(2\pi)$. $f'(x)=-\sin x+i\cos x$ より、$|f'(x)|=\sqrt{(-\sin x)^2+\cos^2 x}=\sqrt{1}=1\neq 0$ であるから、$f'(x)\neq 0$. ■

解答 58.

$$u_x=v_y=V_y,\quad u_y=-v_x=-V_x$$

を満たす連続関数 v, V があったとすると、$w:=v-V$ は

$$w_x=v_x-V_x=(-u_y)-(-u_y)=0,\quad w_y=v_y-V_y=u_x-u_x=0$$

を満たす C^1 級関数である。ゆえに $(\exists C\in\mathbb{R})$ $(\forall(x,y)\in\Omega)$ $w(x,y)=C$. ゆえに $v(x,y)=V(x,y)+C$ $((x,y)\in\Omega)$.

v は (v_x,v_y) というベクトル場のポテンシャルであるから、Ω 内の任意の点 (a,b) を固定するとき、

$$v(x,y)=v(a,b)+\int_{C_{(x,y)}}(v_x dx+v_y dy)$$

が成り立つ。ただし、$C_{(x,y)}$ は、(a,b) を始点、(x,y) を終点とする区分的に C^1 級の Ω 内の曲線である。条件 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ により、

$$v(x,y)=v(a,b)+\int_{C_{(x,y)}}(-u_y dx+u_x dy).$$

これが求める式である。(1) で見たように、もともと定数だけの不定さがあるので、$v(a,b)$ は任意定数とすれば良い。すなわち

$$v(x,y)=C+\int_{C_{(x,y)}}(-u_y dx+u_x dy).■$$

解答 59.

(1) Laplacian の定義に $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を代入すると

$$\triangle v = v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy}.$$

u は C^2 級であるので、偏微分の順序交換が可能であるから、$u_{yx} = u_{xy}$. ゆえに $\triangle v = 0$.

(2) u は v の共役調和関数ではない。実際 $U = v$, $V = u$ とおくと、

$$\begin{aligned} u \text{ が } v \text{ の共役調和関数} &\Leftrightarrow V \text{ が } U \text{ の共役調和関数} \\ &\Leftrightarrow U_x = V_y, \quad U_y = -V_x \\ &\Leftrightarrow v_x = u_y, \quad v_y = -u_x. \end{aligned}$$

これは v が u の調和関数である条件 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ と似ているが違う。この条件が同時に成り立つとすると $u_x = v_y = -u_x$, $u_y = -v_x = -u_y$ より $u_x = u_y = 0$, $v_x = v_y = 0$ が得られるので、u と v の両方が定数関数という特殊な場合しかない。もちろん定数でない共役調和関数の組が存在するので、「v が u の共役調和関数 $\Rightarrow$ u が v の共役調和関数」は一般には成り立たない。■

解答 60. $\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であるから、$\det \boldsymbol{f}' = u_x v_y - u_y v_x$. u の偏導関数で表すと

$$\det \boldsymbol{f}' = u_x u_x - u_y(-u_y) = u_x^2 + u_y^2.$$

v の偏導関数で表すと

$$\det \boldsymbol{f}' = v_y v_y - (-v_x) v_x = v_x^2 + v_y^2.$$

$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$ であるから、

$$\det \boldsymbol{f}'(x,y) = u_x u_x - (-v_x) v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2 .■$$

解答 61. 合成関数の微分法から

$$F_r = f_x x_r + f_y y_r, \quad F_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta.$$

これに $x_r = \cos\theta$, $y_r = \sin\theta$, $x_\theta = -r\sin\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$ を代入すると

$$F_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta, \quad F_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta.$$

これを f_x, f_y についての連立 1 次方程式として解くと、

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix}.$$

これから

$$f_x = F_r \cos\theta - \frac{F_\theta \sin\theta}{r}, \quad f_y = F_r \sin\theta + \frac{F_\theta \cos\theta}{r}.$$

一方 (また合成関数の微分法を用いて)

$$\begin{aligned} F_{rr} &= f_{xx}\cos^2\theta + (f_{xy} + f_{yx})\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta, \\ F_{\theta\theta} &= f_{xx} r^2 \sin^2\theta - (f_{xy} + f_{yx}) r^2 \cos\theta\sin\theta + f_{yy} r^2 \cos^2\theta - f_x r\cos\theta - f_y r\sin\theta \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} &= f_{xx}\cos^2\theta + (f_{xy} + f_{yx})\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\left(f_{xx} r^2\sin^2\theta - (f_{xy} + f_{yx}) r^2\cos\theta\sin\theta + f_{yy} r^2\cos^2\theta - f_x r\cos\theta - f_y r\sin\theta\right) \\ &= f_{xx} + f_{yy}.■ \end{aligned}$$

解答 62. $u(x,y)=\mathrm{Re}\,[(x+iy)^n]$, $v(x,y)=\mathrm{Im}\,[(x+iy)^n]$ であり、z^n は $\mathbb{C}$ で正則であるから、u, v は $\mathbb{R}^2$ で調和である。また v は u の共役調和関数である。v の共役調和関数は $-u+C$ (C は定数である。) ■

(別解) $U(r,\theta):=u(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^n\cos n\theta$, $V(r,\theta):=v(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^n\sin n\theta$ は、

$$U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0,\quad V_{rr}+\frac{1}{r}V_r+\frac{1}{r^2}V_{\theta\theta}=0$$

を満たすので、u と v は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で調和である。

Cauchy-Riemann の方程式を極座標で表現すると

$$(\sharp)\qquad U_r=\frac{1}{r}V_\theta,\quad \frac{1}{r}U_\theta=-V_r\quad (r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$$

となる。実際、

$$M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r}\\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}U_r\\U_\theta\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}V_r\\V_\theta\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned}
u_x=v_y\quad\text{かつ}\quad u_y=-v_x\quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}\Leftrightarrow M\begin{pmatrix}U_r\\U_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}V_r\\V_\theta\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}U_r\\U_\theta\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}V_r\\V_\theta\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}U_r\\U_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{r}\\-r&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_r\\V_\theta\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad U_r=\frac{1}{r}V_\theta\quad\text{かつ}\quad U_\theta=-rV_r.
\end{aligned}$$

$U(r,\theta)=r^n\cos n\theta$, $V(r,\theta)=r^n\sin n\theta$ は $r>0$ のとき $(\sharp)$ を満たすので、u と v は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

u と v は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で調和で、$(0,0)$ で連続であることから、$\mathbb{R}^2$ 全体で C^2 級でかつ調和であることが分かる (これをきちんと証明するには、少し準備が必要である)。このことから、$(0,0)$ でも Cauchy-Riemann の方程式を満たす。 ■

解答 64. (略解) 可換体の公理とは次の (i)〜(ix) である。

(i) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

(ii) $(\exists 0_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a+0_K=0_K+a=a$

(iii) $(\forall a\in K)\ (\exists a'\in K)\quad a+a'=a'+a=0_K$

(iv) $(\forall a,b\in K)\quad a+b=b+a$

(v) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(vi) $(\exists 1_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a\cdot 1_K=1_K\cdot a=a$

(vii) $(\forall a\in K\setminus\{0_K\})\ (\exists a''\in K)\quad a\cdot a''=a''\cdot a=1_K$

(viii) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(ix) $(\forall a,b\in K)\quad a\cdot b=b\cdot a$

(可換体の公理に (x) $0_K\neq 1_K$ も含める場合があるが、今の場合はこの条件も満足している。)

基本的に計算して確認するだけである。$\exists$ のついているものは、何であるか書いておくと、

- $0_K=(0,0)$.
- a' は $a=(x,y)$ のとき $a'=(-x,-y)$.

- $1_K = (1, 0)$.
- a'' は $a = (x, y)$ のとき $a'' = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$. ■

解答 65. (準備中)