問　このことを証明せよ。

> **命題 2.12** $f'(z) = 0$ ならば f は定数関数。

これを認めて議論する。

f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。実数値または純虚数値で定数でない関数関数は正則ではない。

$|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

第7回 2018/10/20 (土)

4限に312教室で行う。
問3の解説をすること。

2.5　Cauchy-Riemann の方程式 (続き)

正則性と Cauchy-Riemann 方程式が同値である、という定理 2.8 の証明が残っている。
定理の証明の前に、正則性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

> f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能で、
>
> $$(\sharp)\qquad f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a,b) + iv_y(a,b)\right)$$
>
> が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$.

(($\sharp$) を $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用気味であるが[5]、要点を簡潔にとらえているかもしれない。)

証明　f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、h の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。

(a) $h = h_x$ $(h_x \in \mathbb{R})$ (実数の値だけを取る)
$f(c + h_x) = u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_x} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a,b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a,b)}{h_x} \right) \\
&= u_x(a,b) + iv_x(a,b).
\end{aligned}$$

[5] うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。

(b) $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)

$f(c+ih_y) = u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{\substack{h_y \to 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \frac{(u(a,b+h_y) + iv(a,b+h_y)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_y} \\
&= \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \left(\frac{u(a,b+h_y) - u(a,b)}{h_y} + i \frac{v(a,b+h_y) - v(a,b)}{h_y} \right) \\
&= \frac{1}{i} \left(u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right).
\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}
f'(c) &= u_x(a,b) + iv_x(a,b) \\
&= \frac{1}{i} \left[u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right] = v_y(a,b) - iu_y(a,b).
\end{aligned}$$

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad v_x(a,b) = -iu_y(a,b).■$$

定理の証明 f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。

$h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) とおくと

$$\begin{aligned}
&(p+iq)h = (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y), \\
&f(c+h) - f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) + i \left(v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) \right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\
&\quad = \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|} \\
&\quad = \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x + qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
f \text{ が } c \text{ で微分可能} &\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0 \\
&\qquad \text{かつ} \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で微分可能で} \\
&\qquad u_x(a,b) = p, \quad u_y(a,b) = -q, \quad v_x(a,b) = q, \quad v_y(a,b) = p \\
&\Leftrightarrow \quad u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で微分可能で} \\
&\qquad u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b).■
\end{aligned}$$

(授業中に板書した証明の見通しが悪いと感じたので、なるべく式が簡単になるように工夫してみました。それでもやや分かりにくいと感じられるかもしれません。やはり、Cauchy-Riemann 方程式を手早く導くやり方と両方見せた方が良いと思った次第。)

実関数のヤコビ行列とヤコビアン　(後で逆関数定理など考えるときに重要) $\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

である。$a := \operatorname{Re} c$, $b := \operatorname{Im} c$, $\boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

次の式は記憶しておくべき:

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = |f'(c)|^2 .$$

実際、両辺とも $p^2 + q^2$ に等しい。

図形的解釈　複素数 $f'(c) = p + qi$ の偏角を θ とすると、

$$f'(c) = p + qi = \sqrt{p^2+q^2} e^{i\theta} \quad (\text{極形式}),$$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2+q^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$f(c+h) - f(c) \fallingdotseq f'(c)h$$

の右辺、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) \fallingdotseq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\boldsymbol{h}$$

の右辺は、それぞれ h と $\boldsymbol{h}$ を

- 長さを $\sqrt{p^2+q^2}$ 倍
- 角度 θ の回転をした

ものである。

z 平面に c, $c+h$, w 平面に $f(c)$, $f(c+h)$ を描いて…

念のため: 一般に 1 次変換は、正方形を平行四辺形に写すが、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は正方形を正方形に写す (例えば $(1,0)$, $(0,1)$ で作られる正方形を (p,q), $(-q,p)$ で作られる正方形に写す)。

以上から、正則関数 f は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる 2 曲線の交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。

そのため、一般にいたるところ $f'(z) \neq 0$ を満たす正則関数 f を等角写像 (conformal mapping) と呼ぶ。

余談 2.13 「逆関数定理」というものがある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ であれば、局所的な逆関数が存在するわけであるが、複素関数 f に対応する $\boldsymbol{f}$ については、

$$(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}))^{-1} = \frac{1}{p^2+q^1}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$$

であるから、これは正則関数に対応していることがわかる。ゆえに「f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、$f(c)$ の近傍で正則な逆関数が存在する。」

ずっと後で「f が正則であるならば、f は何回でも微分できる」という定理を証明する。特に f が正則であれば、f' は連続である。ゆえに「f が正則で、$f'(c) \neq 0$ であれば、$f(c)$ の近傍で正則な逆関数が存在する。」 ■

次の定理は有名である。

命題 2.14 Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

(1) f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。

(2) $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明 $\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+yi \in \Omega\}$ とおく。

(1) 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式 (☆) が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$ であるから、v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv = u$ も定数関数である。

(2) $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x,y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2+v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\widetilde{\Omega}$). ゆえに u は定数関数である。(1) より f は定数関数である。
■

2.5.2 正則関数と調和関数

命題 2.15 (正則関数の実部虚部は調和関数である) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0\quad \left((x,y)\in\widetilde{\Omega}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+iy\in\Omega\right\}\right)$$

を満たす。

証明　後で f が正則ならば、f は何回でも微分可能であるという定理を証明する。先走ってそれを認めると、u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

$v_{xx}+v_{yy}=0$ についても同様である。 ■