

複合機スキャン用紙 問 14 (提出の必要なし。解答は WWW に掲載。)



・ 学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
 ・ 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score
採点結果

--	--	--

Student's ID 学生番号												Name 氏名
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名			/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日					

問 14 以下の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 4} dx$ (3) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta}$

問 14 解答 (1) $I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ とおく。被積分関数は偶関数だから $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. $P(z) := (z^2+1)^3$, $Q(z) := 1$, $f(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、 $P(z), Q(z)$ は z の多項式で (板書では $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$)、 $\deg P(z) = 6 \geq 2 = \deg Q(z) + 2$. また $x \in \mathbb{R}$ ならば $P(x) \geq (0+1)^3 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. 授業で説明した定理によって、

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) = \pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

$P(z) = (z+i)^3(z-i)^3$ であるから、 P の零点は $i, -i$ であり、その位数はともに 3. $Q(\pm i) = 1 \neq 0$ であるから、 i と $-i$ は f の 3 位の極である。このうち虚部が正であるのは i のみ。

$$\begin{aligned} I &= \pi i \text{Res}(f; i) = \pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{d}{dz} \right)^{3-1} [(z-i)^3 f(z)] = \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^3} \right)'' \\ &= \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5} = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2^5 i^5} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 4}{2^6} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

(2) 求める積分を I とおく。 $\sin \pi x = \text{Im}(e^{i\pi x})$ であるから、

$$I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\pi x}}{x^2+4} dx.$$

$P(z) := z^2+4$, $Q(z) := z$, $f(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、 $P(z), Q(z)$ は z の多項式で、 $\deg P(z) = 2 \geq 2 = \deg Q(z) + 1$. また $x \in \mathbb{R}$ ならば (もう面倒だ) $P(x) \neq 0$. さらに $\pi > 0$. ゆえに授業で説明した定理が適用できて

$$I = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{i\pi z}; c) \right).$$

$q(z) := z e^{i\pi z}$ とおくと、 q は \mathbb{C} 全体で正則である。 $P(z) = (z+2i)(z-2i)$ であるから、 P の零点は $\pm 2i$ で、(さすがに明らかに) 位数はともに 1. ゆえに $\pm 2i$ は $\frac{q(z)}{P(z)} = f(z)e^{i\pi z}$ の高々 1 位の極で、そのうち虚部が正であるのは $2i$.

$$\text{Res}(f(z)e^{i\pi z}; 2i) = \frac{q(2i)}{P'(2i)} = \frac{2ie^{i\pi \cdot 2i}}{2 \cdot 2i} = \frac{e^{-2\pi}}{2}.$$

ゆえに

$$I = \text{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{e^{-2\pi}}{2} \right) = \text{Im}(i\pi e^{-2\pi}) = \pi e^{-2\pi}.$$

(3) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、これは $|z|=1$ のパラメータ表示であり、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

また $dz = ie^{i\theta} d\theta$ より、 $d\theta = \frac{dz}{iz}$. ゆえに ($\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ に注意して)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2iz + i(z^2+1)/2 + (z^2-1)/2} \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{(i+1)z^2 + 4iz + (i-1)} = (1-i) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2(1+i)z + i}. \end{aligned}$$

$z^2 + 2(1+i)z + i = 0$ の根は

$$\begin{aligned} z &= -(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - i} = -(1+i) \pm \sqrt{i} = -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ &= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

前者を α , 後者を β とすると、このうち $|z| < 1$ にあるのは β .

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2(1+i)z + i}; \beta \right) = \lim_{z \rightarrow \beta} \left((z - \beta) \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta} = (1-i) \cdot 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} = \sqrt{2}\pi. \blacksquare$$