複素関数練習問題 No. 4

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/

桂田 祐史

2016 年 10 月 27 日

冪級数の収束

問題 63. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0)$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ などを用いて、以下の各関数の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。もとの関数と等しくなることの証明は (ここでは) 要求しない[1]。

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) e^x (4) $(1+x)^\alpha$ (5) $\log(x+1)$ (6) $\arctan x$ ($\tan^{-1} x$ のこと)

問題 64. 以下の (1)～(4) を示せ。

(1) $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ のとき、$(1+h)^n \geq 1 + nh$. (2) $r > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$. (3) $r < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. (4) $r < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$.

問題 65. r を複素数とするとき、以下の問に答えよ (場合分けすることになる)。

(1) $\lim_{n\to\infty} r^n$ を求めよ。 (2) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ を求めよ。 (3) $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ を求めよ。

((3) は「任意の冪級数は収束円の内部で項別微分可能である」という定理を使わずに示せ。)

問題 66. (数学解析履修者向け) (1) 収束列は有界であることを示せ。 (2) Cauchy 列は有界であることを示せ。

(注意: 「収束」,「Cauchy 列」,「(数列の) 有界」の定義を確認する主旨。)

問題 67. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ。 (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でないならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことを示せ。 (3) (1) の命題の逆の反例をあげよ。

問題 68. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとはどういうことか、定義を述べよ。 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ。

((1) は解答出来てほしい。また (2) の事実は覚えてほしい。)

問題 69. (1) 優級数の定理を書け。 (2) 優級数の定理を証明せよ。

((1) は解答出来てほしい。)

問題 70. 次のことを示せ。

(1) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数が有界 (i.e., ある実数 M に対して $|a_n| \leq M$) ならば、$|z| < 1$ のとき冪級数は収束する。

(2) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数がある実数 M に対して $|a_n| \leq Mr^n$ を満たすならば、$|z| < 1/r$ のとき冪級数は収束する。

[1] 微積分の復習である

問題 71. 冪級数の収束半径の定義を述べよ。(収束半径が $0, +\infty$ ということはそれぞれどういうことかも記せ。)

問題 72. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\rho$ が確定する (極限を持つ (収束する)、あるいは $\rho=+\infty$) ならば、ρ はこの冪級数の収束半径であることを示せ。

(**d'Alembert の公式**, あるいは **ratio test** と呼ばれる定理である。)

問題 73. 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(z-1)^n$

問題 74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 z^n$ の収束半径を求めよ。

問題 75. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}=z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots$ について、以下の問に答えよ。

(1) $|z|<1$ ならば収束することを示せ。 (2) $|z|\geq 1$ ならば収束しないことを示せ。 (3) 収束半径を求めよ。

((3) は (1), (2) からすぐ分かる。ちなみに d'Alembert の公式は使えない。$\limsup$ を知っているのならば、問 77 の Cauchy-Hadamard の公式を使うことが出来る。)

問題 76. (上極限 $\limsup$ を学んでいる人向け) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n=S$ とはどういうことか定義を述べよ。

以下、冪級数の収束半径を扱うときは、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ と約束する。

問題 77. (上極限を学んでいる人向け) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径は、$\rho:=\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ であること (**Cauchy-Hadamard の公式**) を示せ。

(上極限を学んでいない人向け) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するならば、$\rho:=\dfrac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ がこの冪級数の収束半径であることを示せ。

問題 78. (教科書の演習問題 p. 46) 以下の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}z^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

問題 79. (1) 任意の自然数 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$ を示せ。 (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ を示せ。

(Cauchy-Hadamard の公式の利用は、この講義としては特に推奨しない[2]。用いるためには、いくつか準備をしておく必要があり、この問の結果もそれらのうちの一つ。)

問題 80. 次の冪級数はいずれも収束半径が 1 であるが、収束円周 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 上の点での収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

((2) が解けるようになって欲しい。この問題を解く場合に限らず「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が収束 $\Leftrightarrow \alpha>1$」は忘れないこと (解析学の常識)。(3) は、ちょっと高級で Abel の級数変形法を使う[3]。)

冪級数の項別微分可能性、正則性、展開の一意性

[2]複素関数論としては、他に学ぶべき重要なことがたくさんあり、そちらの学習に時間を割くことを勧める。
[3]院試で出題されたりします。

問題 81. 収束冪級数について “係数比較” が可能なこと、つまり $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と $\{b_n\}_{n\geq 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n \quad (|z-c| < r)$$

が成り立てば、$a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることを示せ。

Taylor 展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$ は冪級数展開であるが、冪級数展開はこの問題で見たように一通りしかないので、どういうやり方であっても冪級数の形に変形できれば、それは Taylor 展開である。

問題 82. (1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\dfrac{1}{z+4}$　(b) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$　(c) $\dfrac{1}{z^2+1}$　(d) $\mathrm{Tan}^{-1}\, z$　(e) $\dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}$

((b),(d) は微分積分を考えてみる。(e) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

問題 83. $e^z, \cos z, \sin z$ を冪級数で定義するとき、$(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ を確かめよ。

問題 84. (e^z を冪級数で定義したとき) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ であることを示せ。

問題 85. $z \in \mathbb{C}$ に対して $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

問題 86. 次の冪級数の和を求めよ ($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ を用いずに表せ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$　(結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ が求まる。)

問題 87. $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ $(|z| < 1)$, $f(0) = 0$ を満たす f を冪級数を用いて求めよ。

問題 88. (1) $f(z) = e^z$ が $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ を満たすことを用いて、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、$f(z)f(c-z) = f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $e^a e^b = e^{a+b}$ であることを示せ。

(式変形による (2) の証明も知られているが、(1) から導ける。なお、指数関数の指数法則や三角関数の加法定理は、後で学ぶ「一致の定理」を用いる証明も有名である。)

問題 89. 任意の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と、任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して、2 つの冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p} \quad \left(= \sum_{n=p}^{\infty} a_{n-p}(z-c)^n\right)$$

の収束発散は一致する (収束する $z \in \mathbb{C}$ 全体の集合が等しい)。特に収束半径、収束円も一致する。 — 以上を証明せよ。

問題 90. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 であるとするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\rho_1 \neq \rho_2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ である。

(2) $\rho_1 = \rho_2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_1 以上である。収束半径が ρ_1 より大きくなる例をあげよ。

一様収束

収束の問題は、あまりうるさく言わないことにするが (定理の証明はきちんと講義し、それを理解するよう努力してもらうが、試験でそういう問題の比重は高くしない)、理解の手助けのために。

問題 91. $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x < -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}) \\ 1 & (x > \frac{1}{n}) \end{cases}$$

で $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定めるとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。$\{f_n\}$ は一様収束するかどうか (根拠をつけて) 答えよ。

問題 92. $K = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$, $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N},\, x \in K)$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x \in K$ とするとき、$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K では一様収束しないが、$0 < R < 1$ なる任意の R に対して、$[0, R]$ では一様収束することを示せ。

初等関数

問題 93. 以下の方程式を ($\mathbb{C}$ 内で) 解け (解を書くのは簡単なものが多いが、漏れがないことが分かるように解くこと)。
(1) $e^z = 1$　(2) $e^z = -1$　(3) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$　(4) $\sin z = 0$　(5) $\sin z = 2$

ヒント: (1),(2),(3) は複素関数の log を使っても良いし、$\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いて、実関数 e^x, $\cos y$, $\sin y$ の話に持ち込んでも良い。(後者の方が後々忘れにくいとは思うけれど、どちらでもよい。) (4) と (5) は e^{iz} の話に持ち込む。

問題 94. $\cos z$, $\sin z$ の加法定理を証明せよ。

問題 95. (1) $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i \sin z$, $\tanh(iz) = i \tan z$, $\coth(iz) = -i \cot z$ であることを示せ。
(2) $\cos(iz) = \cosh z$, $\sin(iz) = i \sinh z$, $\tan(iz) = i \tanh z$, $\cot(iz) = -i \coth z$ であることを示せ。

問題 96. (逆三角関数、逆双曲線関数は、$\sqrt{\ }$ や log を使って表せることを理解するための問題)

(1) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sinh z$ を満たす z を求めよ (w で表せ)。ただし $\sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ とする。(arcsinh という記号は用いず、四則と $\sqrt{\ }$ で表すこと。)

(2) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sin z$ を満たす z を求めよ。(arcsin や $\sin^{-1}$ という記号は用いず…)

(3) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \tan z$ を満たす z を求めよ。(arctan や $\tan^{-1}$ という記号は用いず…)

解答

解答 63. 以下 $a \equiv b$ は $a \equiv b \pmod 4$ という合同式の略記とする。

(1) $f(x) = \sin x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \equiv 0) \\ \cos x & (n \equiv 1) \\ -\sin x & (n \equiv 2) \\ -\cos x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0) \\ 1 & (n \equiv 1) \\ 0 & (n \equiv 2) \\ -1 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が奇数}, n = 2k+1) \end{cases}$$

であるから

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(2) $f(x) = \cos x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n \equiv 0) \\ -\sin x & (n \equiv 1) \\ -\cos x & (n \equiv 2) \\ \sin x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0) \\ 0 & (n \equiv 1) \\ -1 & (n \equiv 2) \\ 0 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が偶数}, n = 2k) \end{cases}$$

であるから

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(3) $f(x) = e^x$ とおく。$f'(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ であるから、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(4) $f(x) = x^\alpha$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

であるから、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される一般 2 項係数である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(5) $f(x) = \log(1+x)$ とおく。$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ であるから、

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+1)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

(6) 等比級数の和の公式から

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

項別積分することで (これは微積分の範囲外になるかもしれない)

$$(\natural)\qquad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad (|x|<1).$$

あるいは (項別積分を避けたければ)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$$

を積分して

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\int_0^x\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt.$$

ここで $|x|<1$ に範囲を限定して、$n\to\infty$ とすることで ($\natural$) が得られる (右辺第 1 項は交代級数だから収束するとか、右辺第 2 項の積分は 0 に収束するとか、少し議論が必要であるが、難しくない)。

一般に「関数が収束する冪級数に展開されたら、その関数は Taylor 展開が可能で、その冪級数が Taylor 展開に一致する」という命題が成り立つので、($\natural$) が $\arctan x$ の Taylor 展開である。■

得られた級数の収束半径のチェックと (これは比較的簡単)、剰余項が 0 に収束することの証明も良い演習問題である。後者は (1), (2), (3), (5) は比較的簡単で、(4) は難し目。(6) は等式が成り立つことは示してあるので、剰余項が 0 に収束することを証明する必要がない (Lagrange の剰余項は書くのが難しいが、しないで済むので問題ない)。 ■

解答 64. (1) 2 項定理 $(1+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k$ により、$n\geq 2$ のとき $(1+h)^n=1+nh+\cdots$. 右辺の $\cdots$ の各項は 0 以上であるから、$(1+h)^n\geq 1+nh$. $n=1$ のときも成り立つ。

(2) $h:=r-1$ とおくと、$h>0$, $r=1+h$. ゆえに $r^n=(1+h)^n\geq 1+nh$. $\lim_{n\to\infty}n=+\infty$ であるから、$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$. ゆえに $\lim_{n\to\infty}r^n=+\infty$.

(3) $h:=1/r-1$ とおくと、$h>0$, $r=\dfrac{1}{1+h}$ であるから、$0\leq r^n=\dfrac{1}{(1+h)^n}\leq\dfrac{1}{1+nh}\leq\dfrac{1}{nh}$. $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{nh}\to 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、$r^n\to 0$. (4) (1) と同様にして、$n\geq 2$ のとき、$(1+h)^n\geq n(n-1)h^2/2$ が示せる。$h:=1/r-1$ とおくと、$h>0$, $r=\dfrac{1}{1+h}$ であるから、$0\leq nr^n=\dfrac{n}{(1+h)^n}\leq\dfrac{2n}{n(n-1)h^2}=\dfrac{2}{(n-1)h^2}$. $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{(n-1)h^2}\to 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、$nr^n\to 0$. ■

解答 65.

(1) まず結果を述べる。

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}0 & (|r|<1\ \text{のとき})\\ 1 & (r=1\ \text{のとき})\\ \text{発散} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

- $|r|<1$ の場合は $|r^n-0|=|r|^n\to 0$ $(n\to\infty)$ であるから $r^n\to 0$ $(n\to\infty)$.
- $r=1$ の場合は $r^n=1\to 1$ $(n\to\infty)$ は明らか。
- $|r|=1$ かつ $r\neq 1$ の場合は、

  $$\left|r^n-r^{n+1}\right|=|r^n|\,|1-r|=|1-r|\neq 0$$

  であるから、$n\to\infty$ のとき r^n は収束しない (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$\left|r^n-r^{n+1}\right|\to|c-c|=0$ となるはずで矛盾する)。
- $|r|>1$ の場合は $|r^n|=|r|^n\to\infty$ であるから、r^n は発散する (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$|r^n|\to|c|$ であり、矛盾する。)。

(2) 等比数列の和の公式から、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n}r^j=\begin{cases}\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & (r\neq 1)\\ n+1 & r=1\end{cases}$$

が成り立つので (1) の結果から

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & (|r|<1) \\ \text{発散} & (|r|\geq 1). \blacksquare \end{cases}$$

解答 66. (数学解析講義ノート[4] が参考になる。)

(1) 収束列が有界というのは、実数列の場合に命題 2.9 (p. 20) で述べて、証明も書いてある。それと同様にやれば良い。

(2) Cauchy 列の有界性は独立した命題としては書いていなかった (命題 5.11 の証明の中で証明してある) ようなので、ここには書いておく。$\{a_n\}$ が Cauchy 列であれば、ある自然数 N が取れて

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。これから $n \geq N$ を満たす任意の n に対して (特に $m = N$ と選ぶことで)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a_N| < 1.$$

これから

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|.$$

そこで

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

とおくと、$M \in \mathbb{R}$ であり、任意の自然数 n に対して

$$|a_n| \leq M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。 $\blacksquare$

解答 67. (1) $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束して和が s であるとは、$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ということを意味する。今の場合、仮定から $(\exists s \in \mathbb{C})$ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. このとき、 $a_n = s_n - s_{n-1}$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$ (2) これは (1) の対偶であるから成り立つ。 (3) $a_n = \dfrac{1}{n}$ とするとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないが、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\blacksquare$

解答 68. (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。 (2) (準備中。講義ノートには書いてあります。) $\blacksquare$

解答 69. (1) 「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数列で、2 条件 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \leq b_n$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する、を満たすならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。」

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の n 項までの部分和をそれぞれ S_n, T_n とおく: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. $n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \sum_{k=n}^{n} |a_k| - \sum_{k=n}^{m} |a_k| = T_n - T_m.$$

同様に $n < m$ のとき、$|S_n - S_m| \leq T_m - T_n$. ゆえに n, m の大小によらず

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|.$$

仮定から $\{T_n\}$ は収束するので、$\{T_n\}$ は Cauchy 列である。上の不等式から、$\{S_n\}$ も Cauchy 列である。$\mathbb{C}$ は完備であるから、$\{S_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。$\blacksquare$

[4] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-2015.pdf

解答 70. (1) $A_n := a_n z^n$, $B_n := M|z|^n$ とおくと、$|A_n| = |a_n|\,|z|^n \le M|z|^n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} M\,|z|^n$ は、公比 $|z|$ の等比級数であり、$|z| < 1$ のときこの公比は 1 より小さいので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ は収束する (和は $\dfrac{M}{1-|z|}$)。ゆえに、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。

(2) (宿題にしてあるのでしばらくは見せない。) ■

解答 71. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が冪級数とするとき、次の (i), (ii), (iii) のいずれか一つが成立する。

(i) $(\forall z \in \mathbb{C}\colon\ z \ne c)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は収束しない。

(ii) $(\exists r \in \mathbb{R}\colon\ r > 0)$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は $|z-c| < r$ ならば収束し、かつ $|z-c| > r$ ならば発散する。

(iii) $(\forall z \in \mathbb{C})$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は収束する。

(i) のとき収束半径は 0, (ii) のとき収束半径は r, (iii) のとき収束半径は $+\infty$ という。 ■

解答 72. (準備中)

解答 73.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

ゆえに収束半径は 1 である。収束円は $D(0;1)$.

(2) $a_n = n!$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに収束半径は 0 である。収束円は $\emptyset$.

(3) これは宿題にして、そちらで解説したので後回し。結果だけ書いておくと、収束半径は ∞ で、収束円は $\mathbb{C}$.

(4) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である。収束円は $D(1;1/2)$. ■

解答 74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ は $\zeta = z^2$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ となるので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$|\zeta| < \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n \ \text{収束}, \quad |\zeta| > \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n \ \text{発散}.$$

ゆえに

$$|z^2| < \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \ \text{収束}, \quad |z^2| > \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \ \text{発散}.$$

すなわち

$$|z| < \sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \ \text{収束}, \quad |z| > \sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \ \text{発散}.$$

したがって $\sqrt{\rho}$ が収束半径である。

後半は Cauchy-Hadamard 使わないとちょっと難しいかな。使わせてもらう。
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

正数 r に対して、$\sqrt[n]{r^2} = \left(r^2\right)^{1/n} = \left(r^{1/n}\right)^2$ であるから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

従って収束半径 ρ' は $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{1}{\rho'}$ より $\rho' = \rho^2$. ■

解答 75. この冪級数を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と書くと、

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = k! \text{ となる } k \in \mathbb{N} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$ とするとき、$k! = 1, 2, 6, 24, 120, 720, \cdots$ であるから、$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = a_8 = \cdots = a_{23} = 0$, $a_{24} = 1$, $\ldots$.)

(1) $|z| < 1$ とするとき、

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n \le 1 \cdot |z|^n = |z|^n.$$

$b_n := |z|^n$ とおくと、$\{b_n\}$ は $\{a_n z^n\}$ の優級数で、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

(2) 任意の自然数 n に対して、$a_{n!} = 1$ であるから、

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N} : m \ge n) \quad a_m = 1$$

が成り立つ ($m = n!$ とすれば良い)。特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ではない。ゆえにこの冪級数は $z = 1$ で収束しない (実際、一般項 $a_n z^n = a_n$ は 0 に収束しないから)。

(3) (1), (2) から $\rho := 1$ とするとき、$|z| < \rho$ で収束、$|z| > \rho$ で発散するので、収束半径は 1 である。■

解答 76. 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 a に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

であるとは、次の (a), (b) が成り立つことをいう。

(a) $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)$ $a_n < a + \varepsilon$.

(b) $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon n \ge k)$ $a_n > a - \varepsilon$
(言い換えると、任意の正数 ε に対して $a_n > a - \varepsilon$ を満たす n が無限個存在する。) ■

解答 77. (準備中)

解答 78.

(1) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{\left[(n+1)!\right]^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)^2} = 4.$$

収束半径は 4.

(2) これは問 75 と同様にして解ける (そのあらすじ: $z=1$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$ は成り立たないので、$z=1$ で収束しないが、$|z|<1$ を満たす任意の z に対して $|a_n z^n| \le n|z|^n$ $(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ で、$\sum_{n=0}^{\infty} n|z|^n$ は収束するので、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。以上から収束半径は 1.)。ここでは Cauchy-Hadamard の公式を使って解答してみる。

この冪級数の n 次の係数を a_n とする (すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が成り立つとする) と、

$$a_n = \begin{cases} n & (\exists k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ s.t. } n=2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & (\exists k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ s.t. } n=2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これから $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (証明: $\sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{n}$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 一方 $\forall\varepsilon>0, \forall k\in\mathbb{N}$ に対して、$n := 2^k$ とおくと $n\ge k$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} > 1-\varepsilon$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$.) ゆえに収束半径は $1/1 = 1$.

(3) $a_n := \dfrac{\log n}{n}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}\frac{n+1}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log n}{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1+\dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}} = 1\cdot\frac{1}{1+0/\infty} = 1.\end{aligned}$$

(4) おっと、これは **39** と同じだ (笑)。 ■

解答 79.

(1) 講義ノートの 1.1.4 に書いてある。

(2) 階乗 (より一般にはガンマ関数) を近似するスターリングの公式 (Stirling's approximation, Stirling's formula)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n\to\infty)$$

(この意味は、$n\to\infty$ のとき $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \to 1$ ということ) を知っていれば直接証明するのは簡単だけど、微積分で習ったかな…

　というわけで、スターリングの公式を使わないでやってみよう。冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

を考える。この冪級数の収束半径は、$a_n := n!$ とおくとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

であることから 0 である。Cauchy-Hadamard の公式から

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ は単調増加数列である。実際

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{n(n+1)} = \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n\cdot(n!)^n}{n!\cdot(n!)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdots\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{1} > 1$$

であるから、$\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} > \sqrt[n]{|a_n|}$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty. \blacksquare$$

解答 80.

(1) 一般に、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを思い出そう。$a_n = z^n$ についてこれを用いる。

$|z| = 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} |z^n| = 1$ であるので、$\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ は成り立たない。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は収束しない。

(2) $M_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

- $|z| = 1$ を満たす任意の z と、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2} \le M_n$. (等号が成り立つけれど、定理にあてはめるため、不等号で書いてみた。どちらで書いても間違いではない。)
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ は収束する (これは常識、和が $\pi^2/6$ であることは忘れても、収束することは忘れてはいけない)。

Weierstrass の M-test (という定理) により、$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ は $|z| = 1$ で一様に絶対収束する。

(3) 結果だけ先に書いておくと、$z = 1$ では発散、$|z| = 1$ かつ $z \neq 1$ では収束する。

$|z| = 1$ とするとき、$\left|\dfrac{z^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ で、$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は収束しないので、$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ は絶対収束しない。だから微妙なケースである。$z = 1$ では ($\dfrac{z^n}{n} = \dfrac{1}{n}$ なので) 収束しないが、$z = -1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

はいわゆる交代級数に関する Leibniz の定理により収束することが分かる (実は和は $-\log 2$)。Abel の級数変形法 (これは講義できない年度もある) を用いると、$|z| = 1,\ z \neq 1$ を満たす任意の z に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ は収束することを示せる。 ■

解答 81. $|z - c| < r$ を満たす z に対して、$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$ とおくと、$f\colon D(c;r) \to \mathbb{C}$ は正則で、冪級数の項別微分定理から、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

が得られる。これは $\{b_n\}$ についても同じで

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

ゆえに任意の n に対して $a_n = b_n$. ■

解答 82. (1) (なるべくゆっくりと式変形する。目標は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の形にする (a_n を求める) ことである。)

(a) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$ であるから、収束半径は 4.

(b) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i+z} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{1+iz} = i \cdot \frac{1}{1-(iz)} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n$$

である。収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow |-iz|<1 \Leftrightarrow |z|<1$ であるから、収束半径は 1. これから、

$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} i^{n+1} n z^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m i^{m+2}(m+1)z^m = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+2}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} i^n (n+1)z^n.$$

収束半径は項別微分しても変わらないので、1.

(c) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

a_n を

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)) \end{cases}$$

で定めると、

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|-z^2\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1.

(d) $\left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \frac{1}{z^2+1}$ である。特に $\mathrm{Tan}^{-1} z$ は 0 の近傍で正則であるから、$z=0$ のまわりで Taylor 展開できる:

$$\mathrm{Tan}^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z| < \exists r).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n = \left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

ただし a_n は (c) で出て来たものである。ゆえに

$$(n+1)b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k+1\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

(e) $f(z) := \dfrac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z - 6}$ とおく。$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z - 6$ で割ると、商 $z+2$, 余り $3z-7$ であるから、

$$f(z) = z + 2 + \frac{3z-7}{z^2-5z-6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z - 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z-7}{z^2-5z-6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A = 1$, $B = 2$. ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

$z+2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2).$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3).$$

$f(z)$ の $z=0$ のまわりの Taylor 展開の収束半径は、0 と $\{2,3\}$ との距離 2 である。そして、

$$\begin{aligned} f(z) &= z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= \left(2-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}-2\cdot\frac{1}{3^2}\right)z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n \\ &= \frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

(2) 目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$ の形に表すことである。

等比級数の和の公式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n. \end{aligned}$$

収束 $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $|<1$ $\Leftrightarrow$ $\left|-\dfrac{z-1}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<4$ であるから、収束半径は 4. ■

解答 83. どれでも同じだから、一つだけやっておく。

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

である。$n\in\mathbb{N}$ のとき $(z^n)'=nz^{n-1}$, $n=0$ のとき $(z^n)'=(1)'=0$ であるので

$$(e^z)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}=e^z.■$$

解答 84. (念のため状況の説明: 講義では早めに指数関数を使いたかったので、$e^{x+iy}:=e^x(\cos y+i\sin y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$ と定めたが、ここでは $e^z:=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ を定義し、この冪級数の収束半径が ∞ であることは確認済みとする。また、指数法則も証明済みとする。 — 問題の配列がまずかったかな？)

まず指数法則により、

$$e^{x+iy}=e^xe^{iy}.$$

絶対収束するので、偶数番目、奇数番目で分けることが出来て、

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}y^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}=\cos y+i\sin y.$$

ゆえに $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. ■

解答 85. 冪級数展開

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

を使って証明する。(こういう問題は何を使ってよいかで解答の仕方が異なるので、本当は問題文にそれを書かないといけない。一致の定理を使って証明せよ、という問題もあり得る。)

k を整数とするとき、

$$i^n=\begin{cases} 1 & (n\equiv 0 \pmod 4) \\ i & (n\equiv 1 \pmod 4) \\ -1 & (n\equiv 2 \pmod 4) \\ -i & (n\equiv 3 \pmod 4) \end{cases},\quad i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k$$

であるから

$$i^n+(-i)^n=[1+(-1)^n]\,i^n=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ 2\cdot i^n & (n\text{ が偶数})\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ (-1)^k 2 & (n\text{ が偶数}, n=2k),\end{cases}$$

$$i^n-(-i)^n=[1-(-1)^n]\,i^n=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ 2\cdot i^n & (n\text{ が奇数})\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ (-1)^k 2i & (n\text{ が奇数}, n=2k+1).n\end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n+(-i)^n}{2}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cos z,$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n-(-i)^n}{2i}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin z.\blacksquare$$

解答 86.

(1) 公比が z の等比級数であるから、収束の条件は $|z|<1$ で、そのとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}.$$

収束円は $D(0;1)$.

(2) (1) の冪級数を項別に微分したものであるので

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(-(z-1)^{-1}\right)'=(z-1)^{-2}=\frac{1}{(z-1)^2}.$$

収束円は (1) と同じで $D(0;1)$.

(3) (2) の冪級数に z をかけたものになっている。

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=z\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\frac{z}{(z-1)^2}.$$

収束円は (2) と同じで $D(0;1)$.

(4) (3) の級数を項別微分して z をかけたものである。

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n=z\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}nz^n\right)'=z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)'=z\frac{(z-1)^2\cdot 1-2(z-1)\cdot z}{(z-1)^4}=z\frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3}=-\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

収束円は (3) と同じで $D(0;1)$. $\blacksquare$

要するに「n をかける $\longleftrightarrow$ 微分して z をかける」ということ。数学検定の問題見本で見かけた「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ を求めよ。」という問題を来年度は問題に含めよう。

ちなみに Mathematica はこういう級数の和を計算してくれる。収束条件は表示してくれないが、簡略の検算にはなる。`Sum[n^2 z^n,{n,1,Infinity}]`) とすると $-\dfrac{z(1+z)}{(-1+z)^3}$ という結果を返す。 $\blacksquare$

解答 87. (準備中) $\blacksquare$

解答 88.

(1) $F(z):=f(z)f(c-z)$ とおく。積の微分法と合成関数の微分法と仮定 $f'=f$ により

$$\begin{aligned}F'(z)&=(f(z)f(c-z))'=(f(z))'\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(f(c-z))'=f'(z)f(c-z)+f(z)(-f'(c-z))\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0.\end{aligned}$$

ゆえに F は定数関数である。$F(0)=f(0)f(c)=1\cdot f(c)=f(c)$. ゆえに $F(z)\equiv f(c)$. すなわち $f(z)f(c-z)\equiv f(c)$.

(2) ((1) で言っているのは、$(\forall c\in\mathbb{C})\ (\forall z\in\mathbb{C})\ f(z)f(c-z)=f(c)$ ということである。)

任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して、$c=a+b,\ z=a$ とおくと、$c-z=b$ であるから、$f(a)f(b)=f(a+b)$. すなわち $e^a e^b=e^{a+b}$. ■

解答 89. どちらの冪級数も、$z=c$ に対しては収束する。$z\neq c$ の場合を考える。

次が成り立つことに注意する。「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ が収束するならば、任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda A_n$ も収束し、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda A_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}A_n$.」

任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して、$\lambda=(z-c)^p$ として適用することで、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^{n+p}$ も収束することが分かる。

任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して、$\lambda=(z-c)^{-p}$ として適用することで、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^{n+p}$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ も収束することが分かる。

結局、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^{n+p}\ \text{が収束する}\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\ \text{も収束する}$$

が成り立つ。特に 2 つの冪級数の収束半径、収束円は一致する。■

解答 93. (実関数としての指数関数と、複素関数としての指数関数を区別するため、前者を e^x, 後者を $\exp z$ と表す約束で書いてみる。 — ここだけのローカル・ルール)

(1) (log がどういうものかまだ知らない場合の解答) z の実部と虚部をそれぞれ $x,\ y$ と表す。$\exp z=\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$ で、$|\exp z|=e^x$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\exp z=1 &\Leftrightarrow e^x(\cos y+i\sin y)=1\\ &\Leftrightarrow e^x=1\quad\text{and}\quad\cos y+i\sin y=1\\ &\Leftrightarrow e^x=1\quad\text{and}\quad\cos y=1\quad\text{and}\quad\sin y=0\\ &\Leftrightarrow x=0\quad\text{and}\quad(\exists n\in\mathbb{Z})\quad y=2n\pi\\ &\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=2n\pi i.\end{aligned}$$

(log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log 1$ は何か、という問題である。$1=1e^{i0}$ が 1 の極形式であるから

$$\log 1=\log 1+i(0+2n\pi)=2n\pi i\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(2) (log がどういうものかまだ知らない場合の解答) $\exp\pi i=-1$ であるから、

$$\begin{aligned}\exp z=-1 &\Leftrightarrow \exp z\exp\pi i=1\\ &\Leftrightarrow \exp(z+\pi i)=1\\ &\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z+\pi i=2n\pi i\\ &\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=(2n-1)\pi i.\end{aligned}$$

(log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log(-1)$ は何か、という問題である。$-1=1e^{i\pi}$ が -1 の極形式であるから

$$\log(-1)=\log 1+i(\pi+2n\pi)=(2n+1)\pi i\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

(3) $\sin z=\dfrac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin z=0 &\Leftrightarrow \exp(iz)-\exp(-iz)=0\\ &\Leftrightarrow \exp(2iz)=1\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}\quad\text{s.t.}\quad 2iz=2n\pi i\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}\quad\text{s.t.}\quad z=n\pi.\end{aligned}$$

(あるいは $w := \exp(iz)$ について $w - \frac{1}{w} = 0$ から、$w^2 - 1 = 0$. これから $w = 1$ または $w = -1$. 前者から $z = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, 後者から $z = (2m-1)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$. まとめて $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.)

(4) $\sin z = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ であるから、途中で $w := \exp(iz)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = 2 \\
&\Leftrightarrow \exp(iz) - \exp(-iz) = 4i \\
&\Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 4i \\
&\Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow w = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 - (-1)} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{\pi i/2}.
\end{aligned}$$

ただし、$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とするとき、

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が成り立つことを用いた。

$r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\exp z = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned}
\sin z = 2 &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad iz = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - i\log\left(2 \pm \sqrt{3}\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 94. 任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して (途中で $w_1 := e^{z_1}$, $w_2 := e^{z_2}$ とおいて)

$$\begin{aligned}
&\cos(z_1 + z_2) - (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\
&\quad = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} - \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[w_1 w_2 + \frac{1}{w_1}\frac{1}{w_2}\right] - \frac{1}{4}\left[\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right) + \left(w_1 - \frac{1}{w_1}\right)\left(w_2 - \frac{1}{w_2}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{4w_1 w_2}\left(2w_1^2 w_2^2 - (w_1^2 + 1)(w_2^2 + 1) - (w_1^2 - 1)(w_2^2 - 1)\right) \\
&\quad = \frac{1}{4w_1 w_2}\left(2w_1^2 w_2^2 - (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 + w_2^1 + 1) - (w_1^2 w_2^2 - w_1^2 - w_2^2 + 1)\right) = 0
\end{aligned}$$

より $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$. sin についても同様に出来る。 $\blacksquare$

解答 95.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\cosh(iz) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \\
\sinh(iz) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i\sin z, \\
\tanh(iz) &= \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i\sin z}{\cos z} = i\tan z, \\
\coth(iz) &= \frac{1}{i\tan z} = -i\cot z.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\cos(iz) &= \cosh\left(i^2 z\right) = \cosh(-z) = \cosh z, \\
\sin(iz) &= \frac{1}{i}\sinh\left(i^2 z\right) = -i\cdot\sinh(-z) = i\sinh z, \\
\tan(iz) &= \frac{1}{i}\tanh(i^2 z) = -i\cdot\tanh(-z) = i\tanh z, \\
\cot(iz) &= \frac{1}{-i}\coth(i^2 z) = i\cdot\coth(-z) = -i\coth z.\blacksquare
\end{aligned}
$$

解答 96.

(1) $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ であるから、$Z := e^z$ とおくと、$w = \dfrac{Z - 1/Z}{2}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2wZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = w \pm \sqrt{w^2+1}.$$

$z = 0$ のとき、$Z = e^z = 1$, $w = \sinh z = 0$ であるので、$w = 0$ の十分小さな近傍に対して $Z = 1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合は $Z = w - \sqrt{w^2+1}$ は不適で、$Z = w + \sqrt{w^2+1}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = w + \sqrt{w^2+1}.$$

これから

$$z = \log Z = \log\left(w + \sqrt{w^2+1}\right).$$

(log は多価だから、1 つの w に複数の w が対応することが分かる。)

(2) (上とほぼ同様で) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であるから、$Z := e^{iz}$ とおくと、$w = \dfrac{Z - 1/Z}{2i}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2iwZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = iw \pm \sqrt{1-w^2}.$$

$z = 0$ のとき、$Z = e^{iz} = 1$, $w = \sin z = 0$ であるので、$w = 0$ の十分小さな近傍に対して $Z = 1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合は $Z = iw - \sqrt{1-w^2}$ は不適で、$Z = iw + \sqrt{1-w^2}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = iw + \sqrt{1-w^2}.$$

これから

$$iz = \log Z = \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

ゆえに

$$z = -i\log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

(3) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\cdot\dfrac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$ であるから、$Z := e^{iz}$ とおくと、

$$w = -i\frac{Z - 1/Z}{Z + 1/Z} = -i\frac{Z^2-1}{Z^2+1}.$$

これは Z^2 についての 1 次方程式で、解は $Z^2 = \dfrac{1+iw}{1-iw}$. これから

$$Z = \sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}}.$$

上と同様に、$w = 0$ の十分小さな近傍に $Z = 1$ の近傍が対応するようにするには、$\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合、$Z = -\sqrt{\dfrac{1+iw}{1-iw}}$ は不適である。

$$iz = \operatorname{Log} Z = \log\sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}} = \frac{1}{2}\left(\log(1+iw) - \log(1-ix)\right).$$

ゆえに

$$z = \frac{i}{2}\left(\log(1-iw) - \log(1+iw)\right).\blacksquare$$

少しもやもやしたところは残るが、現時点で分かったことを整理してみると、

- 指数関数、三角関数、双曲線関数は、実関数を自然に複素関数に拡張できる。それら間に成り立つ関係式などは、複素関数でもそのまま成り立つ。
- おそらく

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} w &= \log\left(w + \sqrt{w^2+1}\right), \\
\arcsin w &= -i \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right), \\
\arctan w &= \frac{i}{2}\left(\log(1-iw) - \log(1+iw)\right)
\end{aligned}$$

  と定義することになるのだろう。

- 指数関数、三角関数、双曲線関数の逆関数も複素関数に拡張できるが、多価性を持つ (のが普通であるらしい)。
- 対数関数は既に一定のレベルで解決している。
- 逆三角関数、逆双曲線関数は、対数関数と (補助的に) $\sqrt{\ }$ を用いて表示できる (らしい、全部確かめたわけではないが)。
- — ということは、対数関数の多価性 (これは既にはっきりわかっている) と $\sqrt{\ }$ の多価性が良く分かれば、逆三角関数と逆双曲線関数の多価性も理解できそうだ。