2016年度複素関数 問の解説

桂田 祐史

2017年1月8日, 2017 年2 月3 日

解答は、普段授業前に大急ぎで準備したメモをかき集めたもので、誤植が残っている可能性が高いです。おかしいと思ったらメール下さい (katurada AT meiji.ac.jp)。気づいたものは適宜直しますが、どこを直したかは、末尾の「訂正の記録」を見て下さい。

問1 (1) $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 3+4i$ とするとき、z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $\operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Im} z_1$, $\bar{z}_1$ を求めよ ($x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ の形に表せ)。
(2) $z^2 = 1+\sqrt{3}i$ を満たす複素数 z を求めよ ($z = x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とおいて、x, y に関する連立方程式を導いて、それを解け)。

問2 (1) $\cos 3\varphi$, $\sin 4\varphi$ を $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ で表せ (答は一通りではないが、どれか一つで OK)。
(2) $z = \sqrt{2}-\sqrt{6}i$ の極形式を求めよ。
(3) $z = re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ とするとき、$\overline{z}$ と $\dfrac{1}{z}$ の極形式を求めよ。
(4) $\cos\dfrac{\pi}{8}$ と $\sin\dfrac{\pi}{8}$ を、複素数の平方根を計算して求めよ。(三角関数の半角の公式を使って解けるが、$z = \cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ とおくと、$z^2 = \cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ であることを利用して計算してみよう)。

問3 1 と -1 の 8 乗根を、(a) 指数形式を利用する方法, (b) 方程式 $z^n = 1$, $z^n = -1$ を代数的に解く方法 (ここでは因数分解、2次方程式の解の公式等を使うこと) の両方で求め、複素平面上に図示せよ。

問4 (1) 以下の各 $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求めよ。
(a) $f(z) = z^2+z+1$ $(\Omega=\mathbb{C})$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ $(\Omega = \mathbb{C}\setminus\{1\})$ (c) $f(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $(\Omega=\mathbb{C})$

(2) 正則関数 $f(z)$ の実部・虚部を $u(x,y)$, $v(x,y)$ とするとき、$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y)\\ v(x,y)\end{pmatrix}$ とおくと、$\det\boldsymbol{f}' = |f'|^2$ が成り立つことを示せ。

問5 (1) 次の冪(ベキ)級数の収束半径と収束円を求めよ。

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n)!z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}(z-1)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{3n+1}}{2^n}$

(2) (授業中に説明した問題) 集合 Ω で定義された複素関数列 $\{a_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ と数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、$|a_n(z)|\le M_n$ $(n\in\mathbb{N},\ z\in\Omega)$ が成り立つとする。このとき $T_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k$, $S_n(z) :=$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k(z)|$, $s_n(z) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k(z)$ $(n \in \mathbb{N},\, z \in \Omega)$ とおくと、任意の $n, m \in \mathbb{N},\, z \in \Omega$ に対して、$|s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$ が成り立つことを示せ。

問 6　(1) 次の各関数を 0 のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ (慣れるため、等比級数の和の公式を使うこと)。

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$　(b) $g(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2}$　(c) $h'(z) = \dfrac{1}{1+z}$, $h(0) = 0$ を満たす h (実は、この h は後で定義する $\mathrm{Log}(1+z)$ に等しいが、そのことを使う必要はない。)　(d) $r(z) = \dfrac{z^3 - 5z^2 + 10z - 14}{z^2 - 6z + 8}$

(2) $F(z) = \dfrac{1}{z+4}$ を -1 のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問 7　(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ。　(2) (11/8 の講義で説明するように) 冪級数で e^z, $\cos z$, $\sin z$ を定義したとき、$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ が成り立つことを示せ。

(3) (a) $f(z) = e^z$ が $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ を満たすことを用いて、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、$f(z)f(c-z) = f(c)$ であることを示せ。(b) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $e^a e^b = e^{a+b}$ であることを示せ。

問 8　(1) 以下の方程式を複素数の範囲で解け。

(a) $e^z = 1 + i$　(b) $\sin z = 1$　(c) $\cos z = 3i$

(2) $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ に対して、$a^b := e^{b \log a}$ と定めるとき、i^i を求めよ。ただし、$\log z$ は $e^w = z$ を満たす w のすべてを表す無限多価関数とする。

問 9　(2), (3) は閉曲線で、向きに言及していないので正の向きと解釈して解いて下さい。

(1) $C\colon z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ とするとき、$\displaystyle\int_C \frac{1}{\bar{z}}\, dz$　(2) $r > 0$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c}$

(3) $r > 0$, $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \ne -1$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-c|=r} (z-c)^n\, dz$

(4) 次の各曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}\, z\, dz$ を求めよ。

(i) 0 から 1, そして 1 から $1+i$ に至る折れ線　(ii) 0 から i, そして i から $1+i$ に至る折れ線　(iii) 0 から $1+i$ に至る線分

(5) a を正の数とする。4 点 $-a-ai$, $a-ai$, $a+ai$, $-a+ai$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する曲線を $\mathit{\Gamma}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\mathit{\Gamma}} \mathrm{Re}\, z\, dz$, $\displaystyle\int_{\mathit{\Gamma}} (3z^2 + iz - 4)dz$ を求めよ。

問 10　以下の問に答えよ。領域はなるべく式で表すこと (それが出来ない場合は図で示すこと)。「○○であること」、「□□でないこと」に根拠を書くように努力すること。

(1) 凸である領域 $(\subset \mathbb{C})$ の例をあげよ。

(2) 凸でないが星型である領域 $(\subset \mathbb{C})$ の例をあげよ。

(3) 星型でないが単連結である領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例をあげよ。

(4) 単連結でない領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例をあげよ。

問 11　円盤における Cauchy の積分公式 (12/5 講義) を用いて、以下の積分の値を求めよ。定理をどのように適用するか説明すること。

(1) $a, c \in \mathbb{C}, r > 0, |a-c| < r$ のとき $\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a}$　(2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)}$　(3) $\displaystyle\int_{|z+3|=2} \frac{dz}{z(z+2)}$

注: この講義では、円盤における Cauchy の積分公式の定理を、(1) の結果を用いて証明したので、循環論法の恐れがあるが、それは気にしないで適用すること。

問 12　(1) 加法定理 $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ $(z, w \in \mathbb{C})$ を、実三角関数の加法定理と、一致の定理を用いて証明せよ。(2) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$ を実数 c のまわりで冪級数展開 (Taylor 展開) するときの収束半径を求めよ。ただし冪級数展開そのものは実行しないで求めること。

問 13　$f(z) = \dfrac{z^3 - z^2 - 8z + 16}{(z-1)(z-3)^2}$ について以下の問に答えよ。($f(z)$ の部分分数分解が分からなければ、Mathematica で `Apart[(z^3-z^2-8z+16)/((z-1)(z-3)^2)` とした結果を用いよ。)

(1) 3 のまわりの Laurent 展開とその収束範囲 (どの円環領域で収束？)、主部、留数

(2) 円環領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z-3| < +\infty\}$ における Laurent 展開

(3) (Laurent 展開を用いずに答えよ。) f の孤立特異点をすべて求めよ。極の場合は位数を求めよ。

問 14　(1) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z-2)(z-3)^4}$ のとき、$\mathrm{Res}(f; 1)$, $\mathrm{Res}(f; 2)$, $\mathrm{Res}(f; 3)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(z) = \dfrac{\tan z}{z}$ の極とその位数、その点における留数を求めよ。

問 15　以下の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin \pi x}{x^2+4} dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta + \sin\theta}$

問 1 解説　(1) さすがに四則は簡単？

$z_1 + z_2 = (1-2i) + (3+4i) = (1+3) + (-2+4)i = 4+2i,$
$z_1 - z_2 = (1-2i) - (3+4i) = (1-3) + (-2-4)i = -2-6i,$
$z_1 z_2 = (1-2i)(3+4i) = 1\cdot 3 + 1\cdot 4i - 2i\cdot 3 - 2i\cdot 4i = 3+4i-6i+8 = 11-2i,$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1-2i}{3+4i} = \dfrac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{1\cdot 3 + 1\cdot(-4i) - 2i\cdot 3 + 2i\cdot 4i}{3^2+4^2} = \dfrac{3-4i-6i-8}{25} = \dfrac{-1-2i}{5}.$

$$|z_1| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

$$\operatorname{Re} z_1 = 1, \quad \operatorname{Im} z_2 = -2, \quad \overline{z_1} = 1+2i.$$

(2) $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから、

$$z^2 = 1 + \sqrt{3}i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = \sqrt{3}.$$

$2xy = \sqrt{3}$ より、$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して、

$$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると ($\pm$ の $-$ は不適となって)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4\cdot 3}}{4} = \frac{3}{2}.$$

(あるいは $(2x^2-3)(2x^2+1) = 0$ から $x^2 = \dfrac{3}{2}$.)
　ゆえに

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

これから

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \quad (\text{分母の有理化をすると } \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2}).$$

練習用の類題: $z^2 = 1 + i$ の解は $z = \pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i\right)$. ■

問 2 解説　どれも重要だけれど、重要度の順にならべると、(2), (4), (3), (1) かな (時間のないときの参考に)。

(1)

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi\cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\cos 3\varphi = \operatorname{Re}(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

また

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 \\ &= \cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi\cdot i\sin\varphi + 6\cos^2\varphi\cdot i^2\sin^2\varphi + 4\cos\varphi\cdot i^3\sin^3\varphi + i^4\sin^4\varphi \\ &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + i\left(4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin\varphi^3\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\sin 4\varphi = \mathrm{Im}(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi.$$

(2) $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}ii$ のとき、$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$.

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

を満たす θ として、$\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ が取れる[1]。ゆえに

$$\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad (\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} \text{ などでも良い。}).$$

(3) 結論を先に書くと、$z = re^{i\theta}$ のとき、$\overline{z} = re^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. 証明の仕方は色々ある。以下は一例である。

前者の証明: $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$ で、$r\cos\theta, r\sin\theta \in \mathbb{R}$ であるから、$\overline{z} = r\cos\theta - ir\sin\theta = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$.

後者の証明: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{re^{-i\theta}}{r^2} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$.

あるいは $r=1$ の場合の、$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ を先にやっておいて、$\overline{re^{i\theta}} = \overline{r}\cdot\overline{e^{i\theta}} = re^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ (ここで $\dfrac{1}{r} > 0$ を確認).

(4) $x := \cos\dfrac{\pi}{8}$, $y := \sin\dfrac{\pi}{8}$, $z := x + iy$ とおくと、

$$z^2 = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

一方、$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\cdot 2xy$ から

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

これは

$$x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}x}$$

と同値である。この解は、複号同順で

$$x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\pm 2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$\dfrac{\pi}{8}$ は $(0, \pi/2)$ に属するので、$x = \cos\dfrac{\pi}{8}, y = \sin\dfrac{\pi}{8} > 0$ であるから、

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \blacksquare$$

[1] これを満たす θ は他にもあるが、ここではどれか一つ求めれば十分である。もちろん $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$ でも良い。

問 3 解説　講義で次の事実を紹介した。

n 乗根の定理

$n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $\rho>0$, $\varphi\in\mathbb{R}$ とするとき、$c=\rho e^{i\varphi}$ の n 乗根 ($z^n=c$ の解) は、$z=\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ である。

これは使って構わない。証明を要求されたら、出来て欲しいけれど、まずは覚えて使えること。

$\rho e^{i\varphi}$ は、極形式という複素数の表現法である。与えられた複素数が極形式で書かれていない場合、自分で極形式に直す必要がある。1 つの複素数の極形式は一通りには決まらないけれど、どの極形式を使っても、n 乗根自体は変わらない。

$1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ が 1 の (1 つの) 極形式であるから、1 の n 乗根は $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

$-1=1\cdot e^{i\pi}$ が -1 の極形式であるから、-1 の n 乗根は $e^{i\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

1 の 8 乗根を ±1, $\pm i$, $\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$ のように書いた人が多いが、最後の 2 つの $\pm$ をどういう意味に取るか曖昧である。「複号任意」という言い方はあるけれど、これを「複合任意」と書いてしまった人がかなりの数いた (正しく書いた人よりも多かった)。「複号同順」(複数の符号は同じ順) というのは見たことがあると思うのだけど。古めかしい言い方だし、間違えるくらいならば、

$$z=\pm1,\pm i,\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2},\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$

のように書いたら良いと思う。

問 3 解答　1 の 8 乗根、つまり $z^8=1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ の解は、(a) 指数形式を利用すると、$e^{ik\frac{2\pi}{8}}=e^{ik\frac{\pi}{4}}$ $(k=0,1,\cdots,7)$ であるから、

$$z=e^0,e^{i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{\pi}{2}},e^{i\frac{3\pi}{4}},e^{i\pi},e^{i\frac{5\pi}{4}},e^{i\frac{3\pi}{2}},e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

すなわち

$$(\star)\qquad z=1,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ i,\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ -1,\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ -i,\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

(b) 代数的に解いてみる。

$$\begin{aligned}z^8-1&=(z^4+1)(z^4-1)=\left(z^4+2z^2+1-2z^2\right)(z^2+1)(z^2-1)\\&=\left(z^4+2z^2+1-\left(\sqrt{2}z\right)^2\right)(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)\\&=\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)\end{aligned}$$

という因数分解から (最初に $(z^4+1)(z^4-1)$ と分解した段階で、1 と -1 の 4 乗根を合わせたものになることが分かる)[2]

$$z=1,-1,+i,-i,\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2},\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}.$$

これは $(\star)$ と一致している。

-1 の 8 乗根、つまり $z^8=-1=1\cdot e^{i\pi}$ の解は、(a) 指数形式を利用すると、$e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{2\pi}{8}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{8}}$ $(k=0,1,\ldots,7)$ であるから、

$$z=e^{i\frac{\pi}{8}},e^{i\frac{3\pi}{8}},e^{i\frac{5\pi}{8}},e^{i\frac{7\pi}{8}},e^{i\frac{9\pi}{8}},e^{i\frac{11\pi}{8}},e^{i\frac{13\pi}{8}},e^{i\frac{15\pi}{8}}.$$

[2]最初に $z^8-1=(z-1)(z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$ としてしまうと後が大変。

これらは、以下に示すように $\sqrt{\ }$ を使って具体的に書けるけれど、少し面倒である[3]。

(b) 代数的に解くのもあまり簡単ではないが、8 乗根は、4 乗根の平方根であることを用いると少し見通しが良い。$X = z^2$ とおくと、

$$z^8+1 = X^4+1 = \left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right).$$

であるから、

$$z^2 = X = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}, \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}.$$

$z^2 = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$ の解は、問 2 で $x^2-y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}, 2xy=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を解いて、次のように求まった。

$$z = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$ の解は、その共役複素数であるので、

$$z = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$ の解は、$x^2-y^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2xy=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を解いて、次のように求める。

$$z = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}.$$

$z^2 = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$ の解は、その共役複素数であるので、

$$z = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}.$$

ゆえに -1 の 8 乗根は

$$\begin{aligned} z = &\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\ +\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\ +\sqrt{2+\sqrt{2}}\,i}{2}, \\ &\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\ -\sqrt{2+\sqrt{2}}\,i}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

(別解) 今回、$z^8=-1$ を次のように解いた答案があった。これは気が付かなかった。

$$\begin{aligned} z^8+1 &= z^8+2z^4+1-2z^4 = (z^4+1)^2-\left(\sqrt{2}x^2\right)^2 = \left(z^4+1+\sqrt{2}z^2\right)\left(z^4+1-\sqrt{2}z^2\right) \\ &= \left(z^4+2z^2+1-\left(2-\sqrt{2}\right)z^2\right)\left(z^4+2z^2+1-\left(2+\sqrt{2}\right)z^2\right) \\ &= \left(z^2+1+\sqrt{2-\sqrt{2}}z\right)\left(z^2+1-\sqrt{2-\sqrt{2}}z\right) \\ &\quad\times\left(z^2+1+\sqrt{2+\sqrt{2}}z\right)\left(z^2+1-\sqrt{2+\sqrt{2}}z\right) \end{aligned}$$

[3] $e^{i\frac{\pi}{8}}$ は、問 2 で $z^2=e^{i\frac{\pi}{4}}$ を解くことで $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}$ と求めた。同様のことを 8 回繰り返すのは大変なので、工夫が必要である。$e^{i\frac{\pi}{8}}$ を、3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 乗するのも楽ではない。

と因数分解できるので、

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}-4}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}-4}}{2}, \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}-4}}{2}, \\
&\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}-4}}{2} \\
&= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}, \\
&\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

(別解) これも $z^8 = -1$ を解く話。問 2 で平方根の計算をして、$e^{\frac{\pi}{8}i} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i$ と求めた。$\alpha := \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\beta := \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ とおくと、実は $k = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ の順に

$$
e^{\frac{k\pi}{8}i} = \beta + i\alpha, \quad -\beta + i\alpha, \quad -\alpha + i\beta, \quad -\alpha - i\beta, \quad -\beta - i\alpha, \quad \beta - i\alpha, \quad \alpha - i\beta
$$

であることが分かる。実際、

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{3\pi}{8}i} &= \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8} = \beta + i\alpha, \\
e^{\frac{5\pi}{8}i} &= e^{(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8})} = ie^{\frac{\pi}{8}i} = -\beta + i\alpha, \\
e^{\frac{7\pi}{8}i} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = -\alpha + i\beta, \\
e^{\frac{9\pi}{8}i} &= e^{\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)i} = -e^{\frac{\pi}{8}i} = -\alpha - i\beta, \\
e^{\frac{11\pi}{8}i} &= e^{\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right)i} = -e^{\frac{3\pi}{8}i} = -\beta - i\alpha, \\
e^{\frac{13\pi}{8}i} &= e^{\left(\pi + \frac{5\pi}{8}\right)i} = -e^{\frac{5\pi}{8}i} = \beta - i\alpha, \\
e^{\frac{15\pi}{8}i} &= e^{\left(\pi + \frac{7\pi}{8}\right)i} = -e^{\frac{7\pi}{8}i} = \alpha - i\beta.
\end{aligned}
$$

(偏角が $\pi/2$, π 多いと、それぞれ i 倍、-1 倍になるので、簡単。最初のうちが頑張りどころ。) ■

みなさん、色々な頑張りを見せてくれた。感心。

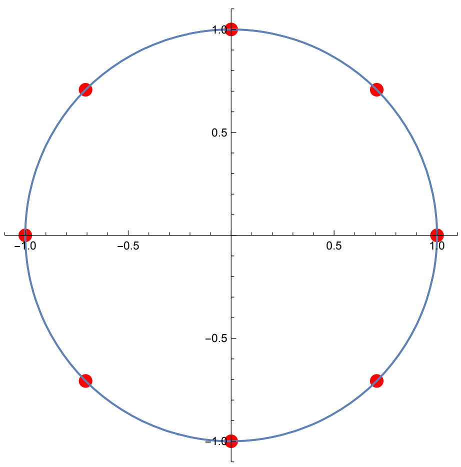

図 1: $z^8 = 1$ の解

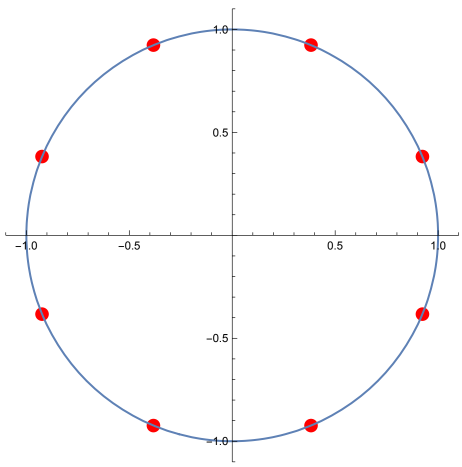

図 2: $z^8 = -1$ の解

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1.1, 1.1}, {y, -1.1, 1.1}]

list1 = ComplexExpand[z /. Solve[z^8 - 1 == 0, z]]
list2 = ComplexExpand[z /. Solve[z^8 + 1 == 0, z]]

my[list_] :=
 ListPlot[Table[{Re[list[[i]]], Im[list[[i]]]}, {i, Length[list]}],
  PlotStyle -> {Red, PointSize[0.03]},
  PlotRange -> {{-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio -> Automatic]

g1 = my[list1]
g2 = my[list2]

G1 = Show[g1, g0]
G2 = Show[g2, g0]

Export["work/G1.pdf", G1]
Export["work/G2.pdf", G2]
```

問 4 解説

- 四則演算を間違える人が結構いて驚いている。怪しいと自覚のある人は、もう一度ソラで解いて照らし合わせることを勧める。特に (1)(c) がマズイ。$\dfrac{1}{i} = -i$ だから気をつけよう。
- Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ はすごく有名だけれど、$f' = u_x + iv_x$ となることもきちんと覚えておこう。($f' = u' + iv'$ と書いた人がちらほらいるけれど、u', v' って一体何？)
- u と v の書き分けが出来ていない人が少なくない。繰り返しになるけれど…u と v は確かに字の形が似ているし、実際に手で書くときどうなるかは、結構幅広い。しかし次のことは言えるような気がする。

  u の右は下までおろすけれど (u, $\boldsymbol{u}$, u, $\mathbf{u}$)、v の右は上で止めておく (v, $\boldsymbol{v}$, v, $\mathbf{v}$)

  参考にして下さい。
- Riemann を Rieman と綴る人が多い。覚えられないならば、カタカナ表記しよう。
- 問題文で f (複素関数) と $\boldsymbol{f}$ (ベクトル値関数) を書き分けているので、答案の方もそうしてほしい。

(1) z の実部、虚部をそれぞれ x, y で表すことにする。

(a)

$$z^2 + z + 1 = (x + yi)^2 + (x + yi) + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + (2xy + y)i$$

であるから、$u(x, y) = x^2 - y^2 + x + 1$, $v(x, y) = 2xy + y$.

(b)

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(x+yi)-1}=\frac{1}{(x-1)+yi}=\frac{(x-1)-yi}{(x-1)^2+y^2}$$

であるから

$$u(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2},\quad v(x,y)=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}.$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)&=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}\right)\\&=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right)\\&=\frac{1}{2i}\left(\cos x(e^{-y}-e^{y})+i\sin x(e^{-y}+e^{y})\right)\\&=i\cos x\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}+\sin x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\\&=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\end{aligned}$$

であるから

$$u(x,y)=\sin x\cosh y,\quad v(x,y)=\cos x\sinh y.$$

(2) $\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ であるから

$$\det\boldsymbol{f}'=\det\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}=u_xv_y-u_yv_x.$$

u, v はそれぞれ正則関数の実部、虚部であるから、Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

を満たす。ゆえに

$$\det\boldsymbol{f}'=u_x^2+v_x^2.$$

一方、$f'=u_x+iv_x$ であるから、

$$|f'|^2=u_x^2+v_x^2.$$

ゆえに

$$\det\boldsymbol{f}'=|f'|^2.\blacksquare$$

問 5 解説

(1) 中心を c, n 次の項の係数を a_n, 収束半径を ρ と書くことにする。

(a) $c=0$, $a_n=n^2$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1.$$

ゆえに $\rho=1$. 収束円は $D(c;\rho)=D(0;1)$.

(b) $c=0,\ a_n=(2n)!$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

ゆえに $\rho=0$. 収束円は $D(c;\rho)=D(0;0)=\emptyset$.

(c) $c=1,\ a_n=\dfrac{n+2}{3^n}$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\cdot 3\right) = 3.$$

ゆえに $\rho=3$. 収束円は $D(c;\rho)=D(1;3)$.

(d) $\zeta:=z^3$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{3n+1}}{2^n} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left(z^3\right)^n = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\zeta^n.$$

$b_n:=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ とおくとき、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot(-1)^n}{2^n\cdot(-1)^{n+1}}\right| = 2.$$

ゆえに、ζ の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\zeta^n$ の収束半径は 2. ゆえに $|\zeta|<2$ で収束し、$|\zeta|>2$ で発散する。ゆえに、与えられた冪級数は $|z^3|<2$ のとき収束し、$|z^3|>2$ のとき発散する。従って、$|z|<\sqrt[3]{2}$ で収束し、$|z|>\sqrt[3]{2}$ で発散する。ゆえに $\rho=\sqrt[3]{2}$. 収束円は $D\left(c;\rho\right)=D\left(0;\sqrt[3]{2}\,\right)$.

(2) $n,m\in\mathbb{N},\ n\geq m$ のとき、

$$\begin{aligned}|s_n(z)-s_m(z)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}a_k(z)-\sum_{k=1}^{m}a_k(z)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k(z)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)| \\ &= \sum_{k=1}^{n}|a_k(z)|-\sum_{k=1}^{m}|a_k(z)| = S_n(z)-S_m(z) = |S_n(z)-S_m(z)|\,.\end{aligned}$$

$$|S_n(z)-S_m(z)| = \sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n}M_k = \sum_{k=1}^{n}M_k-\sum_{k=1}^{m}M_k = T_n-T_m = |T_n-T_m|\,.$$

ゆえに

$$|s_n(z)-s_m(z)| \leq |S_n(z)-S_m(z)| \leq |T_n-T_m|\,.$$

$n<m$ のとき、

$$|s_n(z)-s_m(z)| = |s_m(z)-s_n(z)|\,,\quad |S_n(z)-S_m(z)| = |S_m(z)-S_n(z)|\,,\quad |T_n-T_m| = |T_m-T_n|$$

であるから、$n\geq m$ の場合に帰着され、

$$|s_n(z)-s_m(z)| \leq |S_n(z)-S_m(z)| \leq |T_n-T_m|\,.\blacksquare$$

問 6 解説

(1) (a)

$$f(z) = \frac{1}{i\left(1+\dfrac{z}{i}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-iz} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow |-iz|<1 \Leftrightarrow |-i|\cdot|z|<1 \Leftrightarrow |z|<1$ であるから、収束半径は 1 で、収束円は $D(0;1)$.

(b) $G(z) := \dfrac{1}{z-3}$ とおくと、

$$G(z) = \frac{1}{-3\left(1-\dfrac{z}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

収束 $\Leftrightarrow \left|\dfrac{z}{3}\right|<1 \Leftrightarrow \dfrac{|z|}{3}<1 \Leftrightarrow |z|<3$ であるから、収束円は $D(0;3)$. 一方、$G'(z) = -(z-3)^{-2} = -g(z)$ であるから、

$$g(z) = -G'(z) = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}z^n.$$

収束円は $G(z)$ のそれと同じで $D(0;3)$.

(c)

$$h'(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow |-z|<1 \Leftrightarrow |z|<1$ であるから、収束円は $D(0;1)$. $H'(z) = h'(z)$ を満たす H として、項別に積分した

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

が取れる。$H(0)=0$ を満たすので、これが求めるものである。

$$h(z) = H(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n.$$

この冪級数の収束円は、$h'(z)$ のそれと同じで $D(0;1)$.

(d) まず $r(z)$ を部分分数分解すると

$$r(z) = \frac{z^3-5z^2+10z-14}{z^2-6z+8} = z+1+\frac{3}{z-2}+\frac{5}{z-4}.$$

確認

$z^3-5z^2+10z-14$ を z^2-6z+8 で割ると、商が $z+1$, 余りが $8z-22$. ゆえに

$$r(z)=\frac{z^3-5z^2+10z-14}{z^2-6z+8}=z+1+\frac{8z-22}{z^2-6z+8}.$$

$z^2-6z+8=(z-2)(z-4)$ であるから、

$$\frac{8z-22}{z^2-6z+8}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-4}$$

を満たす定数 A, B があるはずである。$8z-22=A(z-4)+B(z-2)$ より $2B=10$, $-2A=-6$. ゆえに $A=3$, $B=5$. ゆえに

$$r(z)=z+1+\frac{3}{z-2}+\frac{5}{z-4}.$$

(1)
$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

(2)
$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{-4(1-\frac{z}{4})}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
r(z)&=1+z-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}\\
&=1-3\cdot\frac{1}{2}-5\cdot\frac{1}{4}+z-3\cdot\frac{z}{2^2}-5\cdot\frac{z}{4^2}-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{5}{4^{n+1}}\right)z^n\\
&=-\frac{7}{4}-\frac{1}{16}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{5}{4^{n+1}}\right)z^n.
\end{aligned}$$

$a_n:=-\left(\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{5}{4^{n+1}}\right)$ とおくとき、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{5}{4^{n+1}}}{\frac{3}{2^{n+2}}+\frac{5}{4^{n+2}}}=2.$$

ゆえに収束半径は 2 であるから、収束円は $D(0;2)$. (級数 (1), (2) の収束半径は、それぞれ 2, 4 で、その小さい方 2 が $r(z)$ の冪級数展開の収束半径になる、というのは正しい議論だけど、細部を詰められるかどうか。)

(2)

$$F(z)=\frac{1}{z+4}=\frac{1}{(z+1)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z+1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z+1)^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ $\left|-\frac{z+1}{3}\right|<1\Leftrightarrow|z-(-1)|<3$ であるから、収束円は $D(-1;3)$. ■

問 7 解説

(1) 等比級数の和の公式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (\text{収束円は } D(0;1)).$$

Abel の定理より項別微分出来るので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2} \quad (\text{収束円は } D(0;1)).$$

z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (\text{収束円は } D(0;1)).$$

同様にして、微分して z をかけることで

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -\frac{z(1+z)}{(z-1)^3} \quad (\text{収束円は } D(0;1)).$$

(2) $1+(-1)^n = 2$ (n が偶数のとき)、$1+(-1)^n = 0$ (n が奇数のとき) であるから

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\left[1+(-1)^n\right]}{n!}z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}}{(2k)!}z^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = \cos z.\end{aligned}$$

$1-(-1)^n = 0$ (n が偶数のとき)、$1-(-1)^n = 2$ (n が奇数のとき) であるから

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\left[1-(-1)^n\right]}{n!}z^n = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sin z.\end{aligned}$$

(3) (a) 任意の c に対して、$F(z) := f(z)f(c-z)$ ($z \in \mathbb{C}$) とおくと、

$$\begin{aligned}F'(z) &= (f(z)f(c-z))' = f'(z)\cdot f(c-z) + f(z)\cdot(f(c-z))' \\ &= f'(z)f(c-z) + f(z)\left(-f'(c-z)\right) = f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに F は定数関数であるから、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$F(z) = F(0) = f(0)f(c-0) = 1\cdot f(c) = f(c).$$

ゆえに

$$f(z)f(c-z) = f(c).$$

(b) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、$c := a+b$ とおくと、(a) から任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $f(z)f(c-z) = f(c)$ が成り立つ。特に $z = a$ とすると ($c-a = b$ に注意して)、$f(a)f(b) = f(c)$. すなわち $e^a e^b = e^c$. ■

複素指数関数の指数法則の証明として、(3) はある意味でうまいけれど、講義で示したやり方の方がストレートで良いかな。

問 8 解説　$(3-\sqrt{10})i$ の極形式を間違えた人が多かった、というか出来た人の方が少なかった。$3-\sqrt{10}<0$ なので、絶対値は $\sqrt{10}-3$, 偏角として $-\pi/2$ あるいは $3\pi/2$ が取れる。

(1) (a) $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{\pi/4}$ であるから、$1+i=\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ は $1+i$ の極形式である。ゆえに

$$e^z=1+i \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z=\log\sqrt{2}+\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi i.$$

解は $z=\log\sqrt{2}+(2n+1/4)\,\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(b) $e^{iz}=w$ とおくと

$$\begin{aligned}\sin z=1 &\Leftrightarrow \frac{w-1/w}{2i}=1 \Leftrightarrow w^2-2iw-1=0 \Leftrightarrow (w-i)^2=0 \Leftrightarrow w=i\\ &\Leftrightarrow e^{iz}=i=1\cdot e^{\pi i/2} \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\quad iz=\log 1+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi.\end{aligned}$$

解は $z=(2n+1/2)\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(c) $e^{iz}=w$ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos z=3i \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)=3i \quad\Leftrightarrow\quad w^2+1=6iw\\ &\Leftrightarrow\quad w^2-6iw+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad w=3i\pm\sqrt{(3i)^2-1\cdot 1}\\ &\Leftrightarrow\quad w=\left(3\pm\sqrt{10}\right)i.\end{aligned}$$

$\left(3+\sqrt{10}\right)i$, $\left(3-\sqrt{10}\right)i$ の極形式として、それぞれ $\left(\sqrt{10}+3\right)e^{\pi i/2}$, $\left(\sqrt{10}-3\right)e^{-\pi i/2}$ が取れるので、

$$\begin{aligned}\cos z=3i \quad\Leftrightarrow\quad &(\exists n\in\mathbb{Z})\quad iz=\log\left(\sqrt{10}+3\right)+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i\\ &\vee(\exists n\in\mathbb{Z})\quad iz=\log\left(\sqrt{10}-3\right)+\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi i\\ \Leftrightarrow\quad &(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi-i\log\left(\sqrt{10}+3\right)\\ &\vee(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi-\log\left(\sqrt{10}-3\right).\end{aligned}$$

解は $z=(2n+1/2)\pi-i\log\left(\sqrt{10}+3\right)$, $(2n-1/2)\pi-i\log\left(\sqrt{10}-3\right)$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(2) $i=1\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$ は i の極形式であるから、

$$\log i=\log 1+(2n+1/2)\,\pi i=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i\quad (n\in\mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$i^i=e^{i\log i}=e^{i\cdot(2n+1/2)\pi i}=e^{-(2n+1/2)\pi}\quad (n\in\mathbb{Z}).\blacksquare$$

(i^i の値全体の集合は $\mathbb{R}$ の部分集合で、上にも下にも有界でない。)

問 9 の解説 (余談のような常識の学習のような: 曲線を表す文字としては、授業で良く使う C 以外に $\mathit{\Gamma}$, γ などが多い (それぞれギリシャ文字のガンマの大文字、小文字)。)

複素指数関数をわざわざ cos, sin に直して計算する人が毎年後を絶たないけれど、そういうあほらしいことは止めよう (と授業で言ってあるけど)。

2016 年度は $|z-c|=r$ を $z=c+rr^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とした人が複数いた。一体それは何?! $z=c+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ を写し間違えしたのか？

(1) $z=e^{i\theta}$ より $\bar{z}=e^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{\bar{z}}=e^{i\theta}$, また $dz=ie^{i\theta}\,d\theta$ であるから、

$$\int_C\frac{1}{\bar{z}}\,dz=\int_0^{\pi}e^{i\theta}\cdot ie^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{\pi}e^{2i\theta}\,d\theta=i\left[\frac{e^{2i\theta}}{2i}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(e^{2i\pi}-e^0\right)=\frac{1-1}{2}=0.$$

(2) $z=c+re^{i\theta}$ より $z-c=re^{i\theta}$, また $dz=ire^{i\theta}$ であるから、

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-c}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

(3) 被積分関数が原始関数 $\dfrac{(z-c)^{n+1}}{n+1}$ を持ち、曲線が閉曲線であるから、計算しなくても 0 と分かる。

以下は生真面目に計算した場合どうなるか、である。

$z=c+re^{i\theta}$ より $z-c=re^{i\theta}$, また $dz=ire^{i\theta}$ であるから、

$$\int_{|z-c|=r}(z-c)^n\ dz=\int_0^{2\pi}\left(re^{i\theta}\right)^n\cdot ire^{i\theta}\,d\theta=i^{n+1}r^n\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\theta}\,d\theta=i^{n+1}r^n\left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{(n+1)i}\right]_0^{2\pi}=0.$$

(最後は $e^{i(n+1)\theta}$ が 2π を周期とすることから 0 と分かる。)

$n=-1$ のとき (その場合が問 (2)) はこの議論が成立しないことに注意する。

(4) (i) γ を 0 から 1 までの線分 γ_1, 1 から $1+i$ までの線分 γ_2 に分けると、それぞれ

$$\gamma_1\colon z=t\quad(t\in[0,1])\quad(\text{このとき } dz=dt),$$
$$\gamma_2\colon z=1+it\quad(t\in[0,1])\quad(\text{このとき } dz=i\,dt)$$

とパラメーター付け出来るから

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz=\int_0^1\operatorname{Re}t\cdot dt+\int_0^1\operatorname{Re}(1+it)\cdot i\,dt$$
$$=\int_0^1(t+i)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+i\,[t]_0^1=\frac{1}{2}+i.$$

(ii) γ を 0 から i までの線分 γ_1, i から $1+i$ までの線分 γ_2 に分けると、それぞれ

$$\gamma_1\colon z=it\quad(t\in[0,1])\quad(\text{このとき } dz=i\,dt),$$
$$\gamma_2\colon z=i+t\quad(t\in[0,1])\quad(\text{このとき } dz=dt)$$

とパラメーター付け出来るから

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz=\int_0^1\operatorname{Re}(it)\cdot i\,dt+\int_0^1\operatorname{Re}(i+t)\cdot dt$$
$$=\int_0^1(0\cdot i+t)\,dt=\int_0^1t\,dt=\frac{1}{2}.$$

(iii) γ は $z=(1+i)t$ $(t\in[0,1])$ とパラメーター付け出来る。$dz=(1+i)dt$ であるから

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^1 \operatorname{Re}\left((1+i)t\right)\cdot(1+i)dt=\int_0^1(1+i)t\,dt=\frac{1+i}{2}.$$

(5) まず $f(z)=3z^2+iz-4$ の場合、これは多項式関数で原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$

以下 $f(z)=\operatorname{Re}z$ の場合。これは (実は[4]) 原始関数を持たない。そこで地道に計算する。Γ を正方形の下、右、上、左の辺の部分に分解して、それぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 とする。

$$\begin{aligned}
&C_1\colon z=t-ai\quad(t\in[-a,a])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=t,\ dz=dt),\\
&C_2\colon z=a+it\quad(t\in[-a,a])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=a,\ dz=i\,dt),\\
&C_3\colon z=ai-t\quad(t\in[-a,a])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=-t,\ dz=-dt),\\
&C_4\colon z=-a-it\quad(t\in[-a,a])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=-a,\ dz=-i\,dt).
\end{aligned}$$

のようにパラメーター付けできるから

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_{-a}^a\left[t+a\cdot i+(-t)\cdot(-1)+(-a)\cdot(-i)\right]dt=2\int_{-a}^a(t+ai)dt=4ai\int_0^a dt=4a^2i.$$

パラメーター付けは色々ありうる。もう一つ示しておくと

$$\begin{aligned}
&C_1\colon z=-a-ai+at\quad(t\in[0,2])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=a(t-1),\ dz=a\,dt),\\
&C_2\colon z=a-ai+ait\quad(t\in[0,2])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=a,\ dz=ai\,dt),\\
&C_3\colon z=a+ai-at\quad(t\in[0,2])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=a(1-t),\ dz=-a\,dt),\\
&C_4\colon z=-a+ai-ait\quad(t\in[0,2])\quad(\text{このとき } \operatorname{Re}z=-a,\ dz=-ai\,dt)
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz&=\int_0^2\left[a(t-1)\cdot a+a\cdot ai+a(1-t)\cdot(-1)+(-a)\cdot(-ai)\right]dt\\
&=a^2\int_0^2\left[(t-1)+i+(t-1)+i)\right]dt=a^2\left\{\left[(t-1)^2\right]_0^2+2i\left[t\right]_0^2\right\}=a^2\cdot 2i\cdot 2=4a^2i.\blacksquare
\end{aligned}$$

[4] 後で「原始関数が存在するならば正則である」という定理を学ぶ。正則でないことは簡単に分かるので、原始関数は存在しない。

Mathematica でいいかげんな検算

$\displaystyle\int_C f(z)dz,\ C\colon z=\varphi(t)\ (t\in[a,b])$ を計算する 1 行関数 `li[]` を定義して、放り込んでみる。

まず (1)

```
li[fz_,phit_,a_,b_]:=Integrate[(fz/. z->phit)D[phit,t],{t,a,b}]
```

```
fz = 1/Conjugate[z]
li[fz, Exp[I t], 0, 2 Pi]
```

(2) と (3)

```
fz = 1/(z - c)
li[fz,c+r Exp[I t],0,2Pi]
```

```
fz=(z-c)^n
li[fz,c+r Exp[I t],0,2Pi]
```

(3) は、はっきりしないので n が整数であることを教えてみる。

```
Assuming[Element[n, Integers], li[fz, c + r Exp[I t], 0, 2 Pi]]
```

Mathematica は 0 と答えるが、これは (真面目に解いた人は分かるように) 正しくない。

(4) は全て具体的なため、コンピューターにとっては簡単な問題。

```
fz = Re[z]
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1]
li[fz, I t, 0, 1] + li[fz, I + t, 0, 1]
li[fz, (1 + I) t, 0, 1]
```

どれもちゃんと計算してくれる。

```
li[fz, a (-1 - I + t), 0, 2] + li[fz, a (1 - I + I t), 0, 2] +
 li[fz, a (1 + I - t), 0, 2] + li[fz, a (-1 + I - I t), 0, 2]
```

これは a が実数と分からないと計算が進まない。

```
Assuming[a > 0,
 li[fz, a (-1 - I + t), 0, 2] + li[fz, a (1 - I + I t), 0, 2] +
  li[fz, a (1 + I - t), 0, 2] + li[fz, a (-1 + I - I t), 0, 2]]
```

無事 `4 i a`^{2} となる。

問 10 解説

(1)
- $\Omega := \mathbb{C}$
  $a,b\in\Omega$, $t\in[0,1]$ とするとき、$(1-t)a+tb\in\mathbb{C}=\Omega$ であるから。
- $\Omega := D(c;r)$ (ただし $c\in\mathbb{C}$, $r>0$)
  $a,b\in D(c;r)$ とすると、$|a-c|<r$ かつ $|b-c|<r$. このとき、任意の $t\in[0,1]$ に

対して、$c=(1-t)c+tc$ であるから、

$$\begin{aligned}|[(1-t)a+tb]-c| &= |(1-t)(a-c)+t(b-c)| \le |(1-t)(a-c)|+|t(b-c)| \\ &= |1-t|\,|a-c|+|t|\,|b-c| = (1-t)\,|a-c|+t\,|b-c| \\ &< (1-t)r+tr=r.\end{aligned}$$

ゆえに $(1-t)a+tb\in D(c;r)$.

- $\Omega :=$ 三角形の内部. (式で書くと例えば $\{p+ta+sb \mid t>0,\ s>0,\ t+s<1\}$ とか)

(2)
- 平面から半直線を除いたもの。具体的に例えば負の実軸を除いた $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$
  $\Omega:=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ とする。
  - (凸でないこと) $a=-1+i$, $b=-1-i$ とすると、$a,b\in\Omega$ であるが、$[a,b]\not\subset\Omega$ である。実際、$-1=\frac{1}{2}(a+b)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\in[a,b]$, $-1\not\in\Omega$.
  - (星型であること) $a=1$ とすると、$a\in\Omega$ であり、任意の $z\in\Omega$, $t\in(0,1]$ に対して、$(1-t)a+tz\in\Omega$ が成り立つ。実際、$z\in\Omega$ であれば、(i) $\operatorname{Im} z>0$, (ii) $\operatorname{Im} z<0$, (iii) $z>0$ のいずれかが成り立つが、それぞれの場合に、(i) $\operatorname{Im}((1-t)a+tz)>0$, (ii) $\operatorname{Im}((1-t)a+tz)<0$, (iii) $(1-t)a+tz>0$ が成り立つ。
- 星の形 (の内部)
  これは式で書くの大変そう。簡単なやり方を僕は知りません。

(3) $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{x+x^2i \mid x\ge 0\}$ (複素平面から放物線の半分を除いたもの).

- 星型でないこと
- 単連結であること
  平面から半直線を除いた領域は単連結であり、Ω はそれを連続的に変形したものであるから単連結である。

(4) $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
単連結の定義を式で書いていないので…とりあえず証明を書いておく。

(a) 単連結領域における Cauchy の積分定理を認めると、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C と、Ω で正則な関数 f に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ となるはずであるが、$C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$, $f(z)=\frac{1}{z}$ が $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=2\pi i\ne 0$ を満たすので反例となる。

問 11 解説　以下のような方針で解答してくれた人が少なかった。類題を授業で解説すべきでした。

講義で解説した円盤における Cauchy の積分公式とは、「$a\in D(c;r)$, f は $\overline{D(c;r)}$ を含む開集合 Ω で正則ならば、

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

が成り立つ。」— これを用いる。

c,r,a,f は何か、Ω としてどういうものが取れるかを明らかにする。

(1) c,r,a はそのままで、f は $f(z)=1$ $(z\in\mathbb{C})$ と定めると、条件が満たされる ($\Omega=\mathbb{C}$ で良い)。ゆえに

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)=2\pi i\cdot 1=2\pi i.$$

(2) $c=0,\ r=1,\ a=0,\ f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ とおくと、$a\in D(c;r)$ かつ f は $D(c;2)\supset\overline{D(c;r)}$ で正則であるから、

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z\,(z+2)}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=2\pi i f(a)=2\pi i\cdot\frac{1}{0+2}=\pi i.$$

(3) $c=-3,\ r=2,\ a=-2,\ f(z)=\dfrac{1}{z}$ とおくと、$\Omega=D(c;2)$ として条件が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z+3|=2}\frac{dz}{z(z+2)}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=2\pi i f(a)=2\pi i\frac{1}{-2}=-\pi i.\blacksquare$$

問 12 解説　(1) ちんぷんかんぷん、という人も少なくなく、たどたどしい人は大勢、という感じでした。一致の定理を使うのですが、それが分かりにくかったようです (授業も講義ノートも至らなかったかな…講義ノートの例 99 の真似をするだけで簡単と思ったのだけど…反省)。ここでは

> $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が正則で、
> $$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=0$$
> を満たすならば、
> $$(\forall z\in\mathbb{C})\quad f(z)=0$$
> が成り立つ。

という形で使います。

問 12 解答

(1) 任意の $y\in\mathbb{R}$ に対して、

$$f(z):=\cos(z+y)-(\cos z\cos y-\sin z\sin y)\quad(z\in\mathbb{C})$$

とおく。f は $\mathbb{C}$ 全体で正則で、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して (実関数 cos の加法定理から)

$$f(x)=\cos(x+y)-(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=0.$$

一致の定理から $(\forall z\in\mathbb{C})\ f(z)=0$. すなわち

$$(\sharp)\qquad(\forall y\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C})\quad\cos(z+y)-(\cos z\cos y-\sin z\sin y)=0.$$

が導けた。

次に任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して、

$$g(w):=\cos(z+w)-(\cos z\cos w-\sin z\sin w)\quad(w\in\mathbb{C})$$

とおく。g は $\mathbb{C}$ 全体で正則で、任意の $y\in\mathbb{R}$ に対して (($\sharp$) から)

$$g(y)=\cos(z+y)-(\cos z\cos y-\sin z\sin y)=0.$$

一致の定理から $(\forall w\in\mathbb{C})\ g(w)=0$. すなわち

$$(\forall z\in\mathbb{C})(\forall w\in\mathbb{C})\quad\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w.$$

(2) $\alpha := \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta := \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とおくとき、$z^2+z+1=(z-\alpha)(z-\beta)$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}.$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{\alpha,\beta\}$ で正則であるが、α,β を込めて正則には出来ない。c のまわりで冪級数展開したときの収束半径を ρ とすると、

$$\rho=\min\{|c-\alpha|,|c-\beta|\}=\min\left\{\left|c+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right|,\left|c+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right|\right\}.$$

$c\in\mathbb{R}$ であるから、

$$\rho=\sqrt{\left(c+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{c^2+c+1}.\blacksquare$$

問 13 解説　Laurent 展開の形を間違えている人がいた。3 の周りの Laurent 展開なのに、z^n のような式を書いている。定数 $\times\,(z-3)^n$ の形の項の和にしないとダメ。

それと「c の周りの Laurent 展開」,「c における Laurent 展開」とは、$0<|z-c|<R$ の形の範囲、つまり内側の半径が 0 の円環領域 $A(c;0,R)$ での展開のことを言う。それを間違えている人がかなり多かった。

内側の半径が 0 でない円環領域については、主部とか留数という言葉は使わない。それを書いている人も多かった。

どれも授業中に注意したこと。多分、話は聞かずに、数式しか追わないということなのかと思っているけれど、数式だけで数学にはなりません。

(解答) $f(z)$ の部分分数分解は[5]

$$f(z)=1+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{z-3}+\frac{5}{(z-3)^2}.$$

(1)

$$\frac{2}{z-1}=\frac{2}{(z-3)+2}=\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n(z-3)^n.$$

[5]部分分数分解は出来るようにしておくこと。

$z^3-z^2-8z+16$ を $(z-1)(z-3)^2=z^3-7z^2+15z-9$ で割ると、商が 1, 余りが $6z^2-23z+25$ であるから、

$$f(z)=\frac{z^3-z^2-8z+16}{(z-1)(z-3)^2}=1+\frac{6z^2-23z+25}{(z-1)(z-3)^2}.$$

$(z-1)$ と $(z-3)^2$ は互いに素であるから

$$\frac{6z^2-23z+25}{(z-1)(z-3)^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{b(z)}{(z-3)^2},\quad (A \text{ は定数、} b(z) \text{ は次数が 2 より小さい } z \text{ の多項式})$$

を満たす A, $b(z)$ が存在する。$b(z)=B(z-3)+C$ を満たす定数 B, C が存在するので、

$$\frac{6z^2-23z+25}{(z-1)(z-3)^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}+\frac{C}{(z-3)^2}$$

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払って

$$6z^2-23z+25=A(z-3)^2+B(z-1)(z-3)+C(z-1).$$

$z=1$ を代入して、$8=4A$. $z=3$ を代入して $10=2C$. 微分してから $z=3$ を代入して $13=2B+C$. ゆえに $A=2$, $C=5$, $B=4$.

ただし、収束 $\Leftrightarrow \left|-\frac{z-3}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-3| < 2$. ゆえに収束半径は 2 である。

以上から、

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n (z-3)^n + \frac{4}{z-3} + \frac{5}{(z-3)^2} \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-3)^n + \frac{4}{z-3} + \frac{5}{(z-3)^2} \quad (0 < |z-3| < 2). \end{aligned}$$

主部は $\dfrac{4}{z-3} + \dfrac{5}{(z-3)^2}$. 留数は $\operatorname{Res}(f; 3) = 4$.

(2) $|z-3| > 2$ のとき ($|z-3| \le 2$ ならば発散する)

$$\frac{2}{z-1} = \frac{2}{(z-3)+2} = \frac{2}{z-3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{2}{z-3}} = \frac{2}{z-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z-3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-3)^{n+1}}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-3)^n}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-3)^n} + \frac{4}{z-3} + \frac{5}{(z-3)^2} \\ &= 1 + \frac{2}{z-3} - \frac{4}{(z-3)^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-3)^n} + \frac{4}{z-3} + \frac{5}{(z-3)^2} \\ &= 1 + \frac{6}{z-3} + \frac{1}{(z-3)^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-3)^n}. \end{aligned}$$

この級数は $2 < |z-3| < +\infty$ で収束するので、$A(3; 2, +\infty)$ における f の Laurent 展開である。

(3) $p(z) := (z-1)(z-3)^2$, $q(z) := z^3 - z^2 - 8z + 16$ とおくと、p と q はともに多項式関数であるから、$\mathbb{C}$ 全体で正則である。p の零点は 1 と 3 であり、$f = \dfrac{q}{p}$ であるから、f は $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ で正則である (1, 3 では定義出来ない)。ゆえに f の孤立特異点は 1 と 3.

$g(z) := \dfrac{q(z)}{(z-3)^2}$ とおくと、

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-1} \quad (0 < |z-1| < 2)$$

であり、g は $D(1; 2)$ で正則, $g(1) \neq 0$ であるので、1 は f の 1 位の極である。

$h(z) := \dfrac{q(z)}{z-1}$ とおくと、

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-3)^2} \quad (0 < |z-3| < 2)$$

であり、h は $D(3; 2)$ で正則, $h(3) \neq 0$ であるので、3 は f の 2 位の極である。■

問 14 解説　Laurent 展開をせずに留数を求める公式を使う練習問題であるが、その公式を適用するためには、仮定の条件をチェックする必要がある。当たり前のことだけれど、定理は結果だけでなく、仮定の部分もきちんと覚える。「(思いつきで) 公式に当てはめて解く」という高校生流から脱却して下さい。

(2) の出来は良くなかったが、こういう問題をじっくり学ぶと理解が深まるである。

(1) f は 1 の近傍 $D(1,1)$ で正則であるから、$\mathrm{Res}(f;1)=0$.

2 は f の 1 位の極である (実際、$g(z):=\dfrac{z-1}{(z-3)^4}$ は $D(2;1)$ で正則で、$g(2)\neq 0$, $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-2}$ $(0<|z-2|<1)$ であるから)。

$$\mathrm{Res}(f;2)=\lim_{\substack{z\neq 2\\ z\to 2}}(z-2)f(z)=\lim_{\substack{z\neq 2\\ z\to 2}}\frac{z-1}{(z-3)^4}=\left.\frac{z-1}{(z-3)^4}\right|_{z=2}=\frac{1}{(-1)^4}=1.$$

3 は f の 4 位の極である (実際、$g(z):=\dfrac{z-1}{z-2}$ は $D(3;1)$ で正則で、$g(3)\neq 0$, $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-3)^4}$ $(0<|z-3|<1)$ であるから)。

$$\mathrm{Res}(f;3)=\lim_{\substack{z\neq 3\\ z\to 3}}\frac{1}{(4-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{4-1}(z-3)^4f(z)=\frac{1}{6}\lim_{\substack{z\neq 3\\ z\to 3}}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)'''.$$

$$\frac{z-1}{z-2}=\frac{z-2+1}{z-2}=1+\frac{1}{z-2}=1+(z-2)^{-1}$$

であるから[6]、

$$\left(\frac{z-1}{z-2}\right)'''=(-1)(-2)(-3)(z-2)^{-4}=\frac{-6}{(z-2)^4}.$$

ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;3)=\frac{1}{6}\cdot\left.\frac{-6}{(z-2)^4}\right|_{z=3}=-1.$$

(2)

$$f(z)=\frac{\tan z}{z}=\frac{\sin z}{z\cos z}.$$

この分母と分子は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。分母の零点は $z=0,(n+1/2)\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ であるから、これらが f の孤立特異点である。

このうち 0 は除去可能特異点である。実際 $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}f(z)=\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\frac{1}{\cos z}=1\cdot 1=1$ であるから。

$n\in\mathbb{Z}$ として、$c_n=(n+1/2)\pi$ とおく。$Q(z):=\dfrac{\sin z}{z}$, $P(z)=\cos z$ とおくと、$P'(z)=-\sin z$ で、$P(c_n)=0$, $P'(c_n)=-\sin c_n=-\sin((n+1/2)\pi)=(-1)^{n-1}\neq 0$ であるから、c_n は P の 1 位の零点である。$Q(c_n)=\dfrac{\sin c_n}{c_n}\neq 0$ であるから、c_n は f の 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}\,(f;c_n)=\frac{Q(c_n)}{P'(c_n)}=\frac{\sin c_n}{c_n}\cdot\frac{1}{-\sin c_n}=-\frac{1}{c_n}=-\frac{1}{(n+1/2)\pi}.\blacksquare$$

---

[6] もちろん、素朴に $\left(\dfrac{z-1}{z-2}\right)'=\dfrac{(z-2)\cdot(z-1)'-(z-2)'\cdot(z-1)}{(z-2)^2}=\dfrac{-1}{(z-2)^2}$, $\left(\dfrac{z-1}{z-2}\right)''=\dfrac{(-1)(-2)}{(z-2)^2}$, $\left(\dfrac{z-1}{z-2}\right)'''=\dfrac{(-1)(-2)(-3)}{(z-2)^3}$ としても良い。

問 15 解答　(1) $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ とおく。被積分関数は偶関数だから $I = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. $P(z) := (z^2+1)^3$, $Q(z) := 1$, $f(z) := \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、$P(z), Q(z)$ は z の多項式で (板書では $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$)、$\deg P(z) = 6 \geq 2 = \deg Q(z) + 2$. また $x \in \mathbb{R}$ ならば $P(x) \geq (0+1)^3 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. 授業で説明した定理によって、

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c) = \pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$P(z) = (z+i)^3(z-i)^3$ であるから、P の零点は $i, -i$ であり、その位数はともに 3. $Q(\pm i) = 1 \neq 0$ であるから、i と $-i$ は f の 3 位の極である。このうち虚部が正であるのは i のみ。

$$\begin{aligned}
I &= \pi i \operatorname{Res}(f;i) = \pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-i)^3 f(z)\right] = \frac{\pi i}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' \\
&= \frac{\pi i}{2}\lim_{z\to i}\frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5} = \frac{\pi i}{2}\cdot\frac{3\cdot 4}{2^5 i^5} = \frac{\pi\cdot 3\cdot 4}{2^6} = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

(2) 求める積分を I とおく。$\sin \pi x = \operatorname{Im}(e^{i\pi x})$ であるから、

$$I = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{i\pi x}}{x^2+4}\,dx.$$

$P(z) := z^2+4$, $Q(z) := z$, $f(z) := \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、$P(z), Q(z)$ は z の多項式で、$\deg P(z) = 2 \geq 2 = \deg Q(z) + 1$. また $x \in \mathbb{R}$ ならば (もう面倒だ) $P(x) \neq 0$. さらに $\pi > 0$. ゆえに授業で説明した定理が適用できて

$$I = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}; c\right)\right).$$

$q(z) := z e^{i\pi z}$ とおくと、q は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。$P(z) = (z+2i)(z-2i)$ であるから、P の零点は $\pm 2i$ で、(さすがに明らかに) 位数はともに 1. ゆえに $\pm 2i$ は $\dfrac{q(z)}{P(z)} = f(z)e^{i\pi z}$ の高々 1 位の極で、そのうち虚部が正であるのは $2i$.

$$\operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}; 2i\right) = \frac{q(2i)}{P'(2i)} = \frac{2i e^{i\pi\cdot 2i}}{2\cdot 2i} = \frac{e^{-2\pi}}{2}.$$

ゆえに

$$I = \operatorname{Im}\left(2\pi i\cdot\frac{e^{-2\pi}}{2}\right) = \operatorname{Im}\left(i\pi e^{-2\pi}\right) = \pi e^{-2\pi}.$$

(3) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、これは $|z| = 1$ のパラメーター表示であり、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

また $dz = ie^{i\theta}d\theta$ より、$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$. ゆえに ($\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ に注意して)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta} &= \int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\cdot\frac{1}{iz}dz = \int_{|z|=1}\frac{dz}{2iz + i(z^2+1)/2 + (z^2-1)/2} \\
&= 2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(i+1)z^2+4iz+(i-1)} = (1-i)\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2(1+i)z+i}.
\end{aligned}$$

$z^2+2(1+i)z+i=0$ の根は

$$z=-(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-i}=-(1+i)\pm\sqrt{i}=-(1+i)\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

前者を α, 後者を β とすると、このうち $|z|<1$ にあるのは β.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+2(1+i)z+i};\beta\right)=\lim_{z\to\beta}\left((z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right)=\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta+\sin\theta}=(1-i)\cdot 2\pi i\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+i)}=\sqrt{2}\pi.\blacksquare$$

訂正の記録

- 問 5(1)(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{3n+1}}{2^n}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left(z^3\right)^n=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\zeta^n.$$
(0 を 1 と書いていました。)
- 問 7(1) で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n=-\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ の負号を落としていた。
- 問 14(2) で、$P(c_n)=0$, $P'(c_n)=-\sin c_n=-\sin((n+1/2)\pi)=(-1)^{n-1}\neq 0$ の -1 を忘れていた。しかし最後の結果には影響しない。$\dfrac{Q(z)}{P'(z)}=\dfrac{\sin z}{z\cdot(-\sin z)}=-\dfrac{1}{z}$ に $z=c_n$ を代入していたため。
- 問 12(1) は講義ノートの例 99 (授業でも説明した) の真似をして、やり方を覚えよう、という問題なのだけど、うっかり例 99 そのものを書いてしまっていた。ごめんなさい。
- 問 12(2) で収束半径を $\sqrt{(c+1/2)^2+3}$ と書いていたけれど、これはひどいミスで $\left|c-\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right|=\sqrt{(c+1/2)^2+\left(\pm\sqrt{3}/2\right)^2}=\sqrt{c^2+c+1}$ が正しい。