例題

(1) $C\colon z=(1+i)t\ (t\in[0,1])$ とするとき、$I=\displaystyle\int_C\bigl(x^2-y^2+2ixy\bigr)\,dz$. ただし, $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$.

(2) $-i$ から i に向かう線分を C とするとき、$\displaystyle\int_C|z|\,dz$

(3) $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ を頂点とする正方形の周を $\mathit{\Gamma}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\mathit{\Gamma}}|z|^2\ dz$.

解説

(1) $z=(1+i)t=t+it\ (t\in[0,1])$ とするとき、$x=\operatorname{Re}z=t$, $y=\operatorname{Im}z=t$, $\dfrac{dz}{dt}=1+i$ であるから、

$$\int_C\bigl(x^2-y^2+2ixy\bigr)\,dz=\int_0^1\bigl(t^2-t^2+2it\cdot t\bigr)\cdot(1+i)dt=2(i-1)\int_0^1 t^2\ dt=\frac{2(i-1)}{3}.$$

(2) $-i$ から i に向かう線分は $z=-i+t(i-(-i))=-i+2it\ (t\in[0,1])$ とパラメーター付けできる。$|z|=|2t-1|$, $\dfrac{dz}{dt}=2i$. (積分は区間を $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ に分割して計算しても良いし、$t\mapsto|2t-1|$ のグラフを描いて、$\displaystyle\int_0^1|2t-1|\,dt=\frac{1}{2}$ と読んでも良い。)

$$\int_C|z|\,dz=\int_0^1|2t-1|\cdot 2i\ dt=2i\int_0^1|2t-1|\,dt=2i\cdot\frac{1}{2}=i.$$

(3) 正方形の各辺を $\mathit{\Gamma}$ と同じ向きに進む曲線を $\mathit{\Gamma}_1$, $\mathit{\Gamma}_2$, $\mathit{\Gamma}_3$, $\mathit{\Gamma}_4$ とすると、

$$I:=\int_{\mathit{\Gamma}}f(z)\ dz=\sum_{j=1}^4\int_{\mathit{\Gamma}_j}f(z)\ dz.$$

- $\mathit{\Gamma}_1$: $z=t\ (t\in[0,1])$. $\dfrac{dz}{dt}=1$, $|z|=t$.
- $\mathit{\Gamma}_2$: $z=1+it\ (t\in[0,1])$. $\dfrac{dz}{dt}=i$, $|z|=\sqrt{1+t^2}$.
- $\mathit{\Gamma}_3$: $z=(1+i)-t=(1-t)+i\ (t\in[0,1])$. $\dfrac{dz}{dt}=-1$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2+1}$.
- $\mathit{\Gamma}_4$: $z=i-it=i(1-t)\ (t\in[0,1])$. $\dfrac{dz}{dt}=-i$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2}=1-t$.

ゆえに

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathit{\Gamma}}|z|^2\,dz=\int_0^1\Bigl(t^2\cdot 1+(1+t^2)\cdot i+\bigl[(1-t)^2+1\bigr]\cdot(-1)+(1-t)^2\cdot(-i)\Bigr)\,dt\\&=\int_0^1[2(1+i)t-2]\,dt=2(1+i)\frac{1}{2}-2\cdot 1=i-1.\end{aligned}$$