2016 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2017 年 1 月 30 日 (月) 9:00〜11:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の 7 問から 6 問を選択して解答せよ。解答の順番は自由である。

問 1.　次の方程式を解け。解は $x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の形と、指数形式、両方で表わせ。
(1) $z^2 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$　(2) $z^6 = -1$.

問 2.　$\mathbb{C}$ の領域 D で正則な関数 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $f(z) = e^z$ であるとき、u と v を求めよ。　(2) $u(x,y) = x^2 - y^2$ であるとき、v を求めよ。
(3) Laplace 方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ が成り立つことを示せ (u と v が C^2 級であることを認めて構わない)。

問 3.　正則関数 f が、0 のある近傍で $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ を満たすとき、以下の問に答えよ。
(1) (一般に) 冪級数の収束半径、収束円の定義を述べよ。　(2) 上の冪級数の収束円を求めよ。また収束円周上の点において、この冪級数が収束するか発散するか調べよ。　(3) f の定義域が領域であり、2 を含むとき、$f(2)$ を求めよ (理由をつけて答えよ)。

問 4.　$f(z) := \dfrac{z^2+1}{(z+1)(3z-1)}$ について、以下のものを求めよ。(1) 0 のまわりの Taylor 展開
(2) $1/3 < |z| < 1$ における Laurent 展開　(3) i のまわりに Taylor 展開したときの収束半径

問 5.　$f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}$ とするとき、以下のものを求めよ。
(1) $1 - \cos z$ の零点とその位数　(2) f の極とその位数、極における留数　(3) $\displaystyle\int_{|z|=10} f(z)\,dz$ の値

問 6.　次の定積分の値を求めよ。　(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^3} dx$

問 7.　以下から 1 つを選んで証明せよ (何か定理を用いる場合は、なるべくその定理を書くこと)。

(a) 正則な関数 f の実部 u、虚部 v が Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(b) Weierstrass の M-test

(c) $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ であり、$f = \dfrac{Q}{P}$, P と Q は点 c の近傍で正則で、$Q(c) \neq 0$, c が P の k 位の零点であるとする。このとき、c は f の k 位の極である。

(d) f は c の近傍で正則、c は g の 1 位の極とするとき、$\mathrm{Res}\,(fg; c) = f(c)\,\mathrm{Res}(g; c)$.

(e) 複素指数関数 e^z の指数法則 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. 複素指数関数の定義は自分で選んで良い。

(f) $\Omega := \{x+yi \mid -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\} \setminus \{x+yi \mid -1/2 \le x \le 1/2, y \ge 0\}$ で定義される Ω は星型でない (Ω の図も描くこと)。

問 1 解説　2 次方程式を解く話 (宿題でやった $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ とほぼ同じ) と、n 乗根の話。

(1) (うっかりミスしてた。2/1 修正。) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{7\pi i/4}$ であるから、$z = \pm e^{7\pi i/8} = e^{7\pi i/8}, e^{-\pi i/8}$ である。一方、$(x+yi)^2 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ を解いて、$(x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. ゆえに

$$z = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}.$$

(2) -1 の極形式は $-1 = 1\cdot e^{\pi}$ であるから、-1 の 6 乗根は $z = \sqrt[6]{1}e^{\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{6}\right)i} = e^{(2k+1)\pi i/6}$ $(k = 0,1,2,3,4,5)$. すなわち

$$z = e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}, e^{\frac{7\pi}{6}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}, e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

問 2 解説　Cauchy-Riemann の方程式がテーマ。

(1) $z = x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とおくと、$f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x\cos y + ie^x\sin y$ であるから、$u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$.

(2) Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ に $u(x,y) = x^2-y^2$ を代入すると、$2x = v_y$, $v_x = 2y$. この条件を満たす関数として、$V(x,y) := 2xy$ が見つかる。$w(x,y) := v(x,y) - V(x,y)$ $((x,y)\in D)$ とおくと、$w_x = v_x - V_x = 2y-2y = 0$, $w_y = v_y - V_y = 2x-2x = 0$. ゆえに、ある定数 C が存在して $w(x,y) = C$ $((x,y)\in D)$. ゆえに $v(x,y) = V(x,y) + C = 2xy + C$.

(3) Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy}.$$

v が C^2 級であるから $v_{xy} = v_{yx}$ が成り立つので、$u_{xx} + u_{yy} = 0$. ■

問 3 解説　$\sum n^2z^n$ は宿題で、収束半径を求めることと、和を求めること、両方をやっている。最後に一致の定理を使って、収束円の外にある点での値が求まるという問題。

(1) 任意の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$0\le\rho\le+\infty$ を満たす ρ が一意的に存在して、$|z-c|<\rho$ ならば収束、$|z-c|>\rho$ ならば発散する。このとき、ρ, $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|<\rho\}$ を、それぞれ (この冪級数の) 収束半径、収束円と呼ぶ。

(2) $a_n := n^2$ とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2} = 1$. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円は $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$. $|z|=1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|n^2z^n\right| = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ であり、一般項 n^2z^n は 0 に収束しないので、冪級数は収束しない。

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1).$$

微分して z をかけ、微分して z をかけると、

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n = \frac{-z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (|z|<1).$$

一致の定理により、f の定義域全体で $f(z) = -\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$. ゆえに $f(2) = -\dfrac{2\cdot 3}{(2-1)^3} = -6$. ■

問 4 解説　有理関数を、部分分数分解してから、等比級数の和の公式を用いて、Taylor 展開、Laurent 展開しようという問題と、収束半径が実際に展開しなくても分かることがある、という話。

f を部分分数分解する。割算して $z^2+1=\dfrac{1}{3}\cdot(z+1)(3z-1)+\dfrac{4}{3}-\dfrac{2z}{3}$ であるから、

$$f(z)=\frac{z^2+1}{(z+1)(3z-1)}=\frac{1}{3}+\frac{2(2-z)}{3(z+1)(3z-1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2(z+1)}+\frac{5}{6(3z-1)}.$$

(1) $|z|<1/3$ のとき、

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\quad(|z|<1),\qquad \frac{1}{3z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}3^n z^n\quad(|z|<1/3)$$

などを使って、

$$f(z)=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}\right]z^n\quad(|z|<1/3).$$

(2) $1/3<|z|<1$ のとき、

$$\frac{1}{3z-1}=\frac{1}{3z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3z}}=\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{1}{z^n}$$

であるから

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n+\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{1}{z^n}\\&=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n+\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{1}{z^n}\quad(1/3<|z|<1).\end{aligned}$$

(3) $\rho=\min\left\{|-1-i|,\left|\frac{1}{3}-i\right|\right\}=\min\left\{\sqrt{2},\sqrt{1+\frac{1}{9}}\right\}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$. ■

問 5 解説　難しいのも出題してみようかと思ったのだけど、ちょっとやり過ぎたかな。
(解答) $P(z):=1-\cos z$, $Q(z):=z$ とおく。P, Q ともに $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

(1) $P(z)=0$ の解は (ちょっとスキップして) $z=2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$. $P'(z)=\sin z$, $P''(z)=\cos z$, $P'(2n\pi)=\sin 2n\pi=0$, $P''(2n\pi)=\cos 2n\pi=1\neq 0$ であるから、$2n\pi$ は P の 2 位の零点である。

(2) $c_n=2n\pi$ とおく。

$c_0=0$ は分母 P の 2 位の零点であり、分子 Q の 1 位の零点であるから、f の 1 位の極である。

$$\operatorname{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{2\sin^2(z/2)}=\lim_{z\to 0}\frac{2(z/2)^2}{\sin^2(z/2)}=2.$$

($1-\cos z=2\sin^2(z/2)$ のかわりに $1-\cos z=\dfrac{z^2}{2}+O(z^4)$ としても極限の計算が出来る。この方が見通しが良いかもしれない。)

$n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ に対する c_n については、$Q(c_n)=2n\pi\neq 0$ であるから、c_n は f の 2 位の極である。

平行移動して、cos の周期性、Res の線形性を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;c_n) &= \mathrm{Res}\left(f(z+c_n);0\right)\\ &= \mathrm{Res}\left(\frac{z+c_n}{1-\cos(z+c_n)};c_n\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{z+c_n}{1-\cos z};0\right)\\ &= \mathrm{Res}\left(\frac{z}{1-\cos z};0\right) + c_n\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1-\cos z};0\right).\end{aligned}$$

上で示したように $\mathrm{Res}\left(\dfrac{z}{1-\cos z};0\right) = \mathrm{Res}\left(f;0\right) = 2.$

また実は (次に示すように) $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{1-\cos z};0\right) = 0$ であるので

$$\mathrm{Res}(f;c_n) = 2 + c_n \cdot 0 = 2.$$

($\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{1-\cos z};0\right) = 0$ の証明) 色々やり方はありますが、どれも今年度の「複素関数」では例を見せそこないました (ちょっとうっかり)。

(i) 2 位の極であることから、

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1-\cos z};0\right) &= d\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{1}{1-\cos z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\sin z}{(1-\cos z)^2}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{2z(z^2/2+O(z^4))-z^2(z-O(z^3))}{\left(z^2+O(z^4)\right)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{O(z^5)}{\left(z^2+O(z^4)\right)^2} = 0.\end{aligned}$$

(ii) 冪級数展開 $1-\cos z = z^2/2 - z^4/24 + \cdots$ の逆数を計算して、$\dfrac{1}{1-\cos z} = \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{120}z^2 + \cdots$ と Laurent 展開できるので、$\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{1-\cos z};0\right) = 0.$

(iii) $\dfrac{1}{1-\cos z}$ は偶関数であるから、0 における Laurent 展開は、偶数次の項しか含まず (特に z^{-1} の項はないので)、留数は 0.

(3) c_n のうち、$|z|=10$ の囲む範囲にあるものは $0,\ 2\pi,\ -2\pi$ であり、他のものは $|z|=10$ の囲む範囲の外部にある。留数定理によって

$$\int_{|z|=10} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f;0)+\mathrm{Res}(f;2\pi)+\mathrm{Res}(f;-2\pi)\right) = 2\pi i(2+2+2) = 12\pi i.\blacksquare$$

問 6 解説

(1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^6+1};\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^6+1};i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^6+1};\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\right)\\ &= 2\pi i\left(\left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}} + \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}\right)\\ &= \frac{2\pi i}{6}\left(\left.\frac{1}{z^5}\right|_{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}} + \left.\frac{1}{z^5}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{z^5}\right|_{z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}\right)\\ &= -\frac{\pi i}{3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}+i+\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right) = -\frac{\pi i}{3}\cdot 2i = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^3}dx &= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3};i\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-i)^3\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3}\right] \\
&= \pi i\left.\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right)''\right|_{z=i} = \pi i\left.\left(12(z+i)^{-5}-6i(z+i)^{-4}-(z+i)^{-3}\right)e^{iz}\right|_{z=i} \\
&= \frac{\pi i}{e}\left(\frac{12}{(2i)^5}-\frac{6i}{(2i)^4}-\frac{1}{(2i)^3}\right) = \frac{\pi}{e}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{7\pi}{8e}.\blacksquare
\end{aligned}$$

問 7 解説　最後の (f) は宿題の答案を見ていて思いついたもの (星型の例をあげなさい、という問題に対して、実際には星型でないものを星型という人もいて、やはり証明してもらうのが良いけれど、こういう問題に証明をつけるのは難しいかな、と思ったら、簡単で (証明も多分難しくない) 例を書いてきた人がいたので、とりあげた。来年度は授業のネタにしようと思っている。)。

(a) $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\Omega$ とする。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とおく。$f'(c)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ であるが、特に $h\in\mathbb{R}$ に限定すると、

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\substack{h\to\mathbb{R}\\ h\to 0}}\frac{u(a+h,b)-u(a,b)+i(v(a+h,b)-v(a,b))}{h} \\
&= u_x(a,b)+iv_x(a,b).
\end{aligned}$$

$h=ih'$ $(h'\in\mathbb{R})$ に限定すると

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{\substack{h'\in\mathbb{R}\\ h'\to 0}}\frac{f(c+ih')-f(c)}{ih'} = \frac{1}{i}\lim_{\substack{h'\to\mathbb{R}\\ h'\to 0}}\frac{u(a,b+h')-u(a,b)+i(v(a,b+h')-v(a,b))}{h'} \\
&= \frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right).
\end{aligned}$$

以上から

$$u_x(a,b)+iv_x(a,b)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right).$$

ゆえに

$$u_x(a,b)=v_y(a,b),\quad u_y(a,b)=-v_x(a,b).$$

(b) 以降は気が向いたら書きます。まずは採点作業だ。 $\blacksquare$