

複素関数練習問題 No. 5

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>

桂田 祐史

2016年11月21日

冪級数の項別微分可能性、正則性、展開の一意性

問題 81. 収束冪級数について“係数比較”が可能なること、つまり $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ と $\{b_n\}_{n \geq 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (|z-c| < r)$$

が成り立てば、 $a_n = b_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であることを示せ。

Taylor 展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n$ は冪級数展開であるが、冪級数展開はこの問題で見たように一通りしかないので、どのようなやり方であっても冪級数の形に変形できれば、それは Taylor 展開である。つまり「Taylor 展開 = 冪級数展開」である。

問題 82. (1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\frac{1}{z+4}$ (b) $\frac{1}{(z-i)^2}$ (c) $\frac{1}{z^2+1}$ (d) $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f (e) $\frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$

((b),(d) は微分積分を考えてみる。(e) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\frac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

問題 83. 次の冪級数の和を求めよ ($\sum_{n=0}^{\infty}$ を用いずに表せ)。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ (結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ が求まる。)

問題 84. e^z , $\cos z$, $\sin z$ を冪級数で定義するとき、 $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ を確かめよ。

問題 85. $z \in \mathbb{C}$ に対して $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

問題 86. (1) $f(z) = e^z$ が $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ を満たすことを用いて、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、 $f(z)f(c-z) = f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $e^a e^b = e^{a+b}$ であることを示せ。

(式変形による (2) の証明も知られているが、(1) から導ける。なお、指数関数の指数法則や三角関数の加法定理は、後で学ぶ「一致の定理」を用いる証明も有名である。)

問題 87. (e^z を冪級数で定義したとき) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、 $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ であることを示せ。

問題 88. p, q が複素数の定数であり、2 次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 根 α, β を持つとする。このとき微分方程式 $\frac{d^2 w}{dz^2} + p \frac{dw}{dz} + qw = 0$ の解 $w = f(z)$ が原点のまわりで冪級数展開可能ならば、 $f(z) = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{\beta z}$ (C_1, C_2 はある定数) と表せることを示せ¹。

¹実変数の範囲で微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$ を考えると、一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ (C_1, C_2 は任意定数) であることは常微分方程式を学んだとき、必ず教わることであるが、それは関数論の世界でも成り立つ、ということである。後で「正則ならば冪級数展開可能」という定理を学ぶと証明が完成する。

問題 89. 任意の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と、任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して、2つの冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p} \quad \left(= \sum_{n=p}^{\infty} a_{n-p}(z-c)^n \right)$$

の収束発散は一致する (収束する $z \in \mathbb{C}$ 全体の集合が等しい)。特に収束半径、収束円も一致する。— 以上を証明せよ。

問題 90. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 であるとするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\rho_1 \neq \rho_2$ であれば、 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ である。

(2) $\rho_1 = \rho_2$ であれば、 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_1 以上である。収束半径が ρ_1 より大きくなる例をあげよ。

一様収束

収束の問題は、あまりうるさく言わないことにするが (定理の証明はきちんと講義し、それを理解するよう努力してもらおうが、試験でそういう問題の比重は高くしない)、理解の手助けのために。

問題 91. $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x < -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 1 & (x > \frac{1}{n}) \end{cases}$$

で $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定めるとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。 $\{f_n\}$ は一様収束するかどうか (根拠をつけて) 答えよ。

問題 92. $K = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, x \in K$) とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x \in K$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。(2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は K では一様収束しないが、 $0 < R < 1$ なる任意の R に対して、 $[0, R]$ では一様収束することを示せ。

初等関数

問題 93. 以下の方程式を (\mathbb{C} 内で) 解け (解を書くのは簡単なものが多いが、漏れがないことが分かるように解くこと)。

$$(1) e^z = 1 \quad (2) e^z = -1 \quad (3) e^z = 1 + \sqrt{3}i \quad (4) \sin z = 0 \quad (5) \sin z = 2$$

ヒント: (1),(2),(3) は複素関数の \log を使っても良いし、 $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いて、実関数 $e^x, \cos y, \sin y$ の話を持ち込んでも良い。(後者の方が後々忘れにくいとは思うけれど、どちらでもよい。) (4) と (5) は e^{iz} の話を持ち込む。

問題 94. $\cos z, \sin z$ の加法定理を証明せよ。

問題 95. (1) $\cosh(iz) = \cos z, \sinh(iz) = i \sin z, \tanh(iz) = i \tan z, \coth(iz) = -i \cot z$ であることを示せ。

(2) $\cos(iz) = \cosh z, \sin(iz) = i \sinh z, \tan(iz) = i \tanh z, \cot(iz) = -i \coth z$ であることを示せ。

問題 96. (逆三角関数、逆双曲線関数は、 $\sqrt{\quad}$ や \log を使って表せることを理解するための問題)

(1) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、 $w = \sinh z$ を満たす z を求めよ (w で表せ)。ただし $\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ とする。(arcsinh という記号は用いず、四則と $\sqrt{\quad}$ で表すこと。)

(2) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、 $w = \sin z$ を満たす z を求めよ。(arcsin や \sin^{-1} という記号は用いず…)

(3) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、 $w = \tan z$ を満たす z を求めよ。(arctan や \tan^{-1} という記号は用いず…)

解答

解答 81. $|z - c| < r$ を満たす z に対して、 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - c)^n$ とおくと、 $f: D(c; r) \rightarrow \mathbb{C}$ は正則で、冪級数の項別微分定理から、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

が得られる。これは $\{b_n\}$ についても同じで

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

ゆえに任意の n に対して $a_n = b_n$. ■

解答 82. (1) (なるべくゆっくりと式変形する。目標は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の形にする (a_n を求める) ことである。)

(a) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束 \Leftrightarrow |公比| $< 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$ であるから、収束半径は 4.

(b) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i+z} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{1+iz} = i \cdot \frac{1}{1-(iz)} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n$$

である。収束 \Leftrightarrow |公比| $< 1 \Leftrightarrow |-iz| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1. これから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-i)^2} &= -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} i^{n+1} n z^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m i^{m+2} (m+1) z^m = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+2} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} i^n (n+1) z^n. \end{aligned}$$

収束半径は項別微分しても変わらないので、1.

(c) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

a_n を

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k \ (k = 0, 1, \dots)) \end{cases}$$

で定めると、

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

収束 \Leftrightarrow |公比| $< 1 \Leftrightarrow |-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1.

(d) $(\tan^{-1}z)' = \frac{1}{z^2+1}$ である。特に $\tan^{-1}z$ は 0 の近傍で正則であるから、 $z = 0$ のまわりで Taylor 展開できる:

$$\tan^{-1}z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z| < \exists r).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}z^n = (\tan^{-1}z)' = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

ただし a_n は (c) で出て来たものである。ゆえに

$$(n+1)b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k+1 (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

(e) $f(z) := \frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z - 6}$ とおく。 $f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z - 6$ で割ると、商 $z+2$ 、余り $3z-7$ であるから、

$$f(z) = z + 2 + \frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z - 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A = 1, B = 2$ 。ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

$z+2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2).$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3).$$

$f(z)$ の $z=0$ のまわりの Taylor 展開の収束半径は、0 と $\{2, 3\}$ との距離 2 である。そして、

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2} - 2 \cdot \frac{1}{3^2}\right)z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36}z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

(2) 目標は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ の形に表すことである。

等比級数の和の公式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-1)^n. \end{aligned}$$

収束 \Leftrightarrow |公比| $< 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 4$ であるから、収束半径は 4。■

解答 83.

(1) 公比が z の等比級数であるから、収束の条件は $|z| < 1$ で、そのとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

収束円は $D(0; 1)$ 。

(2) (1) の冪級数を項別に微分したものであるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = -(z-1)^{-1}' = (z-1)^{-2} = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

収束円は (1) と同じで $D(0; 1)$.

(3) (2) の冪級数に z をかけたものになっている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

収束円は (2) と同じで $D(0; 1)$.

(4) (3) の級数を項別微分して z をかけたものである。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^n \right)' = z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = z \frac{(z-1)^2 \cdot 1 - 2(z-1) \cdot z}{(z-1)^4} = z \frac{(z-1) - 2z}{(z-1)^3} = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

収束円は (3) と同じで $D(0; 1)$. ■

要するに「 n をかける \longleftrightarrow 微分して z をかける」ということ。数学検定の問題見本で見かけた「 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ を求めよ。」という問題を来年度は問題に含めよう。

ちなみに Mathematica はこういう級数の和を計算してくれる。収束条件は表示してくれないが、簡略の検算にはなる。Sum[n^2 z^n, {n, 1, Infinity}] とすると $-\frac{z(1+z)}{(-1+z)^3}$ という結果を返す。■

解答 84. どれでも同じだから、一つだけやっておく。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

である。 $n \in \mathbb{N}$ のとき $(z^n)' = n z^{n-1}$, $n = 0$ のとき $(z^n)' = (1)' = 0$ であるので

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z. \blacksquare$$

解答 85. 冪級数展開

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

を使って証明する。(こういう問題は何を使ってよいかで解答の仕方が異なるので、本当は問題文にそれを書かないといけない。一致の定理を使って証明せよ、という問題もあり得る。)

k を整数とすると、

$$i^n = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod{4}) \\ i & (n \equiv 1 \pmod{4}) \\ -1 & (n \equiv 2 \pmod{4}) \\ -i & (n \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}, \quad i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

であるから

$$i^n + (-i)^n = [1 + (-1)^n] i^n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ 2 \cdot i^n & (n \text{ が偶数}) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ (-1)^{k/2} 2 & (n \text{ が偶数}, n = 2k), \end{cases}$$

$$i^n - (-i)^n = [1 - (-1)^n] i^n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 \cdot i^n & (n \text{ が奇数}) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ (-1)^{k/2} 2i & (n \text{ が奇数}, n = 2k+1). \end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z,$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n - (-i)^n}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin z. \blacksquare$$

解答 86.

(1) $F(z) := f(z)f(c-z)$ とおく。積の微分法と合成関数の微分法と仮定 $f' = f$ により

$$\begin{aligned} F'(z) &= (f(z)f(c-z))' = (f(z))' \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (f(c-z))' = f'(z)f(c-z) + f(z)(-f'(c-z)) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0. \end{aligned}$$

ゆえに F は定数関数である。 $F(0) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c)$ 。ゆえに $F(z) \equiv f(c)$ 。すなわち $f(z)f(c-z) \equiv f(c)$ 。

(2) ((1) で言っているのは、 $(\forall c \in \mathbb{C}) (\forall z \in \mathbb{C}) f(z)f(c-z) = f(c)$ ということである。)

任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、 $c = a + b$, $z = a$ とおくと、 $c - z = b$ であるから、 $f(a)f(b) = f(a + b)$ 。すなわち $e^a e^b = e^{a+b}$. \blacksquare

解答 87. (念のため状況の説明: 講義では早めに指数関数を使ったかったので、 $e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と定めたが、ここでは指数関数を $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ と定義し、この冪級数の収束半径が ∞ であることは確認済みとする。また、指数法則も証明済みとする。)

まず指数法則により、任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

収束する級数は 2 項ずつまとめて和を取ることが出来る (部分和の作る数列が収束列であるから、その部分列は同じ極限を持つ収束列である)。ゆえに

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i^{2k}}{(2k)!} y^{2k} + \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} y^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \right).$$

一方、

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k}, \quad \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}$$

であるから、

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} = \cos y + i \sin y.$$

ゆえに

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \blacksquare$$

(注: 絶対収束する級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、自由な順番で和を取ることが出来て、例えば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$ が成り立つ。このことを用いると、もっとストレートに証明出来る。)

解答 88. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が収束冪級数とすると、 $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) が導かれる。ゆえに $(n+2)!a_{n+2} + (n+1)!a_{n+1} + n!a_n = 0$ 。従って、 $b_n := n!a_n$ とおくと、 $b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n = 0$ が成り立つ。(定数係数の線形差分方程式の一般論から) ゆえに適当な C_1, C_2 を取ると、 $b_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n$ ($n = 0, 1, \dots$) が成り立つ。これから $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n}{n!} z^n = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha z)^n}{n!} + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta z)^n}{n!} = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{\beta z}$. \blacksquare

解答 89. どちらの冪級数も、 $z = c$ に対しては収束する。 $z \neq c$ の場合を考える。

次が成り立つことに注意する。「 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ が収束するならば、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n$ も収束し、 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 」

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して、 $\lambda = (z-c)^p$ として適用することで、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が収束するならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p}$ も収束することが分かる。

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して、 $\lambda = (z-c)^{-p}$ として適用することで、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p}$ が収束するならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束することが分かる。

結局、任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p} \text{ が収束する} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ も収束する}$$

が成り立つ。特に 2 つの冪級数の収束半径、収束円は一致する。■

解答 93. (実関数としての指数関数と、複素関数としての指数関数を区別するため、前者を e^x 、後者を $\exp z$ と表す約束で書いてみる。— ここだけのローカル・ルール)

(1) (\log がどういうものかまだ知らない場合の解答) z の実部と虚部をそれぞれ x, y と表す。 $\exp z = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ で、 $|\exp z| = e^x$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \exp z = 1 &\Leftrightarrow e^x (\cos y + i \sin y) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y + i \sin y = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y = 1 \quad \text{and} \quad \sin y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{and} \quad (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad y = 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = 2n\pi i. \end{aligned}$$

(\log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log 1$ は何か、という問題である。 $1 = 1e^{i0}$ が 1 の極形式であるから

$$\log 1 = \log 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) (\log がどういうものかまだ知らない場合の解答) $\exp \pi i = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} \exp z = -1 &\Leftrightarrow \exp z \exp \pi i = 1 \\ &\Leftrightarrow \exp(z + \pi i) = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z + \pi i = 2n\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = (2n - 1)\pi i. \end{aligned}$$

(\log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log(-1)$ は何か、という問題である。 $-1 = 1e^{i\pi}$ が -1 の極形式であるから

$$\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n + 1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(3) $\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\Leftrightarrow \exp(iz) - \exp(-iz) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exp(2iz) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad 2iz = 2n\pi i \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = n\pi. \end{aligned}$$

(あるいは $w := \exp(iz)$ について $w - \frac{1}{w} = 0$ から、 $w^2 - 1 = 0$ 。これから $w = 1$ または $w = -1$ 。前者から $z = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)、後者から $z = (2m - 1)\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$)。まとめて $z = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)。)

(4) $\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ であるから、途中で $w := \exp(iz)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = 2 \\ &\Leftrightarrow \exp(iz) - \exp(-iz) = 4i \\ &\Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 4i \\ &\Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow w = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 - (-1)} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{\pi i/2}. \end{aligned}$$

ただし、 $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とするとき、

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が成り立つことを用いた。

$r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\exp z = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned} \sin z = 2 &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

解答 94. 任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して (途中で $w_1 := e^{z_1}$, $w_2 := e^{z_2}$ とおいて)

$$\begin{aligned} &\cos(z_1 + z_2) - (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} - \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \left[w_1 w_2 + \frac{1}{w_1 w_2} \right] - \frac{1}{4} \left[\left(w_1 + \frac{1}{w_1} \right) \left(w_2 + \frac{1}{w_2} \right) + \left(w_1 - \frac{1}{w_1} \right) \left(w_2 - \frac{1}{w_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4w_1 w_2} (2w_1^2 w_2^2 - (w_1^2 + 1)(w_2^2 + 1) - (w_1^2 - 1)(w_2^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{4w_1 w_2} (2w_1^2 w_2^2 - (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 + w_2^2 + 1) - (w_1^2 w_2^2 - w_1^2 - w_2^2 + 1)) = 0 \end{aligned}$$

より $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$. \sin についても同様に出来る。 ■

解答 95.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z}$$

であるから

$$\begin{aligned} \cosh(iz) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \\ \sinh(iz) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z, \\ \tanh(iz) &= \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i \sin z}{\cos z} = i \tan z, \\ \coth(iz) &= \frac{1}{i \tan z} = -i \cot z. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \cosh(i^2 z) = \cosh(-z) = \cosh z, \\ \sin(iz) &= \frac{1}{i} \sinh(i^2 z) = -i \cdot \sinh(-z) = i \sinh z, \\ \tan(iz) &= \frac{1}{i} \tanh(i^2 z) = -i \cdot \tanh(-z) = i \tanh z, \\ \cot(iz) &= \frac{1}{-i} \coth(i^2 z) = i \cdot \coth(-z) = -i \coth z. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

解答 96.

- (1) $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ であるから、 $Z := e^z$ とおくと、 $w = \frac{Z - 1/Z}{2}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2wZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = w \pm \sqrt{w^2 + 1}.$$

$z = 0$ のとき、 $Z = e^z = 1$, $w = \sinh z = 0$ であるので、 $w = 0$ の十分小さな近傍に対して $Z = 1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\quad}$ の分枝を定めた場合は $Z = w - \sqrt{w^2 + 1}$ は不適で、 $Z = w + \sqrt{w^2 + 1}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = w + \sqrt{w^2 + 1}.$$

これから

$$z = \log Z = \log \left(w + \sqrt{w^2 + 1} \right).$$

(log は多価だから、1 つの w に複数の w が対応することが分かる。)

- (2) (上とほぼ同様で) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であるから、 $Z := e^{iz}$ とおくと、 $w = \frac{Z - 1/Z}{2i}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2iwZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = iw \pm \sqrt{1 - w^2}.$$

$z = 0$ のとき、 $Z = e^{iz} = 1$, $w = \sin z = 0$ であるので、 $w = 0$ の十分小さな近傍に対して $Z = 1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\quad}$ の分枝を定めた場合は $Z = iw - \sqrt{1 - w^2}$ は不適で、 $Z = iw + \sqrt{1 - w^2}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = iw + \sqrt{1 - w^2}.$$

これから

$$iz = \log Z = \log \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right).$$

ゆえに

$$z = -i \log \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right).$$

- (3) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$ であるから、 $Z := e^{iz}$ とおくと、

$$w = -i \frac{Z - 1/Z}{Z + 1/Z} = -i \frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1}.$$

これは Z^2 についての 1 次方程式で、解は $Z^2 = \frac{1 + iw}{1 - iw}$. これから

$$Z = \sqrt{\frac{1 + iw}{1 - iw}}.$$

上と同様に、 $w = 0$ の十分小さな近傍に $Z = 1$ の近傍が対応するようにするには、 $\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\quad}$ の分枝を定めた場合、 $Z = -\sqrt{\frac{1 + iw}{1 - iw}}$ は不適である。

$$iz = \text{Log } Z = \log \sqrt{\frac{1 + iw}{1 - iw}} = \frac{1}{2} (\log(1 + iw) - \log(1 - iw)).$$

ゆえに

$$z = \frac{i}{2} (\log(1 - iw) - \log(1 + iw)). \blacksquare$$

少しもやもやするところが残るかもしれないが、現時点までに分かったことを整理してみると、

- 指数関数、三角関数、双曲線関数は、自然に複素関数に拡張できる。それらの間に成り立つ関係式などは、複素関数でもそのまま成り立つ。

- 次のように定義する (そうするのが自然であると考えられるので)。

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} w &= \log \left(w + \sqrt{w^2 + 1} \right), \\ \operatorname{arcsin} w &= -i \log \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right), \\ \operatorname{arctan} w &= \frac{i}{2} (\log(1 - iw) - \log(1 + iw)).\end{aligned}$$

- 指数関数、三角関数、双曲線関数の逆関数も複素関数に拡張できるが、多価性を持つ (のが普通であるらしい、全部確かめたわけではないが)。
- 対数関数は既に一定のレベルで解決している。
- 逆三角関数、逆双曲線関数は、対数関数と (補助的に) $\sqrt{\quad}$ を用いて表示できる (らしい、全部確かめたわけではないが)。
- — ということは、対数関数の多価性 (これは既にはっきりわかっている) と $\sqrt{\quad}$ の多価性が良く分かれば、逆三角関数と逆双曲線関数の多価性も理解できそうだ。