複素関数 宿題 No. 8 (2015/11/24 出題, 11/30 提出、裏面使用可)

__ 年 __ 組 ____ 番 氏名 ____________

問 8 (1), (5) は閉曲線で、向きに言及していないので正の向きと解釈して解いて下さい。

(1) $r>0$, $c\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}(z-c)^n\,dz$ (n で場合分けが必要)

(2) $C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とするとき、$\displaystyle\int_C \bar{z}\,dz$

(3) $C\colon z=(1+i)t$ $(t\in[0,1])$ とするとき、$\displaystyle I=\int_C\left(x^2-y^2+2ixy\right)dz.$ ただし, $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$.

(4) $-i$ から i に向かう線分を C とするとき、$\displaystyle\int_C |z|\,dz$

(5) 0, 1, $1+i$, i を頂点とする正方形の周を $\mathit{\Gamma}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\mathit{\Gamma}}|z|^2\ dz$ と $\displaystyle\int_{\mathit{\Gamma}}\left(3z^2+iz-4\right)\ dz$

問8の解説

(1) $|z-a|=r$ (正の向きに一周) は、$z=a+rr^{i\theta}$ ($\theta\in[0,2\pi]$) とパラメーター付けできる (始点=終点がどこか、指定していないが、閉曲線の場合は、それも線積分には影響しない)。

$\dfrac{dz}{d\theta}=ire^{i\theta}$ であるから、

$$I:=\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^n}\cdot ire^{i\theta}d\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d\theta.$$

$n\neq 1$ のとき、

$$I=\frac{i}{r^{n-1}}\left[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\right]_0^{2\pi}=0.$$

($e^{(1-n)i\theta}$ は θ につき周期 2π なので、値を求める必要もなく、$\theta=0,2\pi$ で同じ値であることから $I=0$ と分かる。)

$n=1$ のとき、

$$I=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

注意: $n\neq 1$ ならば、$\dfrac{1}{(z-a)^n}=(z-a)^{-n}$ は $\dfrac{1}{1-n}(z-a)^{1-n}$ という原始関数を持つので、閉曲線に沿う積分は 0 と分かる。$n=1$ のときは、真面目に計算するので良いかも。

(2) $z=e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,\pi]$) とすると、$\overline{z}^2=\left(e^{-i\theta}\right)^2=e^{-2i\theta}$, $\dfrac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$.

$$\int_C\frac{1}{\overline{z}^2}dz=\int_0^{\pi}\frac{1}{e^{-2i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}d\theta=\frac{i}{3i}\left[e^{3i\theta}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\left(e^{3i\theta}-e^0\right)=\frac{-1-1}{3}=-\frac{2}{3}.$$

(別解) C 上では $\overline{z}=e^{-i\theta}=\dfrac{1}{z}$ であるから、$\dfrac{1}{\overline{z}^2}=z^2$. これは原始関数を持つので簡単に積分が計算できる。

$$\int_C\frac{1}{\overline{z}^2}dz=\int_C z^2\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1}=-\frac{2}{3}.$$

(3) $z=(1+i)t=t+it$ ($t\in[0,1]$) とするとき、$x=\operatorname{Re}z=t$, $y=\operatorname{Im}z=t$, $\dfrac{dz}{dt}=1+i$ であるから、

$$\int_C\left(x-y+ix^2\right)dz=\int_0^1\left(t-t+it^2\right)\cdot(1+i)dt=(i-1)\int_0^1t^2\,dt=\frac{i-1}{3}.$$

(この問題は工夫のしようが思い付かない。)

(4) $-i$ から i に向かう線分は $z=-i+t(i-(-i))=-i+2it$ ($t\in[0,1]$) とパラメーター付けできる。$|z|=|2t-1|$, $\dfrac{dz}{dt}=2i$. (積分は区間を $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ に分割して計算しても良いし、$t\mapsto|2t-1|$ のグラフを描いて、$\displaystyle\int_0^1|2t-1|\,dt=\frac{1}{2}$ と読んでも良い。)

$$\int_C|z|\,dz=\int_0^1|2t-1|\cdot 2i\,dt=2i\int_0^1|2t-1|\,dt=2i\cdot\frac{1}{2}=i.$$

(5) (うーん、仕事が押していたとはいえ、ノートを行方不明にして、短時間の解き直しで間違えたのはちょんぼだ。)

図は黒板に描いたもので。正方形の各辺を Γ と同じ向きに進む曲線を $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$ とすると、

$$I:=\int_\Gamma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^4\int_{\Gamma_j}f(z)\,dz.$$

- Γ_1: $z=t$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=1$, $|z|=t$.
- Γ_2: $z=1+it$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=i$, $|z|=\sqrt{1+t^2}$.
- Γ_3: $z=(1+i)-t=(1-t)+i$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=-1$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2+1}$.
- Γ_4: $z=i-it=i(1-t)$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=-i$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2}=1-t$.

ゆえに

$$\begin{aligned} I&=\int_\Gamma |z|^2\,dz=\int_0^1\left(t^2\cdot 1+(1+t^2)\cdot i+\left[(1-t)^2+1\right]\cdot(-1)+(1-t)^2\cdot(-i)\right)dt\\ &=\int_0^1\left[2(1+i)t-2\right]dt=2(1+i)\frac{1}{2}-2\cdot 1=i-1. \end{aligned}$$

$3z^2+iz-4$ は多項式で ($z^3+\dfrac{i}{2}z^2-4z$ という) 原始関数を持つので、閉曲線に沿う積分は 0 である。

$$\int_\Gamma\left(3z^2+iz-4\right)dz=0.$$

Mathematica でいいかげんな検算

(1) は r とか入っているし ($r=1$ とかしてみる手はある)、場合分けもあるし ($n=1$ みたいなのは無視するという Mathematica 流をやってくれる)、そのままでは簡単に計算してくれないが、(2),(3),(4),(5) はすぐ計算してくれる。
$\displaystyle\int_C f(z)dz$, $C\colon z=\varphi(t)$ ($t\in[a,b]$) を計算する 1 行関数 `li[]` を定義して、放り込んでみる。

```
li[fz_,phit_,a_,b_]:=Integrate[(fz/. z->phit)D[phit,t],{t,a,b}]

fz=Re[z]-Im[z]+I Re[z]^2
li[fz,t+I t,0,1]

fz=1/Conjugate[z]^2
li[fz,Exp[I t],0,Pi]

fz=Abs[z]
li[fz,-I+2I t,0,1]

fz=Abs[z]^2
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1] +
 li[fz, (1 - t) + I, 0, 1] +
 li[fz, I (1 - t), 0, 1]

fz=3z^2+I z-4
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1] +
 li[fz, (1 - t) + I, 0, 1] +
 li[fz, I (1 - t), 0, 1]
```

一応手計算の結果と一致したので、多分大丈夫。