2015 年度 複素関数, 複素関数同演習 期末試験問題

2016 年 1 月 25 日 (月) 13:00〜15:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の 8 問から 7 問を選択して解答せよ。解答の順番は自由である。

1. $z = 1 - i$ とするとき、$\dfrac{1}{z}$, z^2, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$, $\operatorname{Arg} z$, z の極形式, z^{10}, $\operatorname{Log} z$ を求めよ (極形式以外は $a + bi$ あるいは a あるいは bi $(a, b \in \mathbb{R})$, いずれかの形に表せ)。結果のみで良い。

2. 次の各用語を説明せよ (定義を述べ、実例をあげよ)。
(1) 零点とその位数　(2) 孤立特異点のまわりの Laurent 展開と留数　(3) 除去可能特異点

3. (1) $f(z) = \cos z$ の実部 u, 虚部 v を求め、それらが Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを実際に方程式に代入することで確かめよ。 (2) 任意の正則関数 f の実部 u, 虚部 v は $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ を満たすことを示せ。ただし、u と v が C^2 級であり、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことは用いて良い。

4. 次の各方程式を (複素数の範囲で) 解け。(1) $\sin z = 2$　(2) $\tan z = i$

5. 次の各関数の 1 のまわりの Taylor 展開を求めよ。

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$　(2) $g(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$　(3) $h(z) = \dfrac{z^2 + 4z - 6}{(z-2)(z+1)}$

6. $\operatorname{Res}(f; 0)$ を求めよ。

(1) $f(z) = \dfrac{(z+1)^{10}}{z^3}$　(2) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$　(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$

7. 次の定積分を求めよ。何か公式 (定理) を用いる場合は、その公式を説明すること。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta$

8. 以下の命題から 2 つ選んで証明せよ。

(a) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と正の数 M, r に対して、$|a_n| \le M r^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が成り立つならば、$|z| < \dfrac{1}{r}$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。

(b) f が正則関数ならば、f の実部と虚部をそれぞれ u, v とするとき、u, v は Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(c) f が領域で定義された正則関数で、f が実数の値しか取らないならば、f は定数関数である。

(d) c が f の k 位の極であるとき、$\operatorname{Res}(f; c) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{\substack{z \ne c \\ z \to c}} \left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z)\right]$.

(e) 任意の実数 ξ に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{x^2+1} \, dx = e^{-|\xi|}$

とりあえず計算結果が分かる、自己採点用のバージョン。

2016 年 2 月 5 日版

1. 「結果のみで良い。」だけど、途中経過を書く人が結構多い。20 点満点。$2 \times 10 = 20$ 点

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad z^2 = -2i, \quad \operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = -1, \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \overline{z} = 1 + i,$$
$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, \quad z^{10} = -32i, \quad \operatorname{Log} z = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}i.$$

コメント　この問題は高校生でも 7 割解けるはずで (Arg, Log は知らないだろうけど)、大学生としては満点が取れて欲しい。半分くらいしか解けない人は勉強していると認めにくい (ちょっとズレてる)。

- Arg, Log の先頭が大文字なのは主値を表す。だから $\operatorname{Arg} z = \dfrac{7\pi}{4}$ は間違い。
- 一方、極形式は何か一つ偏角を選んで書けば良いので、$z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ でも良い。
- $\operatorname{Log} z$ お手上げの人もいたのは困る。複素対数関数は重要です。

2. 20 点満点。(1), (2), (3) それぞれ 5, 10, 5 点。
(1) もし $f^{(k)}(c) \neq 0$ なかったら 3 点まで。(2) 式が書けたら 5 点で、これは甘く採点する。a_{-1} を留数と言えて 5 点。(3) これも甘めに。Laurent 展開の主部 $= 0$ くらいでも良い。

(1) c が正則関数 f の零点であるとは、$f(c) = 0$ を満たすことをいう。c が f の k 位の零点であるとは、$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$, $f^{(k)}(c) \neq 0$ が成り立つことをいう。あるいは「c が f の k 位の零点であるとは、c のある近傍 U で正則な関数 g で、$f(z) = (z-c)^k g(z)$ $(z \in U)$, $g(c) \neq 0$ を満たすものが存在することをいう」。

(2) c が f の孤立特異点であるとき[1]、正数 ε と複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して、

$$(\sharp) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < \varepsilon)$$

が成り立つ。(特に $\{a_n\}$ は f と c で一意的に定まる。) この ($\sharp$) を f の c のまわりの Laurent 展開と呼ぶ。また、a_{-1} を f の c における留数と呼び、$\operatorname{Res}(f; c)$ で表す。

(3) c が f の孤立特異点であるとき、c が f の除去可能特異点であるとは、f を c のまわりで、($\sharp$) のように Laurent 展開したとき、$a_{-n} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つことをいう。■

コメント

- (1) 零点と極を勘違いしている人多数。ちょっと驚きました。そういう人は、言葉の感覚が鈍い (値が零になる点だから零点である — これは言ってあるし、極というのは、絶対値の lim が無限大になることで、まったく逆だ)。それと、「◯◯の」を無視して話を聞いたり、読んだりしているのだと思う。例えば 1 は、$\dfrac{1}{z-1}$ の極であり、分母 $z-1$ の零点である。これは何でもそうで、例えば $\operatorname{Res}(f; c)$ を単に「留数」と言うのは良くない。「f の c における留数」と言うべきだ。

[1] $0 < R \leq \infty$ を満たす R で、$0 < |z-c| < R$ で f が正則であり、$|z-c| < R$ では正則でない (f が c で定義されていないか、f が c で微分可能でない) ことを意味する。

- **「正則関数の零点は、多項式の根の一般化」**なんだけど、「多項式の根」が高校数学から消えた言葉なので、零点も頭に入りにくいのかな。

- (2) で $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と書いた人がかなりの数いたのだけど (何か変な試験対策プリントでも出回ってるのかしら?と思ったら、僕自身の昨年度の期末試験の解説が震源地か (苦笑))、a_{-n} $(n=1,2,\cdots)$ 出て来るのだから、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ でないとおかしい。

- (2) は (♯) が書けることと、「a_{-1} が留数だ」くらいで正解にしておいた。

- Laurent 展開の式で、
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$
のように $\sum$ の n の範囲をどちらも $n=0$ から始めた人が結構いた。Laurent 展開は、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ とまとめて書く人もいるくらいで、それを $n\geq 0$ と $n<0$ に分けて二つの $\sum$ にしているわけですね。どちらにも $=0$ を入れたらダブってしまう。間違いだ。

3. 15 点満点。f の実部 u, 虚部 v を求めること 5 点, Cauchy-Riemann 方程式を正確に覚えていてチェックすること 5 点, C^2 級なので $u_{xy}=u_{yx}$, $v_{xy}=v_{yx}$ は 5 点。

(1) $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とすると、
$$\begin{aligned}f(z)=\cos z&=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}=\frac{e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)+e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)}{2}\\&=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x+i\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x=\cosh y\cos x-i\sinh y\sin x.\end{aligned}$$

ゆえに
$$u(x,y)=\cosh y\cos x,\quad v(x,y)=-\sinh y\sin x.$$

従って
$$u_x=-\cosh y\sin x\quad u_y=\sinh y\cos x,\quad v_x=-\sinh y\cos x,\quad v_y=-\cosh y\sin x.$$

確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を満たす。

(2) Cauchy-Riemann 方程式に代入することで
$$u_{xx}+u_{yy}=(u_x)_x+(u_y)_y=(v_y)_x+(-v_x)_y=v_{yx}-v_{xy},$$
$$v_{xx}+v_{yy}=(v_x)_x+(v_y)_y=(-u_y)_x+(u_x)_y=-u_{yx}+u_{xy}.$$

u, v は C^2 級であるから、$u_{xy}=u_{yx}$, $v_{xy}=v_{yx}$ が成り立つので、$u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$. ■

コメント

- u と v の書き分けが出来ない人がまだ残ってました (苦笑)。善意に解釈してあげたけど、文字が書き分けられない人は、中学高校の教員になってはマズイと思うよ (心配だ)。

- cosh, sinh を覚えていない人も多いのかな。覚えて下さい (あちこちで出て来る — 例えば Mathematica は結果を表すのに、良く cosh, sinh を用いる)。まあ、cosh, sinh を使わずに、e^y, e^{-y} を使って解答して構わないけど。

- 偏微分の順序の交換 $u_{xy}=u_{yx}$, $v_{xy}=v_{yx}$ は無条件では成り立たないので、「u や v が C^2 級だから」のような根拠を書く必要がある。
- u_{xy} は、普通は、u をまず x で偏微分し、それから y で偏微分したものである。$u_{xy}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ である。
- $\dfrac{\partial u}{\partial y \partial x}$ のような式を書く人が複数 (教師としては見慣れているけれど、やはりマズイ)。もちろん $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ とすべきだ。

4. 15 点満点。(1) e^{iz} を求めて 5 点。正確に z を求めて 5 点。(2) 解なしと分かって 5 点。

(1) $Z := e^{iz}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\sin z = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad Z - \frac{1}{Z} = 4i \quad \Leftrightarrow \quad Z^2 - 4iZ - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad Z = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 1 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow Z = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i.
\end{aligned}
$$

$\left(2\pm\sqrt{3}\right) i$ の指数形式は $\left(2\pm\sqrt{3}\right) e^{i\pi/2}$ であるから、これは次と同値である

$$
(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).
$$

ゆえに

$$
z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).
$$

(2) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \cdot \dfrac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$ であるから、

$$
\tan z = i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = i \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = -\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = 0.
$$

指数関数の値は 0 になることはない (任意の ζ に対して、$e^{\zeta}e^{-\zeta} = e^{\zeta-\zeta} = e^0 = 1 \neq 0$ より $e^{\zeta} \neq 0$) ので、 $e^{iz}=0$ を満たす z は存在しない。ゆえに、この方程式の解は存在しない。 ■

コメント

- $(2\pm\sqrt{3})i$ の偏角はともに $\pi/2$ とすれば良いけれど、$\pm\pi/2$ と間違えた人もいた。$(2\pm\sqrt{5})i$ の場合と混同しているのだろう。$2>\sqrt{3}$ だけど、$\sqrt{5}>2$ なので違うんだ。
- n が何であるか書かなかったり、$n \in \mathbb{N}$ と間違えたりする人がちらほら。整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は良く登場するので、きちんと覚えておこう。
- (2) で $e^{iz}=0$ まで導けて、そこから沈没する人が多い。授業で「指数関数の値は 0 にならない」と何度も言ってあるし (分かっている人にはくどいと思われることを覚悟した上で、やってます)、「$z = re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ のとき、$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$」という「複素対数の定義」をきちんと覚えておけば $\log 0$ が出て変だ。どういうことだろう？と慎重モードになるはずだ。

5. 20点満点。(1), (2), (3) それぞれの展開式に5点。収束半径をみなキチンと書けたら完答で20点。

(1)
$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n .$$

収束 $\Leftrightarrow |z-1| < 1$.

(2)
$$g(z) = -\left(\frac{1}{z+1}\right)'$$

であることに注意する。

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n.$$

この冪級数が収束 $\Leftrightarrow \left|-\dfrac{z-1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2$. ゆえに収束半径は 2 である。冪級数は項別微分可能で、

$$g(z) = -\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}(z-1)^n.$$

収束半径は項別微分で変わらないので、2.

(3) まずは部分分数分解してみるものです。z^2+4z-6 を $(z-2)(z+1) = z^2-z-2$ で割ると、商 1, 余り $5z-4$ であるから、$z^2+4z-6 = 1\cdot(z-2)(z+1)+5z-4$. ゆえに

$$h(z) = 1 + \frac{5z-4}{(z-2)(z+1)}.$$

$z-2$, $z+1$ は互いに素であるから、

$$\frac{5z-4}{(z-2)(z+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1}$$

を満たす A, B が存在するはず (A, B は次数がそれぞれ $z-2$, $z+1$ の次数より低い多項式なので、定数)。容易に $A=2$, $B=3$ と求まる。ゆえに

$$h(z) = 1 + \frac{2}{z-2} + \frac{3}{z+1}.$$

(1), (2) から

$$\begin{aligned}
h(z) &= 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n \\
&= 1 - 2 + 3\cdot\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2+3\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2+3\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n.
\end{aligned}$$

収束半径は、係数を a_n とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ が分かるので、1. (あるいは $\dfrac{2}{z-2}$, $\dfrac{3}{z+1}$ の冪級数展開の収束半径の小さい方で 1, としても良い。)■

コメント　使うことは宿題で全部やってあるんだけど…

- 言われなくても収束のチェックをして下さい。やらないとナンセンスになりかねない。
- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$ という公式を使って求めても良いけれど、その場合はダランベールの公式などを使って収束半径を求めることになるでしょう。
- 等比級数の和の公式 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, 収束 $\Leftrightarrow |r|<1$ を使う必要は必ずしもないけれど、収束の必要十分条件が $|$ 公比 $|<1$ と分かりやすいのは良いところです。(それと冪級数の収束判定法の定理の多くは、冪級数を等比級数と比べることで証明されるので、ダランベールの判定法のような特定の公式を覚えて機械的に適用するよりは、等比級数の和の公式を使う方が教育的だと信じてやってます。)
- (3) で部分分数分解出来ない人が多いですね…多分、微積分の授業では、他にやることが多くて、あまり時間を避けないのだろうけれど、これはあちこちで必要になるので、どこかの機会にちゃんと身につけて下さい。
- なぜか収束範囲を $0<|z-1|<1$ のように 1 を除いた人がいるけれど、これは Taylor 展開であって、中心で収束するので、除く必要はない。というか、除くのは変だ。

6.　20 点満点。(1), (2), (3) それぞれ 5, 5, 10 点。

(1) 二項定理を用いて

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\sum_{r=0}^{10}\binom{10}{r} z^r}{z^3} = \sum_{r=0}^{10}\binom{10}{r} z^{r-3} = \sum_{n=-3}^{7}\binom{10}{n+3} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{7}\binom{10}{n+3} z^n + \binom{10}{2}\frac{1}{z} + \binom{10}{1}\frac{1}{z^2} + \binom{10}{0}\frac{1}{z^3} \qquad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).
\end{aligned}
$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である。ゆえに

$$
\operatorname{Res}(f;0)=\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45.
$$

(2) sin の 0 のまわりの Taylor 展開を用いて、

$$
f(z)=z^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{1-2k} \qquad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).
$$

$$
\left(f(z)=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots\right)=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{7!}\frac{1}{z^5}+\cdots\right)
$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である。$\frac{1}{z}$ の係数は $k=1$ に対応して、

$$
\operatorname{Res}(f;0)=\frac{(-1)^1}{(2\cdot 1+1)!}=-\frac{1}{6}.
$$

(3) 冪級数の逆数の計算の仕方を知っていると、

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7}{360}z^3+\cdots$$

これから

$$\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}+\frac{7}{360}z+\cdots$$

ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;0)=\frac{1}{6}.$$

時間がなくて、冪級数の逆数の計算の仕方の説明をしなかったけれど、練習問題の片隅にでも入れておくのでしたか。以下は宿題の解説と同様の解き方。

$g(z)=\sin z$ とおくと、$g(0)=0$, $g'(0)=\cos 0=1\neq 0$ であるから、0 は g の 1 位の零点である。ゆえに 0 は $z^2g(z)$ の 3 位の零点である。ゆえに 0 は $f(z)=\dfrac{1}{z^2g(z)}$ の 3 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f;0)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-0)^3f(z)\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)''.$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{\sin z}\right)''&=\left(\frac{\sin z\cdot 1-\cos z\cdot z}{\sin^2 z}\right)'=\left(\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}\right)'\\&=\frac{\sin^2 z\cdot(\cos z-1\cdot\cos z-z\cdot(-\sin z))-2\sin z\cos z\cdot(\sin z-z\cos z)}{\sin^4 z}\\&=\frac{z\sin^2 z-2\sin z\cos z+2z\cos^2 z}{\sin^3 z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z\sin^2 z&=z\left(z-z^3/6+O(z^5)\right)^2=z\left(z^2-2z\cdot z^3/6+O(z^6)\right)\\&=z^3-z^5/3+O(z^7)=z^3+O(z^5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2\sin z\cos z&=-2(z-z^3/6+O(z^5))(1-z^2/2+O(z^4))\\&=-2(z-z^3/6-z^3/2+z^5/12+O(z^6))\\&=-2\left(z-\frac{2}{3}z^3+O(z^5)\right)\end{aligned}$$

$$2z\cos^2 z=2z\left(1-\frac{z^2}{2}+O(z^4)\right)^2=2z\left(1-z^2+O(z^4)\right)=2z-2z^3+O(z^5).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}z\sin^2 z-2\sin z\cos z+2z\cos z&=z^3+O(z^5)-2z+\frac{4}{3}z^3+O(z^5)+2z-2z^3+O(z^5)\\&=\frac{1}{3}z^3+O(z^5)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}(f;0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin^3 z}{z^3}\left(\frac{1}{3}+O(z^2)\right)=\frac{1}{6}.\blacksquare$$

コメント

- (1) はもちろん、c が f の高々k位の極ならば
$$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$$
という定理 (公式) を使っても良い。
- (2) は真性特異点なので、極の場合の公式は使えず、上の答案のようにするのが楽でしょう。
- (3) は宿題の類題ですね。

7. 20 点満点。(1) 10 点。3 つの留数の和という式が出せて 5 点。最後まで正しく行って 5 点。(2) 10 点。複素積分に正しく直って 4 点。留数定理を使えて +4 点。最後まで正しく行って +2 点。

(1) 求める定積分を I とおく。被積分関数は x^2 の式なので、偶関数であるから、
$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^4+1)};c\right)\\
&=\pi i\left(\sum_{c=i,\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^4+1)};c\right)\right)\\
&=\pi i\left(\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{z^4+1}\bigg|_{z=i}+\frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{z}{4z^4}\bigg|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{z}{4z^4}\bigg|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)\\
&=\pi i\left(\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{i+1}\cdot\frac{1+i}{-4\sqrt{2}}+\frac{1}{-i+1}\cdot\frac{-1+i}{-4\sqrt{2}}\right)\\
&=\pi i\left(\frac{1}{4i}-\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

> $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+2$, $(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\neq 0$, $f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}$ ならば
> $$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c>0}\mathrm{Res}\,(f;c)\,.$$

> P, Q は c の近傍で正則で、c は P の 1 位の零点ならば、
> $$\mathrm{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

$\mathrm{Res}(f;i)$ を計算するときは、$P(z)=z^2+1$, $Q(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$, $\mathrm{Res}\left(f;\dfrac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}\right)$ を計算するときは、$P(z)=z^4+1$, $Q(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ として適用した。

(2) $C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とするとき、$dz=ie^{i\theta}\,d\theta$ より、$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ であるから、
$$I=\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta=\int_C\left(\frac{z-1/z}{2}\right)^4\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{1}{16i}\int_C(z-1/z)^4\,\frac{1}{z}\,dz.$$

留数定理によって

$$I = \frac{1}{16i} \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left((z-1/z)^4 \frac{1}{z}; c\right) = \frac{\pi}{8} \operatorname{Res}\left((z-1/z)^4 \frac{1}{z}; 0\right).$$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \frac{1}{z} = \left(z^4 - 4z^3\frac{1}{z} + 6z^2 \cdot \frac{1}{z^2} - 4z \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)\frac{1}{z} = z^3 - 4z + \frac{6}{z} - \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}$$

であるから、

$$\operatorname{Res}\left((z-1/z)^4 \frac{1}{z}; 0\right) = 6.$$

ゆえに

$$I = \frac{\pi}{8} \cdot 6 = \frac{3\pi}{4}.$$

次の留数定理を用いた。

> D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、Green の定理が成り立つような領域とする。$c_1, \cdots, c_N$ は D 内の相異なる点とする。Ω は $\overline{D}$ を含む $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき
>
> $$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f; c_j).$$

■

コメント

- (1) で $z^4 + 1 = 0$ が正確に解けない人が結構いる。この問題は関数論以前の問題のような気がするけれど (もしも線形代数で十分な時間があれば、固有値絡みで虚数は必須なので、やるはずだ)、関数論では必要不可欠である。出来ないとマズイ。
- $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^4+1)}$ の留数の計算で、c が P の 1 位の零点ならば、$\operatorname{Res}\left(\dfrac{Q}{P}; c\right) = \dfrac{Q(c)}{P'(c)}$ という公式を使ったのだけど、$Q(z) = 1$, $P(z) = (z^2+1)(z^4+1)$ として使うと限ったものではない。上の答案は少し工夫してある。

8.

(a) で「ダランベールの定理を使う」という解答が何人かあったけれど、そんなの使えるはずがない。$|a_n| \le Mr^n$ から $\dfrac{1}{|a_n|}$ を上から抑える不等式は導けない。分母が 0 にならないことすら導けない。優級数の定理を使うわけで、正解は、

> $A_n := a_n z^n$, $B_n := M(r|z|)^n$ とおくと、
>
> $$|A_n| = |a_n|\,|z|^n \le Mr^n|z|^n = M\,(r|z|)^n = B_n.$$
>
> また $|z| < 1/r$ のとき、$|z|r < 1$ であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} (|z|r)^n$ は収束する (公比の絶対値が 1 より小さい等比級数だから)。ゆえに優級数の定理から、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ は絶対収束する。■

よくあるのが、「$\displaystyle\sum_n |A_n| \le \sum_n B_n$ であり、$\displaystyle\sum_n B_n$ が収束するので、優級数の定理から、$\displaystyle\sum_n A_n$ は絶対収束する」という解答。多分優級数定理を間違って覚えているのだろう。■

(b) 要点は $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ を示すことなのだけど、出来ていた人は少ない。

(c) これを選んだ人は、解けていた割合が高い。

(d) 選んだ人が少ない。ところで、この定理を使って解ける問題があるのだけど、その時に間違った定理を使っている人がいた。ちょっと理解に苦しむ。

(e) ξ の符号で場合分けをする必要があるけれど気づかない人が多かった。