複素関数練習問題 No. 4

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/

桂田 祐史

2015 年 10 月 27 日

冪級数の収束

問題 1. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0)$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ などを用いて、以下の各関数の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。もとの関数と等しくなることの証明は (ここでは) 要求しない [1]。

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) e^x (4) $(1+x)^\alpha$ (5) $\log(x+1)$ (6) $\arctan x$ ($\tan^{-1} x$ のこと)

問題 2. 以下の (1)〜(4) を示せ。

(1) $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ のとき、$(1+h)^n \geq 1 + nh$. (2) $r > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$. (3) $r < 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. (4) $r < 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$.

問題 3. r を複素数とするとき、以下の問に答えよ (場合分けすることになる)。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ を求めよ。 (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ を求めよ。 (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ を求めよ。

((3) は「任意の冪級数は収束円の内部で項別微分可能である」という定理を使わずに示せ。)

問題 4. (数学解析履修者向け) (1) 収束列は有界であることを示せ。 (2) Cauchy 列は有界であることを示せ。

(注意: 「収束」,「Cauchy 列」,「(数列の) 有界」の定義を確認する主旨。)

問題 5. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ。 (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でないならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことを示せ。 (3) (1) の命題の逆の反例をあげよ。

問題 6. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとはどういうことか、定義を述べよ。 (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ。

((1) は解答出来てほしい。また (2) の事実は覚えてほしい。)

問題 7. (1) 優級数の定理を書け。 (2) 優級数の定理を証明せよ。

((1) は解答出来てほしい。)

問題 8. 次のことを示せ。

(1) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数が有界 (i.e., ある実数 M に対して $|a_n| \leq M$) ならば、$|z| < 1$ のとき冪級数は収束する。

(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数がある実数 M に対して $|a_n| \leq Mr^n$ を満たすならば、$|z| < 1/r$ のとき冪級数は収束する。

問題 9. 冪級数の収束半径の定義を述べよ。(収束半径が 0, $+\infty$ ということはそれぞれどういうことかも記せ。)

問題 10. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ が確定する (極限を持つ (収束する)、あるいは $\rho = +\infty$) ならば、ρ はこの冪級数の収束半径であることを示せ。

(**d'Alembert の公式**, あるいは **ratio test** と呼ばれる定理である。)

[1] 微積分の復習である

問題 11. 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(z-1)^n$

問題 12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 z^n$ の収束半径を求めよ。

問題 13. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}=z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots$ について、以下の問に答えよ。

(1) $|z|<1$ ならば収束することを示せ。　(2) $|z|\geq 1$ ならば収束しないことを示せ。　(3) 収束半径を求めよ。

((3) は (1), (2) からすぐ分かる。ちなみに d'Alembert の公式は使えない。$\limsup$ を知っているのならば、問 15 の Cauchy-Hadamard の公式を使うことが出来る。)

問題 14. (上極限 $\limsup$ を学んでいる人向け) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}a_n=S$ とはどういうことか定義を述べよ。

以下、冪級数の収束半径を扱うときは、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ と約束する。

問題 15. (上極限を学んでいる人向け) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は、$\rho:=\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ であること (**Cauchy-Hadamard の公式**) を示せ。

(上極限を学んでいない人向け) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するならば、$\rho:=\dfrac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ がこの冪級数の収束半径であることを示せ。

問題 16. (教科書の演習問題 p. 46)　以下の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{2^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}z^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$

問題 17. (1) 任意の自然数 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$ を示せ。　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ を示せ。

(Cauchy-Hadamard の公式の利用は、この講義としては特に推奨しない [2]。用いるためには、いくつか準備をしておく必要があり、この問の結果もそれらのうちの一つ。)

問題 18. 次の冪級数はいずれも収束半径が 1 であるが、収束円周 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 上の点での収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

((2) が解けるようになって欲しい。この問題を解く場合に限らず「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$」は忘れないこと (解析学の常識)。(3) は、ちょっと高級で Abel の級数変形法を使う [3]。)

冪級数の項別微分可能性、正則性、展開の一意性

問題 19. 収束冪級数について "係数比較" が可能なこと、つまり $c\in\mathbb{C}$, $r>0$, 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と $\{b_n\}_{n\geq 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n\quad(|z-c|<r)$$

が成り立てば、$a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ であることを示せ。

Taylor 展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$ は冪級数展開であるが、冪級数展開はこの問題で見たように一通りしかないので、どういうやり方であっても冪級数の形に変形できれば、それは Taylor 展開である。

[2] 複素関数論としては、他に学ぶべき重要なことがたくさんあり、そちらの学習に時間を割くことを勧める。
[3] 院試で出題されたりします。

問題 20. (1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\dfrac{1}{z+4}$　(b) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$　(c) $\dfrac{1}{z^2+1}$　(d) $\mathrm{Tan}^{-1} z$　(e) $\dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}$

((b),(d) は微分積分を考えてみる。(e) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

問題 21. e^z, $\cos z$, $\sin z$ を冪級数で定義するとき、$(e^z)'=e^z$, $(\cos z)'=-\sin z$, $(\sin z)'=\cos z$ を確かめよ。

問題 22. (e^z を冪級数で定義したとき) $x,y\in\mathbb{R}$ に対して、$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ であることを示せ。

問題 23. $z\in\mathbb{C}$ に対して $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

問題 24. (1) $\sin z=0$ を解け。　(2) $\sin z=2$ を解け。

問題 25. $\cos z$, $\sin z$ の加法定理を証明せよ。

問題 26. 次の冪級数の和を求めよ ($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ を用いずに表せ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n$　(結局、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^kz^n$ が求まる。)

問題 27. $f'(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ $(|z|<1)$, $f(0)=0$ を満たす f を冪級数を用いて求めよ。

問題 28. (1) $f(z)=e^z$ が $f'(z)=f(z)$, $f(0)=1$ を満たすことを用いて、任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して、$f(z)f(c-z)=f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して $e^ae^b=e^{a+b}$ であることを示せ。

(式変形による (2) の証明も知られているが、(1) から導ける。なお、指数関数の指数法則や三角関数の加法定理は、後で学ぶ「一致の定理」を用いる証明も有名である。)

問題 29. 任意の冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と、任意の自然数 $p\in\mathbb{N}$ に対して、2 つの冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^{n+p}\quad \left(=\sum_{n=p}^{\infty} a_{n-p}(z-c)^n\right)$$

の収束発散は一致する (収束する $z\in\mathbb{C}$ 全体の集合が等しい)。特に収束半径、収束円も一致する。— 以上を証明せよ。

問題 30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 であるとするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\rho_1\neq\rho_2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1,\rho_2\}$ である。

(2) $\rho_1=\rho_2$ であれば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_1 以上である。収束半径が ρ_1 より大きくなる例をあげよ。

一様収束

収束の問題は、あまりうるさく言わないことにするが (定理の証明はきちんと講義し、それを理解するよう努力してもらうが、試験でそういう問題の比重は高くしない)、理解の手助けのために。

問題 31. $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$f_n(x):=\begin{cases}-1 & (x<-\frac{1}{n})\\ nx & (-\frac{1}{n}\le x\le\frac{1}{n})\\ 1 & (x>\frac{1}{n})\end{cases}$$

で $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定めるとき、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。$\{f_n\}$ は一様収束するかどうか (根拠をつけて) 答えよ。

問題 32. $K=[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$, $f_n(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N}, x\in K)$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x\in K$ とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K では一様収束しないが、$0<R<1$ なる任意の R に対して、$[0,R]$ では一様収束することを示せ。

解答

解答 1. 以下 $a \equiv b$ は $a \equiv b \pmod 4$ という合同式の略記とする。

(1) $f(x) = \sin x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \equiv 0) \\ \cos x & (n \equiv 1) \\ -\sin x & (n \equiv 2) \\ -\cos x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0) \\ 1 & (n \equiv 1) \\ 0 & (n \equiv 2) \\ -1 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が奇数}, n = 2k+1) \end{cases}$$

であるから

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(2) $f(x) = \cos x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n \equiv 0) \\ -\sin x & (n \equiv 1) \\ -\cos x & (n \equiv 2) \\ \sin x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0) \\ 0 & (n \equiv 1) \\ -1 & (n \equiv 2) \\ 0 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が偶数}, n = 2k) \end{cases}$$

であるから

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(3) $f(x) = e^x$ とおく。$f'(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ であるから、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(4) $f(x) = x^\alpha$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

であるから、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される一般 2 項係数である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(5) $f(x) = \log(1+x)$ とおく。$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ であるから、

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+1)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

(6) 等比級数の和の公式から

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

項別積分することで (これは微積分の範囲外になるかもしれない)

$$(\natural) \qquad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad (|x|<1).$$

あるいは (項別積分を避けたければ)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$$

を積分して

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\int_0^x\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt.$$

ここで $|x|<1$ に範囲を限定して、$n\to\infty$ とすることで $(\natural)$ が得られる (右辺第 1 項は交代級数だから収束するとか、右辺第 2 項の積分は 0 に収束するとか、少し議論が必要であるが、難しくない)。

一般に「関数が収束する冪級数に展開されたら、その関数は Taylor 展開が可能で、その冪級数が Taylor 展開に一致する」という命題が成り立つので、$(\natural)$ が $\arctan x$ の Taylor 展開である。■

得られた級数の収束半径のチェックと (これは比較的簡単)、剰余項が 0 に収束することの証明も良い演習問題である。後者は (1), (2), (3), (5) は比較的簡単で、(4) は難し目。(6) は等式が成り立つことは示してあるので、剰余項が 0 に収束することを証明する必要がない (Lagrange の剰余項は書くのが難しいが、しないで済むので問題ない)。 ■

解答 2. (1) 2 項定理 $(1+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k$ により、$n\ge 2$ のとき $(1+h)^n=1+nh+\cdots$. 右辺の $\cdots$ の各項は 0 以上であるから、$(1+h)^n\ge 1+nh$. $n=1$ のときも成り立つ。

(2) $h:=r-1$ とおくと、$h>0$, $r=1+h$. ゆえに $r^n=(1+h)^n\ge 1+nh$. $\lim_{n\to\infty}n=+\infty$ であるから、$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$. ゆえに $\lim_{n\to\infty}r^n=+\infty$.

(3) $h:=1/r-1$ とおくと、$h>0$, $r=\dfrac{1}{1+h}$ であるから、$0\le r^n=\dfrac{1}{(1+h)^n}\le\dfrac{1}{1+nh}\le\dfrac{1}{nh}$. $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{nh}\to 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、$r^n\to 0$. (4) (1) と同様にして、$n\ge 2$ のとき、$(1+h)^n\ge n(n-1)h^2/2$ が示せる。$h:=1/r-1$ とおくと、$h>0$, $r=\dfrac{1}{1+h}$ であるから、$0\le nr^n=\dfrac{n}{(1+h)^n}\le\dfrac{2n}{n(n-1)h^2}=\dfrac{2}{(n-1)h^2}$. $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{(n-1)h^2}\to 0$ であるから、はさみ打ちの原理により、$nr^n\to 0$. ■

解答 3.

(1) まず結果を述べる。

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}0 & (|r|<1\text{ のとき})\\ 1 & (r=1\text{ のとき})\\ \text{発散} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

- $|r|<1$ の場合は $|r^n-0|=|r|^n\to 0$ $(n\to\infty)$ であるから $r^n\to 0$ $(n\to\infty)$.
- $r=1$ の場合は $r^n=1\to 1$ $(n\to\infty)$ は明らか。
- $|r|=1$ かつ $r\ne 1$ の場合は、
$$\left|r^n-r^{n+1}\right|=|r^n|\,|1-r|=|1-r|\ne 0$$
であるから、$n\to\infty$ のとき r^n は収束しない (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$\left|r^n-r^{n+1}\right|\to|c-c|=0$ となるはずで矛盾する)。
- $|r|>1$ の場合は $|r^n|=|r|^n\to\infty$ であるから、r^n は発散する (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$|r^n|\to|c|$ であり、矛盾する。)。

(2) 等比数列の和の公式から、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n}r^j=\begin{cases}\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & (r\ne 1)\\ n+1 & r=1\end{cases}$$

が成り立つので (1) の結果から

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\begin{cases}\dfrac{1}{1-r} & (|r|<1)\\ \text{発散} & (|r|\ge 1).\blacksquare\end{cases}$$

解答 4. (数学解析講義ノート [4] が参考になる。)

(1) 収束列が有界というのは、実数列の場合に命題 2.9 (p. 20) で述べて、証明も書いてある。それと同様にやれば良い。

(2) Cauchy 列の有界性は独立した命題としては書いていなかった (命題 5.11 の証明の中で証明してある) ようなので、ここには書いておく。$\{a_n\}$ が Cauchy 列であれば、ある自然数 N が取れて

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。これから $n \geq N$ を満たす任意の n に対して (特に $m = N$ と選ぶことで)

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a_N| < 1.$$

これから

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|.$$

そこで

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

とおくと、$M \in \mathbb{R}$ であり、任意の自然数 n に対して

$$|a_n| \leq M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。 ■

解答 5. (1) $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束して和が s であるとは、$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ということを意味する。今の場合、仮定から $(\exists s \in \mathbb{C})$ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. このとき、 $a_n = s_n - s_{n-1}$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. (2) これは (1) の対偶であるから成り立つ。 (3) $a_n = \dfrac{1}{n}$ とするとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないが、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

解答 6. (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。 (2) (準備中。講義ノートには書いてあります。) ■

解答 7. (1) 「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数列で、2 条件 (i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \leq b_n$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する、を満たすならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。」

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の n 項までの部分和をそれぞれ S_n, T_n とおく: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. $n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \sum_{k=n}^{n} |a_k| - \sum_{k=n}^{m} |a_k| = T_n - T_m.$$

同様に $n < m$ のとき、$|S_n - S_m| \leq T_m - T_n$. ゆえに n, m の大小によらず

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|.$$

仮定から $\{T_n\}$ は収束するので、$\{T_n\}$ は Cauchy 列である。上の不等式から、$\{S_n\}$ も Cauchy 列である。$\mathbb{C}$ は完備であるから、$\{S_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。■

[4] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-2015.pdf

解答 8. (1) $A_n := a_n z^n$, $B_n := M|z|^n$ とおくと、$|A_n| = |a_n|\,|z|^n \le M|z|^n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} M\,|z|^n$ は、公比 $|z|$ の等比級数であり、$|z|<1$ のときこの公比は 1 より小さいので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ は収束する (和は $\dfrac{M}{1-|z|}$)。ゆえに、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。

(2) (宿題にしてあるのでしばらくは見せない。) ■

解答 9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が冪級数とするとき、次の (i), (ii), (iii) のいずれか一つが成立する。

(i) $(\forall z \in \mathbb{C}\colon\ z \ne c)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は収束しない。

(ii) $(\exists r \in \mathbb{R}\colon\ r > 0)$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は $|z-c|<r$ ならば収束し、かつ $|z-c|>r$ ならば発散する。

(iii) $(\forall z \in \mathbb{C})$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は収束する。

(i) のとき収束半径は 0, (ii) のとき収束半径は r, (iii) のとき収束半径は $+\infty$ という。 ■

解答 10. (準備中)

解答 11.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

ゆえに収束半径は 1 である。収束円は $D(0;1)$.

(2) $a_n = n!$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに収束半径は 0 である。収束円は $\emptyset$.

(3) これは宿題にして、そちらで解説したので後回し。結果だけ書いておくと、収束半径は ∞ で、収束円は $\mathbb{C}$.

(4) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である。収束円は $D(1;1/2)$. ■

解答 12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ は $\zeta = z^2$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ となるので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$|\zeta| < \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n \text{ 収束},\quad |\zeta| > \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n \text{ 発散}.$$

ゆえに

$$|z^2| < \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束},\quad |z^2| > \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

すなわち

$$|z| < \sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束},\quad |z| > \sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

したがって $\sqrt{\rho}$ が収束半径である。

後半は Cauchy-Hadamard 使わないとちょっと難しいかな。使わせてもらう。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

正数 r に対して、$\sqrt[n]{r^2} = \left(r^2\right)^{1/n} = \left(r^{1/n}\right)^2$ であるから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

従って収束半径 ρ' は $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{1}{\rho'}$ より $\rho' = \rho^2$. ■

解答 13. この冪級数を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と書くと、

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = k! \text{ となる } k \in \mathbb{N} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$ とするとき、$k! = 1, 2, 6, 24, 120, 720, \cdots$ であるから、$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = a_8 = \cdots = a_{23} = 0$, $a_{24} = 1, \ldots$.)

(1) $|z| < 1$ とするとき、

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n \le 1 \cdot |z|^n = |z|^n.$$

$b_n := |z|^n$ とおくと、$\{b_n\}$ は $\{a_n z^n\}$ の優級数で、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

(2) 任意の自然数 n に対して、$a_{n!} = 1$ であるから、

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N} : m \ge n) \quad a_m = 1$$

が成り立つ ($m = n!$ とすれば良い)。特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ではない。ゆえにこの冪級数は $z = 1$ で収束しない (実際、一般項 $a_n z^n = a_n$ は 0 に収束しないから)。

(3) (1), (2) から $\rho := 1$ とするとき、$|z| < \rho$ で収束、$|z| > \rho$ で発散するので、収束半径は 1 である。 ■

解答 14. 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 a に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

であるとは、次の (a), (b) が成り立つことをいう。

(a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)\ a_n < a + \varepsilon.$

(b) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall k \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k)\ a_n > a - \varepsilon$
(言い換えると、任意の正数 ε に対して $a_n > a - \varepsilon$ を満たす n が無限個存在する。) ■

解答 15. (準備中)

解答 16.

(1) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{\left[(n+1)!\right]^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)^2} = 4.$$

収束半径は 4.

(2) これは問 13 と同様にして解ける (そのあらすじ: $z = 1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$ は成り立たないので、$z = 1$ で収束しないが、$|z| < 1$ を満たす任意の z に対して $|a_n z^n| \le n\,|z|^n$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ で、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,|z|^n$ は収束するので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。以上から収束半径は 1.)。ここでは Cauchy-Hadamard の公式を使って解答してみる。

この冪級数の n 次の係数を a_n とする (すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が成り立つとする) と、

$$a_n = \begin{cases} n & (\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & (\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これから $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (証明: $\sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{n}$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 一方 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、$n := 2^k$ とおくと $n \ge k$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} > 1 - \varepsilon$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$.) ゆえに収束半径は $1/1 = 1$.

(3) $a_n := \dfrac{\log n}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \frac{n+1}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\log n}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{1 + \dfrac{\log(1 + 1/n)}{\log n}} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 0/\infty} = 1.$$

(4) おっと、これは **39** と同じだ (笑)。 ■

解答 17.

(1) 講義ノートの 1.1.4 に書いてある。

(2) 階乗 (より一般にはガンマ関数) を近似するスターリングの公式 (Stirling's approximation, Stirling's formula)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

(この意味は、$n \to \infty$ のとき $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \to 1$ ということ) を知っていれば直接証明するのは簡単だけど、微積分で習ったかな…

というわけで、スターリングの公式を使わないでやってみよう。冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

を考える。この冪級数の収束半径は、$a_n := n!$ とおくとき

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

であることから 0 である。Cauchy-Hadamard の公式から

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ は単調増加数列である。実際

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{n(n+1)} = \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n \cdot (n!)^n}{n! \cdot (n!)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdots \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{1} > 1$$

であるから、$\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} > \sqrt[n]{|a_n|}$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty. ■$$

解答 18.

(1) 一般に、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを思い出そう。$a_n = z^n$ についてこれを用いる。

$|z| = 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z^n| = 1$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ は成り立たない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は収束しない。

(2) $M_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

- $|z| = 1$ を満たす任意の z と、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2} \le M_n$. (等号が成り立つけれど、定理にあてはめるため、不等号で書いてみた。どちらで書いても間違いではない。)
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する (これは常識、和が $\pi^2/6$ であることは忘れても、収束することは忘れてはいけない)。

Weierstrass の M-test (という定理) により、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は $|z| = 1$ で一様に絶対収束する。

(3) 結果だけ先に書いておくと、$z = 1$ では発散、$|z| = 1$ かつ $z \ne 1$ では収束する。

$|z| = 1$ とするとき、$\left|\dfrac{z^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は絶対収束しない。だから微妙なケースである。$z = 1$ では ($\dfrac{z^n}{n} = \dfrac{1}{n}$ なので) 収束しないが、$z = -1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

はいわゆる交代級数に関する Leibniz の定理により収束することが分かる (実は和は $-\log 2$)。2014/12 の時点ではまだ講義していないが、Abel の級数変形法を用いると、$|z| = 1$, $z \ne 1$ を満たす任意の z に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束することを示せる。講義ノートにはもう書いてある。1 月に時間的余裕が残っていれば、Abel の級数変形法について講義する予定である。■

解答 19. $|z - c| < r$ を満たす z に対して、$f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$ とおくと、$f\colon D(c; r) \to \mathbb{C}$ は正則で、冪級数の項別微分定理から、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

が得られる。これは $\{b_n\}$ についても同じで

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

ゆえに任意の n に対して $a_n = b_n$. ■

解答 20. (1) (なるべくゆっくりと式変形する。目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の形にする (a_n を求める) ことである。)

(a) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$ であるから、収束半径は 4.

(b) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i+z} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{1+iz} = i \cdot \frac{1}{1-(iz)} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n$$

である。収束 $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $| < 1 \Leftrightarrow |-iz| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1. これから、

$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} i^{n+1} n z^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m i^{m+2}(m+1)z^m = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+2}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} i^n (n+1) z^n.$$

収束半径は項別微分しても変わらないので、1.

(c) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

a_n を

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)) \end{cases}$$

で定めると、

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $| < 1 \Leftrightarrow \left|-z^2\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1.

(d) $\left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \frac{1}{z^2+1}$ である。特に $\mathrm{Tan}^{-1} z$ は 0 の近傍で正則であるから、$z = 0$ のまわりで Taylor 展開できる:

$$\mathrm{Tan}^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z| < \exists r).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n = \left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

ただし a_n は (c) で出て来たものである。ゆえに

$$(n+1)b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k+1\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

(e) $f(z) := \dfrac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z - 6}$ とおく。$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z - 6$ で割ると、商 $z + 2$, 余り $3z - 7$ であるから、

$$f(z) = z + 2 + \frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z - 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z-7}{z^2-5z-6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A = 1$, $B = 2$. ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

$z + 2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2).$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3).$$

$f(z)$ の $z=0$ のまわりの Taylor 展開の収束半径は、0 と $\{2,3\}$ との距離 2 である。そして、

$$\begin{aligned} f(z) &= z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= \left(2-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}-2\cdot\frac{1}{3^2}\right)z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n \\ &= \frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

(2) 目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$ の形に表すことである。

等比級数の和の公式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n. \end{aligned}$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{z-1}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<4$ であるから、収束半径は 4. ■

解答 21. どれでも同じだから、一つだけやっておく。

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

である。$n\in\mathbb{N}$ のとき $(z^n)'=nz^{n-1}$, $n=0$ のとき $(z^n)'=(1)'=0$ であるので

$$(e^z)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}=e^z.■$$

解答 22. (念のため状況の説明: 講義では早めに指数関数を使いたかったので、$e^{x+iy}:=e^x(\cos y+i\sin y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$ と定めたが、ここでは $e^z:=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ を定義し、この冪級数の収束半径が ∞ であることは確認済みとする。また、指数法則も証明済みとする。 — 問題の配列がまずかったかな？)

まず指数法則により、

$$e^{x+iy}=e^xe^{iy}.$$

絶対収束するので、偶数番目、奇数番目で分けることが出来て、

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}y^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}=\cos y+i\sin y.$$

ゆえに $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. ■

解答 23. 冪級数展開

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

を使って証明する。(こういう問題は何を使ってよいかで解答の仕方が異なるので、本当は問題文にそれを書かないといけない。一致の定理を使って証明せよ、という問題もあり得る。)

k を整数とするとき、

$$i^n=\begin{cases}1 & (n\equiv 0 \pmod 4)\\ i & (n\equiv 1 \pmod 4)\\ -1 & (n\equiv 2 \pmod 4)\\ -i & (n\equiv 3 \pmod 4)\end{cases},\quad i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k$$

であるから

$$i^n+(-i)^n=[1+(-1)^n]\,i^n=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ 2\cdot i^n & (n\text{ が偶数})\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ (-1)^k 2 & (n\text{ が偶数}, n=2k),\end{cases}$$

$$i^n-(-i)^n=[1-(-1)^n]\,i^n=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ 2\cdot i^n & (n\text{ が奇数})\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ (-1)^k 2i & (n\text{ が奇数}, n=2k+1).n\end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^\infty\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^\infty\frac{i^n+(-i)^n}{2}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cos z,$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^\infty\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^\infty\frac{i^n-(-i)^n}{2i}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin z.\blacksquare$$

解答 24. $\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ (前の問題に出て来た $\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ の兄弟) を導き、それを使って解く方法もあるけれど、前問の関係式を使うのが簡単だろう。$e^z=1$ の解が $z=2n\pi i$ $(n\in\mathbf{Z})$ であることは (授業で説明したし) 使ってよいが、それを導けと言われたら出来るようにしておくこと。

(1) $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin z=0 \quad&\Leftrightarrow\quad e^{iz}=e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow\quad e^{2iz}=1\\ &\Leftrightarrow\quad (\exists n\in\mathbf{Z})\quad 2iz=2n\pi i\\ &\Leftrightarrow\quad (\exists n\in\mathbf{Z})\quad z=n\pi.\end{aligned}$$

ゆえに解は $z=n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$.

(あるいは $w:=e^{iz}$ について $w-\frac{1}{w}=0$ から、$w^2-1=0$. これから $w=1$ または $w=-1$. 前者から $z=2n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$, 後者から $z=(2m-1)\pi$ $(m\in\mathbf{Z})$. まとめて $z=n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$.)

(2) 途中で $w:=e^{iz}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\sin z=2 \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\\ &\Leftrightarrow\quad e^{iz}-e^{-iz}=4i\\ &\Leftrightarrow\quad w-\frac{1}{w}=4i\\ &\Leftrightarrow\quad w^2-4iw-1=0\\ &\Leftrightarrow\quad w=2i\pm\sqrt{(2i)^2-(-1)}=(2\pm\sqrt{3})i=(2\pm\sqrt{3})e^{\pi i/2}.\end{aligned}$$

ただし、2 次方程式の解の公式 ($a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ とするとき、$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が成り立つこと) を用いた。

$r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ とするとき、

$$e^z=re^{i\theta}\quad\Leftrightarrow\quad(\exists n\in\mathbf{Z})\quad z=\log r+i(\theta+2n\pi)$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned}\sin z=2&\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbf{Z})\quad iz=\log\left(2\pm\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\\ &\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbf{Z})\quad z=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi-i\log\left(2\pm\sqrt{3}\right).\blacksquare\end{aligned}$$

解答 25. 任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して (途中で $w_1 := e^{z_1}$, $w_2 := e^{z_2}$ とおいて)

$$\begin{aligned}
&\cos(z_1+z_2) - (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\
&\quad = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} - \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[w_1 w_2 + \frac{1}{w_1}\frac{1}{w_2}\right] - \frac{1}{4}\left[\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right) + \left(w_1 - \frac{1}{w_1}\right)\left(w_2 - \frac{1}{w_2}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{4w_1w_2}\left(2w_1^2w_2^2 - (w_1^2+1)(w_2^2+1) - (w_1^2-1)(w_2^2-1)\right) \\
&\quad = \frac{1}{4w_1w_2}\left(2w_1^2w_2^2 - (w_1^2w_2^2 + w_1^2 + w_2^1 + 1) - (w_1^2w_2^2 - w_1^2 - w_2^2 + 1)\right) = 0
\end{aligned}$$

より $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$. $\sin$ についても同様に出来る。 ■

解答 26.

(1) 公比が z の等比級数であるから、収束の条件は $|z| < 1$ で、そのとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

収束円は $D(0;1)$.

(2) (1) の冪級数を項別に微分したものであるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(-(z-1)^{-1}\right)' = (z-1)^{-2} = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

収束円は (1) と同じで $D(0;1)$.

(3) (2) の冪級数に z をかけたものになっている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

収束円は (2) と同じで $D(0;1)$.

(4) (3) の級数を項別微分して z をかけたものである。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\right)' = z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = z\frac{(z-1)^2\cdot 1 - 2(z-1)\cdot z}{(z-1)^4} = z\frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3} = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

収束円は (3) と同じで $D(0;1)$. ■

要するに「n をかける $\longleftrightarrow$ 微分して z をかける」ということ。数学検定の問題見本で見かけた「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ を求めよ。」という問題を来年度は問題に含めよう。

ちなみに Mathematica はこういう級数の和を計算してくれる。収束条件は表示してくれないが、簡略の検算にはなる。`Sum[n^2 z^n,{n,1,Infinity}]`) とすると $-\dfrac{z(1+z)}{(-1+z)^3}$ という結果を返す。 ■

解答 27. (準備中) ■

解答 28.

(1) $F(z) := f(z)f(c-z)$ とおく。積の微分法と合成関数の微分法と仮定 $f' = f$ により

$$\begin{aligned}
F'(z) &= (f(z)f(c-z))' = (f(z))'\cdot f(c-z) + f(z)\cdot(f(c-z))' = f'(z)f(c-z) + f(z)(-f'(c-z)) \\
&= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに F は定数関数である。$F(0) = f(0)f(c) = 1\cdot f(c) = f(c)$. ゆえに $F(z) \equiv f(c)$. すなわち $f(z)f(c-z) \equiv f(c)$.

(2) ((1) で言っているのは、$(\forall c \in \mathbb{C})$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ $f(z)f(c-z) = f(c)$ ということである。)

任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、$c = a+b$, $z = a$ とおくと、$c - z = b$ であるから、$f(a)f(b) = f(a+b)$. すなわち $e^a e^b = e^{a+b}$. ■

解答 29. どちらの冪級数も、$z=c$ に対しては収束する。$z \neq c$ の場合を考える。

次が成り立つことに注意する。「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ が収束するならば、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n$ も収束し、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.」

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して、$\lambda = (z-c)^p$ として適用することで、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^{n+p}$ も収束することが分かる。

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して、$\lambda = (z-c)^{-p}$ として適用することで、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^{n+p}$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ も収束することが分かる。

結局、任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^{n+p} \text{ が収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ も収束する}$$

が成り立つ。特に 2 つの冪級数の収束半径、収束円は一致する。■