複素関数練習問題 No. 3

桂田 祐史

2015 年 10 月 13 日, 10 月 18 日加筆

問題 10 を加えた (2015/10/18)。

複素関数の実部・虚部, 正則性, Cauchy-Riemann の関係式

問題 1. 正則関数の定義を述べよ。

問題 2. 複素関数の実部・虚部とは何か、説明せよ。

問題 3. Cauchy-Riemann 方程式とは何か、説明せよ。

問題 4. 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求め、u_x, u_y, v_x, v_y を計算せよ。

(a) $f(z) = z^3$ $(z \in \Omega := \mathbb{C})$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ $(z \in \Omega := \mathbb{C})$
(ヒントにはならないが、(c) の $f(z)$ は実は $\cos z$ であることが後で分かり、結果もそれなりに重要である。)

問題 5. u, v がそれぞれ正則関数 f の実部・虚部であるとするとき、u と v は偏微分可能で、$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たすことを示せ。

(出題の意図: 「f が正則 $\Leftrightarrow$ u と v は微分可能で Cauchy-Riemann 方程式を満たす」という定理の証明は少し難しいが、この簡略版の定理くらいは自力で証明が書けた方が良い。)

問題 6. $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 上で定義された正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ の実部 u と虚部 v が Laplace 方程式

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

を満たすことを示せ。u と v が C^2 級であることは認めて良い。

(後で一般に正則関数は冪級数展開出来ることを証明するので、その系として u と v は C^∞ 級であることが得られる。Laplace 方程式を満たす関数は**調和関数** (harmonic function) と呼ばれるので、この命題は「正則関数の実部虚部は調和関数である」と書くことが出来る。常識とされる命題で、「証明せよ」は良く出題される。筆者が某県の教員採用試験を受験したときにも出題された。)

問題 7. Ω が $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、以下の (1)〜(4) を証明せよ。

(1) Ω で $f' = 0$ が成り立つならば、f は定数関数である。

(2) Ω で $|f|$ が定数関数ならば、f そのものが定数関数である。

(3) Ω で f が実数値しか取らない ($(\forall z \in \Omega)$ $f(z) \in \mathbb{R}$) ならば、f は定数関数である。

(4) Ω で f が純虚数値しか取らない ($(\forall z \in \Omega)$ $\dfrac{1}{i} f(z) \in \mathbb{R}$) ならば、$f$ は定数関数である。

(ヒント: すべて条件を f の実部・虚部 u, v を用いて表す。)

問題追加 $f(x) = \cos x + i \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ とするとき、$f(0) = f(2\pi)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) \neq 0$ が成り立つことを確かめよ。(これから複素数値関数では、平均値の定理は成り立たない。)

注: このページの問題はおまけかもしれない。

問題 8. Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とする。C^1 級の $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たす連続関数 v は、もし存在するならば、定数差を除いて一意的に定まる (2 つあれば、その差は定数という意味) ことを示せ。(以下はベクトル解析を学んでいる人向け) その場合に v を u を用いて表示する式を求めよ。

問題 9. u は $\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された調和関数とする (u は C^2 級で $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たす)。この u に対して、$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす v が存在するとき、v は u の共役調和関数であると言う。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) v は調和関数であることを示せ。　(2) u は v の共役調和関数であるかどうか答えよ。

問題 10. 正則関数 f の実部・虚部 u, v に対して、$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ とおくと、次式が成り立つことを示せ。

$$\det \boldsymbol{f}'(x,y) = u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2 = v_x(x,y)^2 + v_y(x,y)^2 = |f'(z)|^2$$

misc. (No. 1 の残り物)

有名な Hamilton による $\mathbb{C}$ の定義の導入部分を自分の手で確かめてみよう。

問題 11. $K := \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ に

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \quad (a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

で加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を定義したとき、可換体の公理

(i) $(\forall a,b,c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

(ii) $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$

(iii) $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$

(iv) $(\forall a,b \in K) \quad a+b = b+a$

(v) $(\forall a,b,c \in K) \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

(vi) $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a\cdot 1_K = 1_K \cdot a = a$

(vii) $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad a\cdot a'' = a''\cdot a = 1_K$

(viii) $(\forall a,b,c \in K) \quad (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c,\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

(ix) $(\forall a,b \in K) \quad a\cdot b = b\cdot a$

が成り立つことを確かめよ。

(注: $\exists$ がついている、0_K, a', 1_K, a'' は、一意的に定まる。それが何か具体的に書くと良い。可換体の公理に $0_K \neq 1_K$ も含める場合があるが、今の場合はこの条件も満足している。)

問題 12. 代数学の適当なテキストを探して、可換環とその極大イデアルの定義、実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を学び、

$$I = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; (\exists q(x) \in \mathbb{R}[x])\ p(x) = (x^2+1)q(x) \right\} \qquad \text{(要するに } x^2+1 \text{ の倍数の全体)}$$

が $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルであることを示せ。(すると剰余環 $\mathbb{R}[x]/I$ は体になるが、これを $\mathbb{C}$ の定義とすることが出来る。— これは複素関数論からは離れるので、あくまで参考です。)

解答 1. 複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合 Ω を定義域とする複素数値関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が、定義域の各点 z で微分可能なとき、f は正則であるという。f が z で微分可能とは、極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

が存在することをいう。 ■

解答 2. $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とするとき、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega} &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+iy\in\Omega\right\},\\
u(x,y) &:= \operatorname{Re} f(x+iy) \quad ((x,y)\in\widetilde{\Omega}),\\
v(x,y) &:= \operatorname{Im} f(x+iy) \quad ((x,y)\in\widetilde{\Omega})
\end{aligned}$$

で定まる関数 u, v をそれぞれ f の実部、虚部と呼ぶ。 ■

解答 3. 2 つの実変数 (x,y) に関する 2 つの関数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ に関する連立微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{1}$$

を Cauchy-Riemann 方程式と呼ぶ。任意の正則関数の実部・虚部 u, v は、この方程式を満たすことが知られている。■

解答 4.

(a)

$$f(x+iy) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2\cdot iy + 3x\cdot(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

であるから、$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$.

(Mathematica では、`ComplexExpand[(x+I y)^3]` のようにすると分かりやすく計算してくれる。)

(b)

$$f(x+iy) = \frac{1}{(x+iy)^2+1} = \frac{1}{x^2-y^2+1+2ixy} = \frac{x^2-y^2+1-2ixy}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}$$

であるから

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2+1}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)\right)\\
&= \cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + i\sin x\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\\
&= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y. ■
\end{aligned}$$

解答 5.

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)}\frac{(u(a+h_x,b+h_y)+iv(a+h_x,b+h_y))-(u(a,b)+iv(a,b))}{h_x+ih_y}$$

特に $h_y=0$ という条件を加えて極限を取ると、

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h_x\to 0}\frac{(u(a+h_x,b)+iv(a+h_x,b))-(u(a,b)+iv(a,b))}{h_x}\\&=\lim_{h_x\to 0}\left(\frac{u(a+h_x,b)-u(a,b)}{h_x}+i\frac{v(a+h_x,b)-v(a,b)}{h_x}\right)=u_x(a,b)+iv_x(a,b).\end{aligned}$$

一方 $h_x=0$ という条件を加えて極限を取ると、

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h_y\to 0}\frac{(u(a,b+h_y)+iv(a,b+h_y))-(u(a,b)+iv(a,b))}{ih_y}\\&=\frac{1}{i}\lim_{h_y\to 0}\left(\frac{u(a,b+h_y)-u(a,b)}{h_y}+i\frac{v(a,b+h_y)-v(a,b)}{h_y}\right)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right).\end{aligned}$$

$$f'(c)=u_x(a,b)+iv_x(a,b)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right)$$

から

$$u_x(a,b)=v_y(a,b),\quad u_y(a,b)=-v_x(a,b).\blacksquare$$

解答 6. これは宿題になっていたので、提出するまで伏せる (まあ、前半は講義でやってあるので簡単のはずです。)。 ■

解答 7. f の実部虚部を u, v とする。すなわち

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}&:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x+iy\in\Omega\right\},\\u(x,y)&:=\operatorname{Re}f(x+iy)\quad((x,y)\in\widetilde{\Omega}),\\v(x,y)&:=\operatorname{Im}f(x+iy)\quad((x,y)\in\widetilde{\Omega}).\end{aligned}$$

(1) 任意の $z\in\Omega$ に対して、$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とすると、

$$0=f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=\frac{1}{i}\left(u_y(x,y)+iv_y(x,y)\right).$$

これから

$$u_x(x,y)=u_y(x,y)=v_x(x,y)=v_y(x,y)=0.$$

Ω は領域 (連結開集合) であるから、u, v は $\widetilde{\Omega}$ で定数に等しい。ゆえに $f=u+iv$ も Ω で定数に等しい。

(2) 仮定より $(\exists C\in\mathbb{R})$ $|f(z)|\equiv C$. もしも $C=0$ ならば $f(z)\equiv 0$ であるから、$f(z)$ そのものが定数である。以下 $C\neq 0$ とする。$u(x,y)^2+v(x,y)^2=C^2$ を偏微分して $uu_x+vv_x=0$ かつ $uu_y+vv_y=0$.

$$\begin{pmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

もしも行列式が 0 でないならば $u=v=0$, $C=0$ となり仮定に矛盾するので、

$$u_xv_y-v_xu_y=0.$$

Cauchy-Riemann の関係式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を用いると、

$$u_xv_y-v_xu_y=u_xu_x-(-u_y)u_y=(u_x)^2+(u_y)^2,\quad u_xv_y-v_xu_y=v_yv_y-v_x(-v_x)=(v_x)^2+(v_y)^2$$

であるから、

$$(u_x)^2+(u_y)^2\equiv 0,\quad (v_x)^2+(v_y)^2\equiv 0.$$

これから $u_x\equiv u_y\equiv v_x\equiv v_y\equiv 0$. 以下 (1) と同様にして、$f$ は定数関数である。

(別解) $2uu_x+2vv_x=0$, $2uu_y+2vv_y=0$ を導くのは上と同じ。そこから Cauchy-Riemann の方程式を使って

$$uu_x-vu_u=0,\quad vu_x+uu_y=0.$$

これは

$$\begin{pmatrix}u & -v\\ v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

ということで、この連立 1 次方程式の係数行列の行列式は

$$u\cdot u-(-v)\cdot v=u^2+v^2=C^2.$$

$C=0$ ならば $u=v=0$ で、$f=u+iv=0$ も定数。$C\neq 0$ ならば (逆行列をかけて) $u_x=u_y=0$ で、再び Cauchy-Riemann の方程式を使うと $v_x=v_y=0$ も導かれ、u も v も定数である。ゆえに $f=u+iv$ も定数。— この答の方が見通しが良いような気がする

(3) 仮定は $v\equiv 0$ ということであるから、$v_x=v_y=0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ から、$u_x=u_y=0$. ゆえに u は定数関数であり、$f=u+iv=u$ も定数関数である。

(4) 仮定は $u\equiv 0$ ということであるから、$u_x=u_y=0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ から、$v_x=v_y=0$. ゆえに v は定数関数であり、$f=u+iv=iv$ も定数関数である。■

解答 8.

$$u_x=v_y=V_y,\quad u_y=-v_x=-V_x$$

を満たす連続関数 v, V があったとすると、$w:=v-V$ は

$$w_x=v_x-V_x=(-u_y)-(-u_y)=0,\quad w_y=v_y-V_y=u_x-u_x=0$$

を満たす C^1 級関数である。ゆえに $(\exists C\in\mathbb{R})$ $(\forall (x,y)\in\Omega)$ $w(x,y)=C$. ゆえに $v(x,y)=V(x,y)+C$ $((x,y)\in\Omega)$.

v は (v_x,v_y) というベクトル場のポテンシャルであるから、Ω 内の任意の点 (a,b) を固定するとき、

$$v(x,y)=v(a,b)+\int_{C_{(x,y)}}(v_x dx+v_y dy)$$

が成り立つ。ただし、$C_{(x,y)}$ は、(a,b) を始点、(x,y) を終点とする区分的に C^1 級の Ω 内の曲線である。条件 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ により、

$$v(x,y)=v(a,b)+\int_{C_{(x,y)}}(-u_y dx+u_x dy).$$

これが求める式である。(1) で見たように、もともと定数だけの不定さがあるので、$v(a,b)$ は任意定数とすれば良い。すなわち

$$v(x,y)=C+\int_{C_{(x,y)}}(-u_y dx+u_x dy).■$$

解答 9. (準備中)

解答 10. $\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であるから、$\det \boldsymbol{f}' = u_x v_y - u_y v_x$. u の偏導関数で表すと

$$\det \boldsymbol{f}' = u_x u_x - u_y(-u_y) = u_x^2 + u_y^2.$$

v の偏導関数で表すと

$$\det \boldsymbol{f}' = v_y v_y - (-v_x) v_x = v_x^2 + v_y^2.$$

$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$ であるから、

$$\det \boldsymbol{f}'(x,y) = u_x u_x - (-v_x) v_x = u_x^2 + v_x^2 = \left|f'\right|^2. \blacksquare$$

解答 11. (略解) 基本的に計算して確認するだけである。∃ のついているものは、何であるか書いておくと、

- $0_K = (0,0)$.
- a' は $a = (x,y)$ のとき $a' = (-x,-y)$.
- $1_K = (1,0)$.
- a'' は $a = (x,y)$ のとき $a'' = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$. $\blacksquare$

解答 12. (準備中)