# 複素関数練習問題 No. 2

桂田 祐史

2015 年 10 月 6 日

この文書では、$i$ は虚数単位を表す。さらに記号の復習: $a \equiv b \pmod{c} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z})\ a - b = kc.$

## 複素指数関数

複素数 $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、$e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y)$ により $e^{x+iy}$ を定める。これは (高等学校で学んだ) 実変数の指数関数 $e^x$ の拡張である。特に $\theta \in \mathbb{R}$ のとき、$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$

**問題 1.** $\theta = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ のときに $e^{i\theta}$ の値を求めよ。

**問題 2.** 任意の複素数 $z_1$, $z_2$ に対して、$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ が成り立つことを示せ。

**問題 3.** 任意の複素数 $z$ に対して、以下の (1)〜(4) が成り立つことを示せ。

(1) $e^z \neq 0$, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$　(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $(e^z)^n = e^{nz}$　(3) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$　(4) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

**問題 4.** 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\left| e^{i\theta} \right| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

**問題 5.** 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ が成り立つことを示せ。

**問題 6.** 次のことを示せ。

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = 2k\pi i.$

(2) 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = e^w \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ w = z + 2k\pi i.$

**問題 7.** 次の方程式を解け (複素数の範囲の解をすべて求めよ)。

(1) $e^z = -1$　(2) $e^z = i$　(3) $e^z = 0$

**問題 8.** $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ が単射であるか、全射であるか、それぞれ理由をつけて答えよ。

**問題 9.** $e^z$ の周期を求めよ。($c$ が関数 $f$ の周期 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall z \in \mathbb{C})\ f(z + c) = f(z)$ かつ $c \neq 0$)

## ド・モアブルの公式と等比数列の和

高校数学でおなじみのド・モアブルの公式 $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ は、複素指数関数を用いると、$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ と書き直せる。等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1 - r^n}{1 - r}$ (ただし $r \in \mathbb{C}, r \neq 1$ とする) の利用など便利なことが多く、見通しが良くなる。

**問題 10.** $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 5\varphi$ を $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ で表せ。

**問題 11.** $\cos\dfrac{\pi}{8}$ と $\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ。(三角関数の半角の公式を使えば求められるが、複素数を用いて解いてみよう。)

**問題 12.** 2 以上の任意の自然数 $N$ に対して、$\omega = \cos\dfrac{2\pi}{N} + i\sin\dfrac{2\pi}{N}$ とおくとき、任意の整数 $p$ に対して、次の式が成り立つことを示せ。

$$1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(N-1)p} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \begin{cases} N & (p \equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}) \\ 0 & (p \not\equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}). \end{cases}$$

**問題 13.** $A = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$ と $B = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$ を簡単にせよ。
(やや難しいが、Fourier 解析に重要な応用のある問題であり、有名である。)

**問題 14.** $n \in \mathbb{N}$ とするとき、$\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$ を求めよ。

## 極形式, 偏角

複素数 $z$ を $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ を用いて $z = re^{i\theta}$ と表したとき、右辺を $z$ の極形式と呼ぶ。$r, \theta$ は、$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ としたときの、$(x, y)$ の極座標である。以下 $z \neq 0$ と仮定する [1]。$r = |z|$ である。一方、$\theta$ は $2\pi$ の整数倍の差を除いて定まる。$\theta$ のことを $z$ の偏角 (an argument of $z$) と呼び、(一意的には定まらないが) $\arg z$ という記号で表す。$-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲に限定すると、$\theta$ はただ一つに定まるが、それを $z$ の偏角の主値と呼び、$\operatorname{Arg} z$ で表す。

**問題 15.** $z = -1 + \sqrt{3}i$ の極形式を求めよ。また $z^{15}$ の値を求めよ。

**問題 16.** 次の各複素数の偏角の主値と極形式を求めよ。(6) は逆三角関数を用いて答えよ。

(1) $1$　(2) $i$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$　(4) $1 + i$　(5) $-1 - \sqrt{3}i$　(6) $4 + 3i$

**問題 17.** $z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ と $\dfrac{1}{z}$ (ただし $z \neq 0$ とする) の極形式を求め、図示せよ。

## $n$ 乗根 (2 項方程式)

問題 18 は、何も見ないでも解けるようにしておくこと (非常に重要)。後はおまけ。

**問題 18.** 極形式を利用することで、$n = 2, 3, \cdots, 8$ に対して、$z^n = 1$ と $z^n = -1$ の解を求め、図示せよ。可能ならば代数的な式変形でも解いてみよ。

**問題 19.** 2 以上の自然数 $N$ に対して、$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ とおくとき、次式が成り立つことを示せ。

$$z^N - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2)\cdots(z - \omega^{N-1}).$$

**問題 20.** 1 の 5 乗根, 10 乗根を三角関数を使わずに $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表せ。

**問題 21.** 複素数 $c$ の 3 乗根は、$c = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R})$ として、$\sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\varphi}{3}}$, $\sqrt[3]{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$, $\sqrt[3]{\rho}e^{i\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$ と表せるが、$c = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$ $(\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R})$ とおいて、$(x + iy)^3 = \alpha + i\beta$ から得られる連立方程式 $x^3 - 3xy^2 = \alpha$, $3x^2y - y^3 = \beta$ を解いて求めることも考えられる (平方根の求め方の真似)。どうなるか考察せよ。

**問題 22.** 定木とコンパスによる正 $n$ 角形の作図について、Gauss が発見したことを調べよ。

**問題 23.** 2 以上の任意の自然数 $N$ に対して、$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ とおく。$(j, k)$ 成分 $(j, k \in \{1, \ldots, N\})$ が $\omega^{(j-1)(k-1)}$ に等しい $N$ 次正方行列を $W$ とするとき [2]、$\dfrac{1}{\sqrt{N}}W$ はユニタリ行列であることを示せ。
(ヒント: $W^*W = WW^* = NI$ ($I$ は $N$ 次の単位行列) を確認すればよい。$W$ は離散 Fourier 変換と呼ばれる写像の表現行列である。)

[1] そうしないと、$\theta$ は何でも良いことになってしまい、議論が少し面倒になる。0 の偏角は定義しないのが普通である。

[2] 行列を成分で定めるとき、$(i, j)$ 成分を指定するのが普通だが、複素数が関係するときは、虚数単位と記号がかぶるので、$i$ は使わず、$j, k$ を指定する本がある。そのやり方を採用した。

**misc.**

2 以上の自然数 $n$ と正数 $\rho$ に対して、$\rho$ の (実数の範囲の) $n$ 乗根 $\sqrt[n]{\rho}$ というものを用いたので、念のため根拠を確認する。

**問題 24.** 中間値の定理を用いて、次の (1), (2) を証明せよ。

(1) $n \in \mathbb{N}$ が偶数ならば、任意の $\rho \geq 0$ に対して、$r^n = \rho$, $r \geq 0$ を満たす $r$ が一意的に存在する。

(2) $n \in \mathbb{N}$ が奇数ならば、任意の $\rho \in \mathbb{R}$ に対して、$x^n = \rho$, $x \in \mathbb{R}$ を満たす $x$ が一意的に存在する。

**解答 1.** $e^{i0}=1$, $e^{i\pi/6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$, $e^{i\pi/4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\pi/3}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\pi/2}=i$, $e^{i2\pi/3}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{i3\pi/4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $e^{i5\pi/6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i3\pi/2}=-i$, $e^{i2\pi}=1$.

**解答 2.** $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ $(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R})$ とおくと、$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$ であるから、

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2}&=e^{x_1+x_2}\left(\cos\left(y_1+y_2\right)+i\sin\left(y_1+y_2\right)\right)\\
&=e^{x_1}e^{x_2}\left[\left(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2\right)+i\left(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2\right)\right]\\
&=e^{x_1}e^{x_2}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)\\
&=e^{x_1}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\cdot e^{x_2}\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)\\
&=e^{z_1}e^{z_2}.\blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 3.**

(1) $e^ze^{-z}=e^{z+(-z)}=e^0=1$ であるから、$e^z\neq 0$, $\dfrac{1}{e^z}=e^{-z}$.

(2) $n\geq 0$ に対して、帰納法で $(e^z)^n=e^{nz}$ を示そう。

(i) $n=0$ のとき $(e^z)^n=(e^z)^0=1$, $e^{nz}=e^{0\cdot z}=e^0=1$ であるから成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k\in\mathbb{Z},\,k\geq 0)$ のとき成り立つと仮定すると、

$$(e^z)^{k+1}=(e^z)^k\cdot e^z=e^{kz}e^z=e^{kz+z}=e^{(k+1)z}.$$

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より任意の $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$ に対して成り立つ。$n<0$ のときは、$m:=-n$ とおくと、$n=-m$, $m\in\mathbb{N}$ であるから、

$$(e^z)^n=(e^z)^{-m}=\frac{1}{(e^z)^m}=\frac{1}{e^{mz}}=e^{-mz}=e^{nz}.$$

(3) $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とおくと、

$$e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

であるから、

$$\overline{e^z}=e^x\cos y-ie^x\sin y=e^x\cos(-y)+ie^x\sin(-y)=e^x\left(\cos(-y)+i\sin(-y)\right)=e^{x-iy}=e^{\overline{z}}.$$

(4) $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とおく。

$$\left|e^{iy}\right|=\left|\cos y+i\sin y\right|=\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y}=\sqrt{1}=1$$

であるから、

$$\left|e^z\right|=\left|e^xe^{iy}\right|=\left|e^x\right|\left|e^{iy}\right|=e^x\cdot 1=e^x=e^{\operatorname{Re}z}.\blacksquare$$

**解答 4.** 実質的に前問で済んでいるが、ここでは直接証明しておく。$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ であるから、

$$\begin{aligned}
&\left|e^{i\theta}\right|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sqrt{1}=1,\\
&\overline{e^{i\theta}}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{i(-\theta)}=e^{-i\theta)},\\
&\frac{1}{e^{i\theta}}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)}=\frac{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=e^{-i\theta}.\blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 5.**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

を $\cos\theta, \sin\theta$ についての連立 1 次方程式とみなして解くと、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \blacksquare$$

**解答 6.**

(1) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \wedge \cos y + i\sin y = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge \cos y = 1 \wedge \sin y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge ((\exists k \in \mathbb{Z})\ y = 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad z = 2k\pi i. \end{aligned}$$

(注: $\Leftrightarrow$ の $\Rightarrow$ では、まず $e^x(\cos y + i\sin y) = 1$ の両辺の絶対値を取って $e^x = 1$ を得てから、それを代入して $1 \cdot (\cos y + i\sin y) = 1$.)

(注) 複素対数関数を学んだ後ならば、次のように解答して良い。1 の極形式が $1 = 1e^{i0}$ (つまり $r = 1$, $\theta = 0$) であることから、

$$z = \log 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2)

$$e^z = e^w \Leftrightarrow 1 = e^w e^{-z} \Leftrightarrow e^{w-z} = 1 \Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbb{Z})\ w - z = 2k\pi i). \blacksquare$$

**解答 7.**

(1) $e^{i\pi} = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} e^z = -1 &\Leftrightarrow e^z e^{i\pi} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z+i\pi} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z + i\pi = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = (2k-1)\pi i. \end{aligned}$$

(2) $e^{i\pi/2} = i$ であるから

$$\begin{aligned} e^z = i &\Leftrightarrow e^z / e^{i\pi/2} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z - i\pi/2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z - i\pi/2 = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = (2k + 1/2)\pi i. \end{aligned}$$

(3) 任意の $z$ に対して $e^z \neq 0$ である。このことは既に証明済みであるが、念のためもう一度書くと、

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$$

であるから、$e^z \neq 0$. ゆえに方程式 $e^z = 0$ の解は存在しない。 $\blacksquare$

**解答 8.** (念のため、単射、全射を復習しておく。定義は

$$\begin{aligned}
&f \text{ が単射} \Leftrightarrow [(\forall z_1, z_2) z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)],\\
&f \text{ が全射} \Leftrightarrow (\forall w)(\exists z) w = f(z)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&f \text{ が単射でない} \Leftrightarrow [(\exists z_1, z_2) z_1 \neq z_2 \wedge f(z_1) = f(z_2)],\\
&f \text{ が全射でない} \Leftrightarrow (\exists w)(\forall z) w \neq f(z).
\end{aligned}$$

である。)

単射ではない。実際、$z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi i$ とおくと、$z_1 \neq z_2$ であるのに $e^{z_1} = 1 = e^{z_2}$.

全射ではない。実際、$0 \in \mathbb{C}$ であるが、$e^z = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は存在しない。■

(後で指数関数の定義域、終域を適当に制限して、その逆関数である"複素対数関数"を定義することになる。)

**解答 9.**

$$\begin{aligned}
c \text{ が } e^z \text{ の周期} &\Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^{z+c} = e^z \wedge c \neq 0\\
&\Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z e^c = e^z \wedge c \neq 0\\
&\Leftrightarrow e^c = 1 \wedge c \neq 0\\
&\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad c = 2n\pi i \wedge c \neq 0\\
&\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad c = 2n\pi i.
\end{aligned}$$

すなわち $c$ が $e^z$ の周期であるとは、0 でない整数 $n$ が存在して、$c = 2n\pi i$ となることが必要十分である。■

**解答 10.**

$$\begin{aligned}
\cos 3\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = \operatorname{Re}\left[(\cos\varphi + i \sin\varphi)^3\right]\\
&= \operatorname{Re}\left(\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi + i^2 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi\right)\\
&= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 4\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = \operatorname{Re}\left[(\cos\varphi + i \sin\varphi)^4\right]\\
&= \operatorname{Re}\left(\cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi + 6i^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i^3\cos\varphi\sin\varphi^3 + i^4\sin^4\varphi\right)\\
&= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 5\varphi &= \operatorname{Im}(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = \operatorname{Im}\left[(\cos\varphi + i \sin\varphi)^5\right]\\
&= \operatorname{Im}\left(\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi + 10i^2\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 10i^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5i^4\cos\varphi\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi\right)\\
&= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi. \blacksquare
\end{aligned}$$

**解答 11.** $z = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$ とおくと、$z = e^{i\pi/8}$.

$$z^2 = e^{2\cdot i\pi/8} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \wedge 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}$. これを解いて

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right).$$

$\cos\frac{\pi}{8} > 0, \sin\frac{\pi}{8} > 0$ であるから、

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.\blacksquare$$

**解答 12.** $\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp}$ は初項 1, 公比 $\omega^p$ の等比数列の和である。$p \equiv 0 \pmod N$ のとき $\omega^p = 1$ であるから

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

$p \not\equiv 0 \pmod N$ のとき $\omega^p \neq 1$ であるから、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = 1 \cdot \frac{(\omega^p)^N - 1}{\omega^p - 1} = \frac{(\omega^N)^p - 1}{\omega^p - 1} = \frac{1^p - 1}{\omega^p - 1} = 0.\blacksquare$$

**解答 13.** $A + iB$ は公比 $e^{i\varphi}$ の等比数列の和であるので

$$A + iB = 1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \cdots + e^{in\varphi} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\varphi}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\varphi}\right)^n}{1 - e^{i\varphi}}.$$

分母を実数になるように変形する。分母分子に $1 - e^{i\varphi}$ の共役複素数をかけても良いが、$e^{-i\varphi/2}$ をかけるのが手っ取り早い[3]。

$$A + iB = \frac{e^{-i\varphi/2}\left(1 - e^{in\varphi}\right)}{e^{-i\varphi/2}\left(1 - e^{i\varphi}\right)} = \frac{e^{-i\varphi/2} - e^{i(n-1/2)\varphi}}{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}}.$$

右辺の分母は $-2i\sin\varphi/2$, 分子は

$$\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} - (\cos(n-1/2)\varphi + i\sin(n-1/2)\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - \cos(n-1/2)\varphi - i\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin(n-1/2\varphi)\right).$$

であるから、

$$A + iB = i\frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + \frac{\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

ゆえに

$$A = \frac{\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad B = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

**解答 14.** (準備中)

**解答 15.** $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

$$\frac{z}{|z|} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\theta + i\sin\theta$$

を満たす $\theta$ として $\theta = \frac{\pi}{3}$ が取れる。ゆえに

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

これから

$$z^{15} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{15} = 2^{15}e^{15\cdot i\frac{\pi}{3}} = 2^{15}e^{5\pi i} = 2^{15}\cdot e^{\pi i} = -2^{15} = -32768.\blacksquare$$

[3]細かい工夫のようだが、この問題は実は Fourier 解析では非常に重要であるので、覚えた方が良いかもしれない。

**解答 16.** (準備中)

**解答 17.**

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \overline{re^{i\theta}} = \overline{r}\,\overline{e^{i\theta}} = re^{-i\theta},\\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.\end{aligned}$$

ゆえに $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ の極形式はそれぞれ、$\overline{z} = re^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. 図示については準備中。 ■

**解答 18.** $n = 6, 8$ 以外は講義ノートに書いてあるので、ここでは省略する。$n = 8$ の場合は (詳しいことは省略するが)

- $z^8 = 1$ の解は、極形式で $e^{ik\pi/4}$ $(k = 0, 1, \cdots, 7)$ であり、$\pm 1$, $\pm i$, $\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号は任意の組み合わせを許す)。
- $z^8 = -1$ の方は、実は宿題で $e^{i\pi/8}$ を求めてあり、後はそれに $z^8 = 1$ の解をかけたものになる。 ■

**解答 19.** $z = \omega^k$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ は互いに相異なり (従って個数は $N$)、$z^N - 1 = 0$ を満たす。ゆえに $z^N - 1 = 0$ のすべての根である。ゆえに $z^N - 1 = a\displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(z - \omega^k)$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在するはずだが、$z^N$ の係数を両辺で比較することにより $a = 1$. ゆえに $z^N - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(z - \omega^k) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{N-1})$. ■

**解答 20.** (準備中)

**解答 21.** (準備中)

**解答 22.** (参考書案内をした方が良いかな…)。

**解答 23.** $\overline{\omega} = \omega^{-1}$ であることに注意する。$W$ の $(j, k)$ 成分は $\omega^{(j-1)(k-1)}$. $W^*$ の $(k, \ell)$ 成分は $\overline{W}$ の $(\ell, k)$ 成分であり、$\overline{\omega^{(\ell-1)(k-1)}} = \overline{\omega}^{(\ell-1)(k-1)} = \omega^{-(\ell-1)(k-1)}$. ゆえに $WW^*$ の $(j, \ell)$ 成分は

$$\sum_{k=1}^{N}\omega^{(j-1)(k-1)}\omega^{-(\ell-1)(k-1)} = \sum_{k=1}^{N}\omega^{(j-\ell)(k-1)} = \sum_{k'=0}^{N-1}\omega^{(j-\ell)k'} = \begin{cases} N & (j - \ell \equiv 0 \pmod N) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$1 \le j \le N$, $1 \le \ell \le N$ のとき、$j - \ell \equiv 0 \pmod N$ は $j = \ell$ と同値であるから、$WW^*$ の $(j, \ell)$ 成分は $N\delta_{j\ell}$ である。すなわち $WW^* = NI$. ゆえに $UU^* = I$. これは $U$ が unitary 行列であることを示している。 ■

**解答 24.** (1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ とするとき、$f(x)$ は $x$ の多項式であるから $f$ は連続である。$f'(x) = nx^{n-1} > 0$ $(x > 0)$ であるから $f$ は $[0, \infty)$ で狭義単調増加であるから単射である。したがって、任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して、$f(r) = \rho$, $r \ge 0$ を満たす $r$ は存在しても一意的である。一方、存在することは以下のように場合分けして示される。

- $\rho = 0$ のとき、$x = 0$ とすると $x \in [0, \infty)$, $f(x) = \rho$.
- $\rho = 1$ のとき、$x = 1$ とすると $x \in [0, \infty)$, $f(x) = \rho$.
- $\rho > 1$ のとき、$f(0) = 0 < \rho$, $f(\rho) = \rho^n > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解が $(0, \rho)$ 内に存在する。
- $0 < \rho < 1$ のとき、$f(0) = 0 < \rho$, $f(1) = 1 > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解 $(0, 1)$ 内に存在する。

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ とするとき、(1) とほぼ同様にして、$f$ は連続かつ狭義単調増加かつ単射である ($n$ が奇数であることから、$f'(x) = nx^{n-1} > 0$ $(x \ne 0)$ となるので、負の範囲も含めて狭義単調増加になることに注意)。任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して $f(r) = \rho$ となる $r$ が存在することは、(1) と同様に示される。$\rho < 0$ の場合は、$r$ を $f(r) = -\rho$ を満たす数とすると、$f(-r) = \rho$ が成り立つ。 ■