

複素関数論メモ

桂田 祐史

2015 年 1 月 13 日

- 前回、Casorati-Weierstrass の定理の証明、最後に詰まってしまった。

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta}$$

が c の近傍で正則であることを示した後、 $g(c) \neq 0$ を示そうとしたが、そもそも $g(c) \neq 0$ とは限らないのであった (成り立たないことの証明は難しい...)。以下のように場合分けして議論する。

(a) c が g の零点でないならば、 c は $f(z) = \frac{1}{g(z)} + \beta$ の除去可能特異点になる。

(b) c が g の零点である場合、 g は恒等的に 0 ではないので ($g(z) = \frac{1}{f(z) - \beta}$ ($0 < |z - c| < r$) という形から明らか)、 $\exists k \in \mathbb{N}$ s.t. c が f の k 位の零点となる。このとき c は $f(z) = \frac{1}{g(z)} + \beta$ の k 位の極になる。

いずれも c が f の真性特異点であるという仮定に矛盾する。背理法が完了した。

- 本日、宿題 1,2,3,4,5,7 を返却した。返却された宿題を (WWW¹ の資料も参考に) 来週までにチェックし、分からないことがあれば、早目に質問すること。補講の日 (1 月 21 日水曜) の 2 コマ目 (3 限) は質問・相談時間とするつもりである。

以下、宿題を見て気になったこと。

- $\sqrt{\quad}$ の中を虚数のままに放置している人がいたけれど、虚数の平方根はその気になれば求められることを忘れないように。 $c \in \mathbb{C}$ を $c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) と表して、 $(x + iy)^2 = a + ib$ を解くのであった。
- i の絶対値は 1 である。

$$|i| = 1.$$

これを間違える人が多くて参った。 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の絶対値は、

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と定義してある (例えば $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$)。 $i = 0 + 1 \cdot i$ であるから $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$ 。

¹<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>

- $|z|$ は、複素平面では、 z と原点の距離であって、0 または正の数である。負になったり、虚数になったり...
- t が実数ならば $\sqrt{t^2} = |t|$. (t が実数でないならば、これは成り立たない。 — この辺は後で説明する。)
- 収束円を定める条件 $|z - 1| < 2$ を $-1 < z < 3$ と変形してしまうような人がいた(「図を描け」とはわざわざ言わないけれど、収束円が円というイメージは持ってほしい)。
- 収束半径が虚数や負になってしまう人がいた。収束半径は正の数または $0, \infty$ である。
- u と v の書き分け、読み取りが出来ない人が多いように見える(それでレポートを写して混乱していたようだ)。私のお勧めは、右側を下まで下ろすのが u , 上で止めるのが v , とするもの。(左側では区別できない。)
- d'Alembert の公式をきちんと使えない人が多い。これについては、問 4, 問 5 の解説を読んで下さい。
- [例題] $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$ の 0 のまわりの Taylor 展開の収束半径を求めよ。

$$f(z) = \frac{z}{2(1 + z^2/2)} = \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{2n+1}.$$

$$\text{この級数が収束する} \Leftrightarrow |\text{公比}| < 1 \Leftrightarrow |-z^2/2| < 1 \Leftrightarrow |z|^2/2 < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2}$$

であるから、収束半径は $\sqrt{2}$ である。この議論は収束半径の定義 (ρ が $\sum_n a_n(z-c)^n$ の収束半径 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |z-c| < \rho$ で収束し、 $|z-c| > \rho$ で発散する) を理解していれば簡単なはずだが、これが出来ない人が多いような気がする — 思い過ごしだと良いのだけど。これは Taylor 展開の中心 0 と分母の零点 $\pm\sqrt{2}i$ との距離でもある (今日は返却しないけれど、問 10 (2) の出題のねらいだったりする)。つまり収束半径を求めるだけならば、Taylor 展開を実際に求める必要もない。そこまで理解するのが一つの大きな目標である。

- 講義ノートの留数定理を書いて証明。
- 3つの公式

命題 0.1 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \neq 0$ が成り立つとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

例として

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1}; c\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1}; i\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{z^2 + 1} \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \end{aligned}$$

命題 0.2 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \neq 0$, $a > 0$ が成り立つとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}; c).$$

もし $a < 0$ の場合は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}; c).$$

例として $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; c\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iaz}}{z + i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}. \end{aligned}$$

$a < 0$ のとき、 $a' = -a$ とおくと、 $a' > 0$ で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ia'x}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia'x}}{x^2 + 1} dx} = \overline{\pi e^{-a'}} = \pi e^{-a'}.$$

$a = 0$ の場合も含めて、結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

(2015/1/13 はここまでだった。)

命題 0.3 $r(x, y)$ が x, y の有理式で、

$$f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)$$

が $|z| = 1$ 上に極を持たなければ、

$$\int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|c| < 1} \text{Res}(f; c).$$

$z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とすると、

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{z},$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

であるから、

$$\int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} r\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{|c| < 1} \text{Res}(f; c).$$

例として、 $0 \leq e < 1$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(1 + e \frac{z + 1/z}{2}\right)^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \int_{|z|=1} \frac{z}{(ez^2 + 2z + e)^2} dz \\ &= \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \text{Res} \left(\frac{z}{(ez^2 + 2z + e)^2}; \frac{-1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right) \\ &= 8\pi \frac{\pi}{8(1 - e^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

(合わない。どこかおかしい。)