問 5(2) のような問題の解き方　簡単な有理関数を 0 のまわりに Taylor 展開する話をしたが、うっかりして、(0 とは限らない) c のまわりに Taylor 展開する仕方を説明するのを忘れていた。今回は (2) は解かなくても良いことことにするけれど、一応解き方を説明する。

要点は z を $(z-c)+c$ と変形して、以下 $(z-c)$ は一つの変数のように最後まで残しながら式変形をする、というものである。

$\dfrac{1}{az+b}$ を c の周りに展開する場合で説明する。

$\dfrac{1}{2z+3}$ を 1 のまわりで Taylor 展開する。

$$\frac{1}{2z+3}=\frac{1}{2\left[(z-1)+1\right]+3}=\frac{1}{2(z-1)+5}=\frac{1}{5\left(1+\frac{2(z-1)}{5}\right)}$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-1)}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^{n+1}}(z-1)^n.$$

収束円は $\left|\frac{2(z-1)}{5}\right|<1$ より $|z-1|<\dfrac{5}{2}$.

いっそのこと $z-c=\zeta$ と置き換えるのが良いかも。

$z-1=\zeta$ とおくと、$z=\zeta+1$ であるから、

$$\frac{1}{2z+3}=\frac{1}{2(\zeta+1)+3}=\frac{1}{2\zeta+5}=\frac{1}{5\left(1+\frac{2\zeta}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2\zeta}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^{n+1}}\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^{n+1}}\left(z-1\right)^n.$$