

複素関数

桂田 祐史

2014 年 9 月 21 日, 2022 年 9 月 17 日

ついに関数論入門部分を担当 (これまで後半部分しか講義したことが無い)。わくわくしている。

月曜 2 限 (312), 火曜 3 限 (402) で講義を行なう。

目 次

0	なるべく短いイントロ	5
0.1	パラシュート降下 … この科目の目的は帝王道路のドライブ	5
0.2	歴史	6
0.2.1	Cardano	6
0.2.2	Bombelli	6
0.2.3	de Moivre	7
0.2.4	Euler	7
0.2.5	Gauss	7
0.2.6	Cauchy	8
0.2.7	Weierstrass, Riemann	8
0.2.8	量子力学	8
0.3	教科書、参考書	8
1	複素数の定義とその性質	9
1.1	怪しい定義と四則	9
1.2	平方根	11
1.3	順序	12
1.4	共役複素数	12
1.4.1	実係数多項式の根	14
1.5	絶対値	14
1.6	複素平面	15
1.7	複素指数関数の先取り	16
1.8	極形式, 偏角	17
1.9	複素数の演算の図示	20

1.10	n 乗根	22
1.11	$\mathbb{C}$ のちゃんとした定義	25
1.12	$\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束	26
2	複素関数とその極限、正則性	27
2.1	複素関数の実部・虚部	28
2.2	よく使う記号・言葉	28
2.3	極限と連続性	29
2.4	微分	31
2.5	Cauchy-Riemann の方程式	33
2.5.1	正則関数が定数関数となる場合	35
2.5.2	正則関数と調和関数	36
3	冪級数	37
3.0	イントロ	37
3.1	$\mathbb{C}$ の完備性	38
3.2	級数の収束判定	39
3.3	冪級数の収束円	43
3.4	関数列の一様収束	49
3.5	冪級数の項別微分定理	54
3.6	実関数の場合の項別微分、項別積分	59
3.7	Abel の級数変形法, Abel の連続性定理	60
4	複素関数としての対数関数と冪関数	64
4.1	対数関数 $\log z$	64
4.2	冪関数 z^α	67
5	線積分	68
5.1	線積分の定義	69
5.2	曲線に関する用語の定義	74
5.3	$\mathbb{R}^2$ で活躍する積分 (ベクトル解析との関係)	77
6	Cauchy の積分定理 (1)	77
6.1	はじめに	78
6.2	三角形の周に沿う線積分の場合	79
6.3	原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0	82
6.4	星型領域における Cauchy の積分定理	84
7	円盤における正則関数の性質	90
7.1	円盤における Cauchy の積分公式	90
7.2	正則関数の巾級数展開可能性	91

8	二つ目のイントロと積分路の変形	93
8.1	二つ目のイントロ	93
8.2	教科書に載っている Cauchy の積分定理	94
8.3	積分路の変形について	96
8.4	楽屋裏 (授業では話しません, 興味がなければ読む必要はないです)	98
9	正則関数の性質	100
9.1	正則関数の零点とその位数	100
9.2	一致の定理	101
9.3	平均値の定理と最大値原理	104
9.4	Liouville の定理	106
9.5	収束半径	108
9.6	Schwarz の補題	112
10	孤立特異点, Laurent 展開, 留数	112
10.1	冪級数 (テイラー級数)、負冪級数、ローラン級数の収束	112
10.2	円環領域における正則関数の Laurent 展開	115
10.3	孤立特異点, 孤立特異点の留数, 孤立特異点の分類	121
11	補足: 零点と極の位数	131
11.1	10 行の要点	132
11.2	正則関数の零点の位数	132
11.3	極とその位数の特徴づけ	135
12	留数定理 (residue theorem)	137
12.1	留数の定義	137
12.2	留数定理	139
12.3	極における留数の求め方	140
12.4	締めくくり	143
13	定積分計算への留数の応用	144
13.1	はじめに (この問題を取り上げる意義と広義積分についての注意)	144
13.2	有理関数の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	145
13.3	有理関数 $\times e^{iax}$ の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$	151
13.4	三角関数の有理関数の周期積分 $\int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	156
13.5	その他	159
13.5.1	Cauchy の主値積分	159
13.5.2	命題 13.12 の別証明	162
14	この後やること, やれなかったこと	165

A	数学解析から	166
B	連結性	166
C	級数に関する補足	168
C.1	Cauchy-Hadamard の定理	168
C.1.1	上極限と下極限	168
C.1.2	正項級数に対する Cauchy-Hadamard の定理	170
C.1.3	冪級数に対する Cauchy-Hadamard の定理	171
C.1.4	$\limsup \sqrt[n]{a_n}$ の計算に便利な補題	171
C.2	絶対収束に関する命題	172
C.3	冪級数の項別微分可能性定理の別証明	172
C.4	Abel の級数変形法	175
C.5	級数の研究の歴史に関するメモ	179
D	初等関数についてのメモ	180
E	定積分計算のガラクタ箱	180
E.1	$x^\alpha \times$ 有理関数の積分 $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$	181
E.2	有理関数の半直線上の積分 $\int_0^\infty f(x) dx$	184
E.3	偶関数 $\times (\log x)^n$ の積分 $\int_0^\infty g(x)(\log x)^n dx$	186
E.4	有理関数 $\times (\log x)^n$ の積分 $\int_0^\infty f(x)(\log x)^n dx$	187
E.5	有理関数の有限区間の積分	187
E.6	その他 有名な積分	188
F	楽屋裏	193
F.1	一松 [1] (1957) の VI 章 §4 から引用	193
G	参考書案内	194

記号・取り決め

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- 領域とは弧連結な開集合のことをいう。

0 なるべく短いイントロ

複素変数の複素数値の関数を複素関数、微分可能な複素関数を正則関数と呼ぶ¹。正則関数の理論 (複素関数の微積分の理論) である複素関数論がこの講義のテーマである。

ついつい長いイントロをしたくなるのだが (特にこの関数論は、あれも言いたい、これも言いたい、が山のようにある)、最初に長いイントロを聞いても良く分からないだろうから、なるべく短くしたい。

0.1 パラシュート降下 … この科目の目的は帝王道路のドライブ

Cauchy の積分公式と呼ばれる、正則関数についての公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\text{適当な図を添える})$$

とその系、例えば c の近傍で正則な関数 f が

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

と Taylor 展開出来る (よって無限回微分可能である) ことや、留数定理などを理解し、使えるようになることが最終目標である。

——— 留数定理の応用 ———

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{z^2 + 1} = 2\pi i \frac{1}{z + i} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

($\tan^{-1}$ を使っても良いけれど… $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ など同様に計算可能で、そうなる原始関数を求める事自体難しい。Mathematica でもやり方を間違えるとハマる。)

Cauchy の積分公式から、重要で応用上も有用な定理・公式が怒涛のように出て来る。解析概論で有名な高木貞治は、このあたりのことを、「帝王道路のドライブ」と評した²。

到達目標は、教科書の 1~4 章 + α である。これは理工系の多くの学科の「関数論」の相場である。

¹正確には、 $\mathbb{C}$ の開集合を定義域とする微分可能な関数を正則関数という。 $\mathbb{C}$ の開集合としておかないと、実関数を排除できない。

²アレクサンドリアのプトレマイオス 1 世がエウクレイデス (ユークリッド) に「幾何学を学ぶのに『原論』より近道はないかと尋ねたところ、「幾何学に王道なし」と答えた、という伝説があり、学問を学ぶためには、王様のような偉い人でも、特別に楽な方法はなくて、一步一步地味に進む必要がある、ことのたとえに使われる (使われた?)。それを踏まえた上で、複素関数論の理論は Cauchy の積分公式までたどり着けば後は快調に進む、ということを行っているわけだ。

0.2 歴史

0.2.1 Cardano

歴史上初めて登場したのは…2次方程式でなくて3次方程式に関係してだった。Cardano (Gerolamo Cardano, 1501年ミラノに生まれ、1576年ローマで没する) は、著書 *Ars magna de Rebus Algebraicis* (1545)³ の中で、3次方程式、4次方程式の解法 (解の公式) を示した。

実係数3次方程式 $x^3 + px + q = 0$ のすべての根が実数である場合 ($q^2/4 + p^3/27 < 0$ である場合)、Cardano の方法で解く過程で虚数が現れてしまう。実際、彼が与えた公式

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

において $q^2/4 + p^3/27$ が負になれば、負数の平方根が必要になる。Ars Magna にはそのような例は載っていないが、そういう問題があることは (多分? 当然?) 分かっていたであろう。有名な「足して10, かけて40になる二つの数は?」という問を出し、 $5 \pm \sqrt{-15}$ と答を提示しているのは (上の PDF ファイルの 67 ページ目)、そのことを暗示していると思われる。

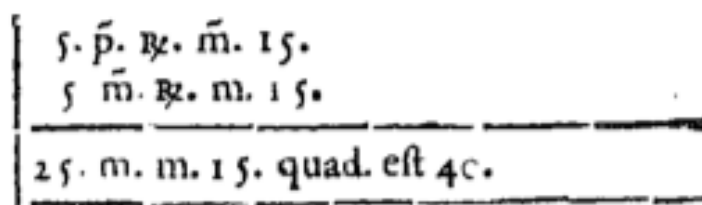


図 1: 足して 10, かけて 40 となる 2 数は $5 \pm \sqrt{-10}$

(3次方程式の解法の発見者が一体誰であるかという議論があるけれど、それはおいておく。3次方程式と虚数に関する説明を最初に公表したのは Cardano である、ということ。)

0.2.2 Bombelli

Rafael Bombelli (1526–1572) は *Algebra* (1572年) の中で3次方程式の不還元の場合を説明した。

$$x^3 = 15x + 4$$

という方程式 (これは高校生なら $x = 4, -2 \pm \sqrt{3}$ と解ける) に Cardano の公式を適用すると、

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

が得られるが、虚数に関する計算法則を導入した上で、これが4であることを説明した。

この後、虚数を用いずに不還元 of 3次方程式を解こうとしたが誰も成功せず、ある意味で不可能であることまで証明された。

³http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operamnia/vol_4_s_4.pdf

0.2.3 de Moivre

de Moivre (Abraham de Moivre, 1667–1754) は、1730 年に

$$\begin{aligned}\cos nx &= \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x \cos^{n-4} x + \cdots, \\ \sin nx &= n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \cdots\end{aligned}$$

という公式を与えた。これはいわゆるド・モアブルの公式

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

を与えたことになる。複素数を用いると見通しが良くなることの代表例である。

0.2.4 Euler

「Euler を読め、Euler を読め、Euler を読め」と言われた Euler (Leonhard Euler, 1707 年スイスの Basel に生まれ、1783 年現在ロシアのサンクトペテルブルクにて没する) は、Euler の公式と呼ばれる

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

という関係式を発見し、縦横無尽に活用した。

指数関数を**複素関数**(複素変数の関数)に拡張すれば、三角関数と関係があることが分かる。 $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ となることはすぐ分かるので、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

複素指数関数について指数法則を適用すると、de Moivre の定理は簡単な系となる。

Euler は楕円関数についても重要な発見をした(関数論とつながるところまではやっていないようであるが)。

0.2.5 Gauss

ガウス (Carolus Fridericus Gauss, 1777 年 4 月 30 日 – 1855 年 2 月 23 日)

Gauss 以前も、**代数学の基本定理**に気がついた人はいたようだが⁴、Gauss はその重要性を認識して、生涯で様々な証明を発表した。最初に証明を発表した当時は、まだ複素数が市民権を得ていなかったため、「次数 1 以上の任意の実係数多項式は、1 次または 2 次の因数に分解される」のような内容だったそうである。(代数学の基本定理は、現代では「次数 1 以上の任意の複素係数多項式は、少なくとも一つの複素数の根を持つ (結局、重複度を込めて、ちょうど n 個の複素数の根を持つ、となる)」と書かれるが、複素数を認めないと、そこまで分解できない。)。

⁴例えば、フランス人は代数学の基本定理のことを d'Alembert の定理と言うそうである。また Gauss の証明は現代の基準では証明とは認められないとか、Gauss 以外の誰が証明していたとか、その手の話も色々あるみたい。

著作として発表しなかったが、複素線積分の定義や、Cauchy の積分定理、正則関数の冪級数展開可能性などを良く認識していて(高木 [2] の「函数論縁起」を見よ)、それらを縦横無尽に利用して研究(楕円関数, 超幾何級数, 確定特異点型微分方程式など)を行なった。

複素平面は Gauss 平面と呼ばれる。Gauss 自身の発表(1811 年頃)よりも先に Wessel (Caspar Wessel, 1797 年), Argand (Jean-Robert Argand, 1806 年) が発表していたというのも良く知られている。(英語の世界では、the Argand plane, an Argand diagram というのはポピュラーである。)

0.2.6 Cauchy

Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789 年 8 月 21 日 - 1857 年 5 月 23 日)

複素線積分の定義、Cauchy の積分定理、Cauchy の積分公式、Cauchy-Riemann の関係式など、この講義で学ぶ重要なことの多くを発表した。

Cauchy が実際にどういう論文を書いたか、岡本・長岡 [3] が参考になる。

0.2.7 Weierstrass, Riemann

(準備中: 例えば高瀬 [4] の IV 「リーマンとヴァイエルシュトラスの時代」. Abel についても何か書くべきなのかしらん…)

ワイエルシュトラス (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897) 楕円関数論、冪級数による解析接続、代数関数の理論など。

リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 年 9 月 17 日 - 1866 年 7 月 20 日) Cauchy-Riemann の関係式を元にした関数論の幾何学的理論、Riemann 面。

0.2.8 量子力学

私自身は関数論を学んで複素数が身近でリアルな存在になった。多くの数学者が同じ思いを持っていると想像するのだが、ある有名な物理学者は、次のように言っていた。

- (a) それだけで複素数を受け入れることは出来ない(便利ではあっても、なくても済むので、複素数を用いる必然性がない)。
- (b) 量子力学にはどうしても複素数が必要で、物理学者としては複素数を受け入れざるを得ない。

正直に白状すると、私はこの意見を今ひとつ実感・納得出来ないが、参考のために書いておく。

0.3 教科書、参考書

講義の名前は「複素関数」だが、テキストの名前だと、「関数論(函数論)」、「複素解析」のどちらかがつくものが多い。杉浦「解析入門 I, II」や高木「解析概論」のように、解析学の入門書に含まれていることもある。

1 複素数の定義とその性質

定義、四則、平方根、複素平面、極形式、 n 乗根、というスタンダードな話をする。

1.1 怪しい定義と四則

高校数学で教わったはず？

$i^2 = -1$ となる数 (虚数単位, the imaginary unit) i を導入し、 $a + ib$ (a と b は実数) と書ける数を**複素数** (a complex number) という。

$a + i0$ は単に a , $0 + ib$ は単に ib , $a + i1$ は単に $a + i$ と書くことにする。 $0 + i0$ は 0 , $0 + i1$ は i と書くことになる。

そして

$$\begin{aligned}(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \\ (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i\end{aligned}$$

で和と積を定める。

以上は複雑なようだが (書いていても気持ちが悪い)、 i を変数とする多項式として計算し、途中で i^2 が現れたら -1 で置き換える、というルールで計算すると良い (同じ結果が得られる)。

$a + i0$ を a と書くと、実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる。二つの実数を実数として足したりかけたりするのと、複素数として足したりかけたりするのと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

そうすると $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみなせる。数の範囲を実数から拡張したことになる。

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いづらい。

きちんとした定義は、最後に与えることにする。

余談 1.1 (虚数単位を表す記号) 虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたり、JIS (日本工業規格) では字体を立体にされて $\mathbf{i}$ と書かれたりする。

余談の余談であるが、Mathematica では $\mathbf{I}$ で表す。MATLAB では $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ のどちらも虚数単位を表し、 $\mathbf{i}$ や $\mathbf{j}$ を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1\mathbf{i}$ や $1\mathbf{j}$ は虚数単位を表す。■

$a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の全体を $\mathbb{C}$ と書く。

実数でない複素数のことを**虚数** (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、 $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) と書ける数のことをいう。

$a = 0$, $b \neq 0$ のとき、純虚数と呼ぶ。 $(0 + i0 = 0$ を純虚数に含めるという流儀もある (そうすると虚数とは、実数ではないか、 0 であるか、ということになる??)。純虚数という言葉は使わないテキストも多い。)

複素数の変数は z , w , ζ などの文字で表されることが多い (ζ はゼータ、またはツェータと読む)。

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 x, y をそれぞれ z の実部、虚部と呼び、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ で表す。

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(昔はドイツ文字を用いて、 $\Re z, \Im z$ と書いたが、最近はあまり使われなくなっている。)

加法の単位元は $0 = 0 + i0$, 乗法の単位元は $1 = 1 + i0$ である。

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。 $z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、逆元を求めよう。 w が z の逆元とは、

$$zw = 1$$

を満たすことをいう。 $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと、 $(x + iy)(u + iv) = 1$ は $\begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$ という連立一次方程式と同値で、これは

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

が解である。ゆえに z の逆元 w は一意的に存在して、

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

である。

問 1. このことを確かめよ。

1 行でまとめておく。

$$x + iy \neq 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

結局 $\mathbb{C}$ は可換体になる。 $\mathbb{C}$ のことを**複素数体**と呼ぶ。

複素数 z , 整数 n に対して、 z^n は実数と同じように⁵ 定義する。

問 2. i^n ($n \in \mathbb{Z}$) を求めよ。

問 3. $(1 + i)^{20}$ を求めよ。

⁵ n が自然数ならば z^n は n 個の z の積。 $z^0 = 1$ (0^0 を定義しないこともあるが、冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を用いるときは、 z^0 を変数 z の関数と考えるときは、 $z = 0$ まで込めて $z^0 = 1$ とするのが普通), n が負の整数の場合は、 $z \neq 0$ に対して $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$.

1.2 平方根

$c \in \mathbb{C}$ に対して、 $z^2 = c$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (a square root of c) と呼ぶ。

命題 1.2 任意の複素数は平方根を持つ。すなわち任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、 $z^2 = c$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ が存在する。 $c = 0$ の場合はただ一つ $z = 0$ のみ、 $c \neq 0$ の場合はちょうど二つあり、それらは互いに他の -1 倍である。実際 $c = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) とするとき、

$$z = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right) & (\beta \neq 0) \\ \pm \sqrt{\alpha} & (\beta = 0 \text{ かつ } \alpha \geq 0) \\ \pm i \sqrt{-\alpha} & (\beta = 0 \text{ かつ } \alpha < 0). \end{cases}$$

証明 (方針) $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$ の実部虚部を比較して連立方程式を導き、それを解けば良い。 ■

「実際」以降の式を覚えたりする必要は無い。平方根を計算する必要が生じたら、その都度 $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$ を解けば良い。

問 4. -1 の平方根を求めよ。

問 5. i の平方根を求めよ。

実数の場合は、 $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、 $c \geq 0$ であることが必要十分であり、そのとき平方根のうちで負でないものが一意的に存在し、それを $\sqrt{c}$ と表す約束であった。 $c = 0$ であれば $\sqrt{c} = 0$ 。 $c > 0$ であれば $\sqrt{c} > 0$ であり、 c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ 。任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$$

が成り立つ。

複素数の場合には、 c の 2 つある平方根のうち的一方をうまいルールで選んで、それを $\sqrt{c}$ と表すことにして、

$$\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$$

がつねに成立するようには (残念ながら) 出来ない。 $c \geq 0$ の場合は特に断りのない限り、これまで通り (中学校数学以来の) 非負の平方根を表すのが普通である、そうでない場合はケースバイケースであると考えること。

- (a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の一つを (何かのルールまたは気分を選んで) 表す
- (b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない)
- (c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す

などなど様々な場合がある⁶。例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $-\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。注意が必要である。実係数 2 次方程式の根は $a \pm ib$ という形になるので、ある意味では、どの場合も同じことになると言える (混乱が生じにくい)。

系 1.3 複素係数の 2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) は、複素数の範囲で 2 つの根を持つ。それらは

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.3 順序

しかし、これらの四則演算と整合する順序関係 (実数では、 $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ とか、 $a > b$ かつ $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ という性質が成り立った) は存在しないことが知られている。一方で以下に見るように距離は導入できる。

四則	順序	距離
○ (可換体になる)	× (順序体にならない)	○ ($d(z, w) = z - w $)

表 1: 複素数体の成績表 (?)

1.4 共役複素数

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 $x - iy$ を z の **共役複素数** (the complex conjugate of z) と呼び、 $\bar{z}$ で表す。

任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下が成立する。

共役複素数の共役複素数は元の複素数である。

$$\overline{\bar{z}} = z.$$

和、差、積、商の共役複素数は、共役複素数の和、差、積、商である。

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$$

$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w},$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \bar{w},$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \bar{z} / \bar{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

⁶ちなみに日本の高校数学では、 $c \geq 0$ ならば c の平方根のうち 0 以上のもの (中学で教わった $\sqrt{c}$)、 $c < 0$ ならば $\sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ と定義する。例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ 。以上は c が実数に限定したルールで、 c が虚数である場合については何も定義していないことに注意しよう。 c が負数の場合に $\sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするルールは、大学では忘れて下さい。

問 6. これらを確かめよ。

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とするとき、 $\bar{z} = x - iy$ であるから、

$$(1) \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

言い換えると

$$(2) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

これから例えば

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \bar{\bar{z}} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

例 1.4 公式 (2) は、 $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) の場合がとびきり重要で、

$$\cos \theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \operatorname{Im} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

実はより一般に、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ (後述する)。■

問 7. $\cos^5 \theta$ を $\cos k\theta, \sin k\theta$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) だけを使って表せ。($\cos n\theta, \sin n\theta$ は $\cos \theta, \sin \theta$ の多項式で表せる。その逆のようなことをしてみよう。)

(1) より、 x と y を使って表せるものは、 z と $\bar{z}$ を使えば表せることになる。

問 8. 複素平面内の任意の直線は、 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\bar{z} + \bar{a}z + \beta = 0$$

と表せることを示せ。

問 9. 複素平面内の任意の円は、 $a \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, |a|^2 - \beta < 0$ を用いて

$$z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + \beta = 0$$

と表せることを示せ。(a でなく c と書く方が気分が出るかもしれない…)

1.4.1 実係数多項式の根

次の命題は $n = 2$ の場合は、実係数 2 次方程式の根の公式から明らかであるが、 $n = 3$ のときは高校数学で時々出題される問題である。 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d は実数) が $x = \alpha + i\beta$ (α, β は実数) を解に持てば、 $x = \alpha - i\beta$ も解であることを示せ。」

命題 1.5 $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[z]$, $c \in \mathbb{C}$, $f(c) = 0$ とするとき、 $f(\bar{c}) = 0$. すなわち「実係数多項式がある複素数を根とすると、その共役複素数も根である」。

証明 a_j が実数であるから、 $\overline{a_j} = a_j$ であることに注意する。任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\overline{f(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= \overline{a_0} \overline{z^n} + \overline{a_1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \overline{z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0} \bar{z}^n + \overline{a_1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \bar{z} + \overline{a_n} \\ &= a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \bar{z} + a_n \\ &= f(\bar{z})\end{aligned}$$

であるから、 $\overline{f(c)} = f(\bar{c})$. ゆえに $f(c) = 0$ ならば $f(\bar{c}) = 0$ である。■

実係数多項式の代わりに実係数有理式 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z), Q(z) \in \mathbb{R}[z]$) でも、 $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ が成り立つ。

問 10. 上の命題は重複度まで考慮して成り立つ。つまり c が $f(z)$ の m 重根であれば $\bar{c}$ は m 重根である。このことを証明せよ。(c が $f(z)$ の m 重根であるということをどうやって式で表すか、という問題である。見たことはあるはずで、思い出せば解決するはず。)

1.5 絶対値

絶対値を導入しよう。

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 z の**絶対値** (the absolute value of z , the modulus of z , the magnitude of z) $|z|$ を

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定める。これは $\mathbb{R}^2$ の要素 (x, y) の長さ (ノルム) である。なお、

$$z\bar{z} = |z|^2$$

が成り立つ。

余談 1.6 自分で書くときは “absolute value” を使えば良いだろう。“the maximum modulus principle” のように、modulus を用いた用語があるので、modulus の意味は覚えておくのが良い。

magnitude という言葉は地震で有名だが、「大きさ」とでも訳すべき単語である。数についてこの言葉が使われる場合は、絶対値を意味する。関数論のテキストでは稀 (というか、実は

見たことがない) であるが…余談の余談になるが、シミュレーション・ソフトの MATLAB の日本語マニュアルでは、複素数について (絶対値を意味する) magnitude を無視するというトンドモ訳 (結果として意味の分からない説明になってしまっている) があつた。■

余談 1.7 $z\bar{z} = |z|^2$ から、 $z \neq 0$ のとき $z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$. これは $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ を表している。既に直接計算で導いてあることだが、「逆数 $\frac{1}{z}$ を求めるには、分母分子に $\bar{z}$ をかけるのか、なるほど」と納得出来るところがある。■

(i) $|z| \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow z = 0$.

(ii) $|zw| = |z| |w|$. (系として $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$.)

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

証明 $a + ib \in \mathbb{C}$ の絶対値は、 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ の長さ (ノルム) であることから、(i) と (iii) は改めて証明する必要がない。

(ii) を示す。 $z = a + ib$, $w = c + id$ とするとき、 $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ であるから、

$$\begin{aligned} |zw| &= |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \\ &= |z| |w|. \end{aligned}$$

(別証明) 共役複素数の性質 $z\bar{z} = |z|^2$ を示しておいたので

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2 |w|^2$$

の両辺の $\sqrt{\quad}$ を取って $|zw| = |z| |w|$. ■

共役複素数の絶対値は元の複素数の絶対値である。

$$|\bar{z}| = |z|$$

1.6 複素平面

(これは授業では、 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ を書いて、平面の図を描いて、ぺらぺら、くらいか。あまり重々しく話さない方がよい。)

平面 P 上で、原点 O と直交する座標軸 x 軸、 y 軸を取り、単位の長さを決めると、 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ の各要素 (a, b) に対して、 x 座標が a , y 座標が b である点を対応させることで、全単射 $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow P$ が得られる。 P と $\mathbb{R}^2$ の間に 1 対 1 の対応が定まる。このとき P を**座標平面**と呼ぶのであつた。

$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ と $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ の間には、自然な全単射 $\varphi: \mathbb{C} \ni x + yi \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ が存在する。

$\psi \circ \varphi: \mathbb{C} \rightarrow P$ により、 P と $\mathbb{C}$ の間に 1 対 1 の対応が定まる。このとき P を**複素平面** (the complex plane) あるいは**ガウス平面** (the Gauss plane), **アルガン平面** (the Argand plane, 特に特定の複素数を図示したものは an Argand diagram) と呼ぶ。

$\mathbb{R}^2$ の場合に x 軸, y 軸と呼んだ軸を、**実軸** (real axis), **虚軸** (imaginary axis) と呼ぶ。

1.7 複素指数関数の先取り

このすぐ後の極形式のため。

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 e^z ($\exp z$ とも書く) を定めよう。後で冪級数を用いて定義し直すつもりであるが、とりあえず

$$e^z = e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y).$$

特に

- $z = x \in \mathbb{R}$ のとき $e^z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x (1 + i0) = e^x = e^z$. ゆえに実指数関数の拡張になっている。
- 指数法則 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i (\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

問 11. $e^0 = 1$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, $x, y \in \mathbb{R}$ のとき $|e^{x+iy}| = e^x$ であることを示せ。

$e^{2\pi i} = 1$. さらに任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $e^{2\pi k i} = 1$ であるが、 $e^z = 1$ となる z はこれらに限ることが示せる。

問 12. 次のことを示せ。

- (1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $e^z = 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi i$.
- (2) 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、 $e^z = e^w \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) w = z + 2k\pi i$.

当面 $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) のときに良く使う。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

複素平面に $e^{i\theta}$ を図示して、頭に焼き付けること。

問 13. $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ のときに $e^{i\theta}$ の値を求めよ。

任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ。

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

問 14. これを確認せよ。

注意: 過去の経験によると、せっかく $e^{i\theta}$ を導入しても、 $\cos, \sin$ に直して、面倒な計算をする人が多い。なるべく複素指数関数を使うように心がけて、早く慣れるように。

1.8 極形式, 偏角

(授業では図をうまく利用して時間を節約する。説明を書いては見たけれど、半分以上は実は極座標の説明をしているようなもので、極座標が身についている人には必要が無い。)

極形式とは、(乱暴に言い切ると) 要するに極座標のことである。ていねいに言うと、複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) を、 (x, y) の極座標 r, θ で表す式のことを極形式という。

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、

$$(3) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

を満たす r, θ が存在するとき、(3) を z の**極形式** (the polar form of z) という。

余談 1.8 「 $-1 + \sqrt{3}i$ の極形式を求めよ」という問題に対して、

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

とか、「 $z = re^{i\theta}$ とするとき $\bar{z}$ の極形式を求めよ」に対して

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

とか答える人が結構いて、「困ったなあ」と思ったことでした。偏角がきちんと分かっていない ($r(\cos \theta + i \sin \theta)$ という形にもなっていない)。そういう間違いをされる位ならば、極形式とは

$$re^{i\theta}$$

という形の式のことである ($r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のことではない)、とでもするのだろうか? それは教条主義的で嫌なのだけれど… ■

$z = 0$ ならば、 $r = 0, \theta = 0$ (θ は何でも良い) とすれば良い。(もっとも、そういう場合は θ が不定なので、極座標や極形式を考えない、というのが普通かもしれない)。

以下は $z \neq 0$ の場合を考える。

$r = |z|$ である。実際、(3) の絶対値を取ると

$$|z| = |r| |e^{i\theta}| = r \cdot 1 = r.$$

$z \neq 0$ であるから $r > 0$ に注意して、(3) の両辺を r で割ると

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \cos \theta + i \sin \theta = \frac{z}{r} \left(= \frac{x}{r} + i \frac{y}{r} \right) \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

$(x/r)^2 + (y/r)^2 = (x^2 + y^2)/r^2 = r^2/r^2 = 1$ であるから、 $(x/r, y/r)$ は単位円上にあるので、これを満たす θ が存在する (図を描くこと)。

例 1.9 $z = -1 - i$ とする。 $z = x + iy = r^{i\theta}$ ($x, y \in \mathbb{R}, r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$) とするとき、 $x = -1, y = -1$ である。

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

ゆえに

$$\cos \theta + i \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

これは $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ということなので、 $[0, 2\pi)$ で選ぶなら $\theta = \frac{5}{4}\pi$. $(-\pi, \pi]$ で選ぶなら $\theta = -\frac{3}{4}\pi$. これから z の極形式が二通り得られる:

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}.$$

θ の選び方はこれ以外にもたくさんある。

$$\theta = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \blacksquare$$

問 15. $z = -1 + \sqrt{3}i, i, -1$ の極形式を求めよ。

問 16. $z = re^{i\theta}$ とするとき、 $\bar{z}$ と $\frac{1}{z}$ (ただし $z \neq 0$ とする) の極形式を求め、図示せよ。

$z \neq 0$ とする。(3) を満たす θ のことを z の偏角と呼び、 $\arg z$ と表す。
たくさんあるのでどれ? きちんと考えてみよう。

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

が成り立つとき、 θ は z の**偏角** (an argument of z) であるという。(上で見たように) z の偏角は必ず存在する。その一つを θ_0 とするとき、

$$z \text{ の偏角全体} = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(何らかのルールを決めて) 1 つ θ を選び、 $\arg z$ と表す。 $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲に取ったとき、 $\text{Arg } z$ と表し、 z の偏角の**主値**という。($\theta \in [0, 2\pi)$ と取る場合もある。)

例 1.10 $\text{Arg}(-1 - i) = -\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi = \arg(-1 - i).$ ■

まとめ $z \neq 0$ ならば、極形式 $z = re^{i\theta}$ の r, θ は、

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z.$$

言い換えると

$$z = |z| e^{i \arg z}, \quad \text{特に} \quad z = |z| e^{i \text{Arg } z}.$$

極形式の積は重要である。自然と極形式が得られるが、絶対値と偏角がどう求められるかに注目しよう。

命題 1.11 (極形式の積)

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

指数関数を用いて表すと $r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

証明 複素指数関数の指数法則の証明とほぼ同じで加法定理を用いる (そのせいで指数関数を用いて表すと当たり前に見える — それは気のせいだけ)。■

系 1.12 (de Moivre の定理) $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ とするとき、

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

(実は $n \in \mathbb{Z}$ でも成り立つ。これも指数関数で書くと、 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ で、当たり前に見える。)

問 17. $\cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos \theta, \sin \theta$ の多項式の形に表せ。

問 18. $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ とするとき $(e^z)^n = e^{nz}$ であることを示せ。

(**注意** 実関数のときは、 $(e^x)^y = e^{xy}$ (あるいはもっと一般に a を正の数として $(a^x)^y = a^{xy}$) という指数法則も使ったが、複素関数に対しては、複素数の冪乗をまだ定義していないこともあって、そういう公式を考えることが出来ない。後で分かるように、複素数の冪乗は多価になる場合があり、安心して使えるのは整数乗の場合だけである。その場合の公式を証明することは現時点でも可能なのでやってみよう、ということである。)

証明

(a) $n \in \mathbb{N}$ の場合は帰納法を用いる。 $n = 1$ のときは自明で、 $n = k$ のとき成り立つとすると、 $a^{k+1} = a^k a$ と帰納法の仮定と命題 1.11 から

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos k\theta + i \sin k\theta) (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) = \cos((k+1)\theta) + i \sin((k+1)\theta). \end{aligned}$$

ゆえに $n = k+1$ のとき成り立つ。帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ。

(b) $n = 0$ 場合は

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1 = \cos(0 \cdot \theta) + i \sin(0 \cdot \theta) = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

(c) $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ のとき、 $m := -n$ とおくと、 $m \in \mathbb{N}$ で、

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} = ((\cos \theta + i \sin \theta)^{-1})^m = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^m \\ &= \cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta) = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \blacksquare \end{aligned}$$

$z_1, z_2 \neq 0$ とするとき、

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i \arg z_1} |z_2| e^{i \arg z_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

ゆえに $\arg z_1 + \arg z_2$ は $z_1 z_2$ の偏角である。

(Q) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ が成り立つか？

$z_1 = i = e^{i\pi/2}$, $z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = e^{i3\pi/4}$ のとき、

$$z_1 z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = e^{i5\pi/4} = e^{-i3\pi/4}.$$

$\arg(z_1 z_2)$ として $\frac{5}{4}\pi$ を選べば、 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ が成立するが、 $-\frac{3}{4}\pi$ を選べば成立しない。 2π の違いを無視すれば成立する。その正確な意味は

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

ということ。つまり同値関係 $(\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$ を用いると、すっきりするが、ここではうるさいことは言わないようにする。

1.9 複素数の演算の図示

複素数の様々な演算の絵解きをする。

まず $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の復習 ($\mathbb{R}^2$ ならば座標 (x, y) で定まる点)

絶対値 ($|z|$ は z の原点からの距離)、偏角 ($\arg z$ は一意的には定まらない。 2π の整数倍の差を無視して定まる。)、極形式 $z = re^{i\theta}$ (再び), e^{x+iy} の極形式も描いて、 $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ を注意すべきかもしれない。

共役複素数。 z と $\bar{z}$ は実軸に関して対称の位置にある。特に $z = re^{i\theta}$ の場合、 $\bar{z} = re^{-i\theta}$ (原点からの距離は変わらず、偏角が -1 倍になる)。

和と積。和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ の元、ベクトルと同じである。)

積も計算はすでにしてある (極形式の積)。 $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ より

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

$e^{i\theta}$ の掛け算は回転 ($e^{i\theta} z = e^{i\theta} \cdot re^{i\theta'} = re^{i(\theta' + \theta)}$ であるから)。特に $i = e^{i\pi/2}$ をかけると $\pi/2$ の回転。 $-1 = e^{i\pi}$ をかけると π の回転。— 一般には $\cos, \sin$ を知っていれば…

$$e^{i\theta} z = (\cos \theta + i \sin \theta) (x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i (x \sin \theta + y \cos \theta).$$

言い換えると、 $w = e^{i\theta} z$, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

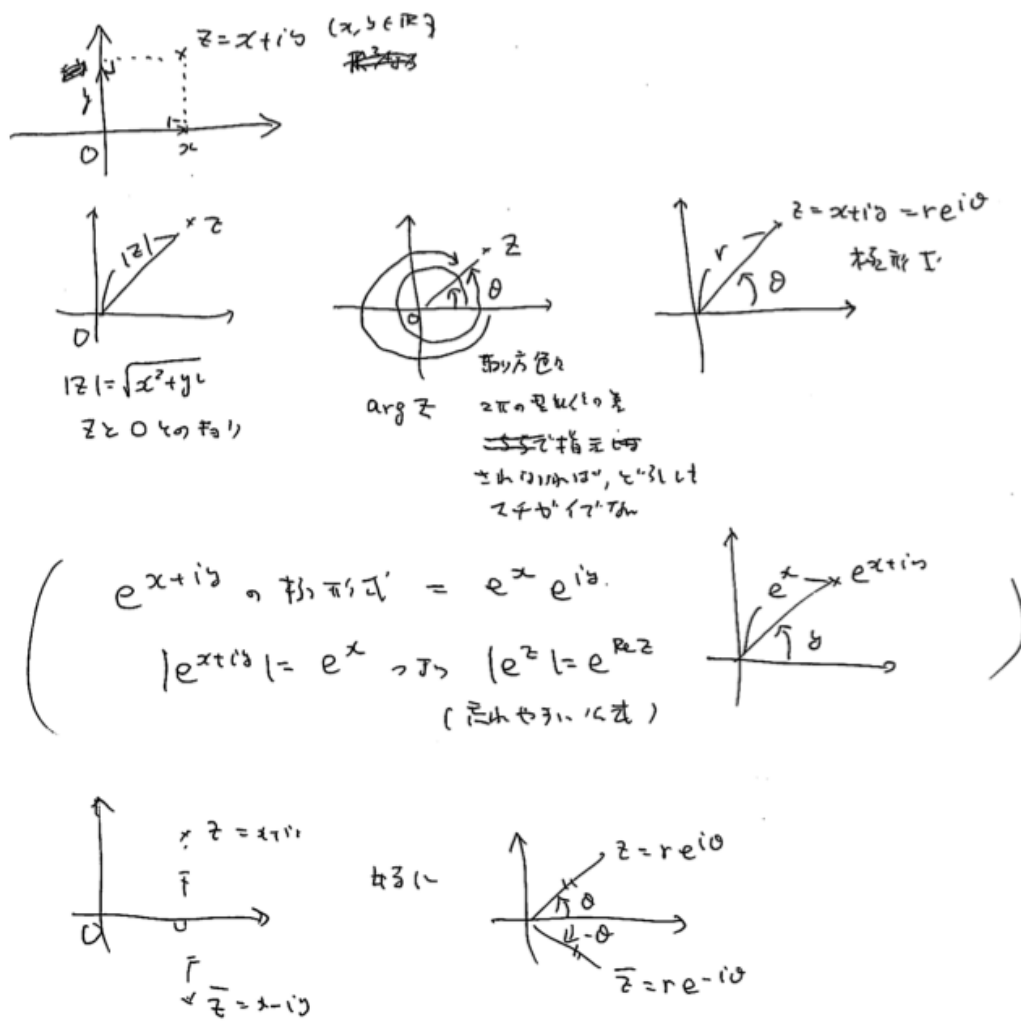


図 2: そのうち TikZ で描き直し

1.10 n 乗根

2 以上の自然数 n と、複素数 c に対して、 $z^n = c$ を満たす複素数 z のことを c の n 乗根と呼ぶ。

$z^n = c$ という形の方程式を **2 項方程式** (binomial equation) という (名前を覚える必要はない)。

c の 2 乗根とは c の平方根のことである。 c の 3 乗根のことを c の立方根とも呼ぶ。

極形式を用いると、 n 乗根が簡単に求められる。

命題 1.13 (0 でない複素数の n 乗根) n を 2 以上の自然数とする。 $c = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$) の相異なる n 乗根は

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である (ちょうど n 個存在する)。それらは複素平面で原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周上の n 等分点である (順に線分で結ぶと正 n 角形が描ける、ただし $n \geq 3$ の場合)。

($\sqrt[n]{\rho}$ は $r^n = \rho, r \geq 0$ を満たす数 r (一意的に存在する) を表す。)

証明 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z^n = c$ は次と同値である。

$$r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

両辺の絶対値を考えると $r^n = \rho$. ゆえに $r = \sqrt[n]{\rho}$. これを上の方方程式に代入すると

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

これは次と同値である。

$$n\theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}.$$

すなわち

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad n\theta - \varphi = k \cdot 2\pi.$$

ゆえに

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

ゆえに c の n 乗根は

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

一見して無限個あるようだが、 k が $\pm n$ 変化しても値は変わらないので (つまり k に関して周期 n)、 $k = 0, 1, \dots, n-1$ だけ取ればすべてを尽くし、また重複もない。すなわち $z^n = c$ の解は

$$(4) \quad z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \blacksquare$$

系 1.14 (1 の n 乗根) n を 2 以上の自然数とする。1 の相異なる n 乗根は

$$e^{i\frac{2\pi}{n}k} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である (ちょうど n 個存在する)。 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと、 ω^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) と表すことが出来る。

証明 $\rho = 1, \varphi = 0$ とするだけである。 ■

問 19. 上の系の仮定のもとで

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{n-1})$$

が成り立つことを示せ。

例 1.15 (1, -1 の n 乗根) n が小さい場合に 1 の n 乗根、-1 の n 乗根を求めてみよう。

- $n = 2$ のとき。 $z^2 = 1$ の解は $e^{i\frac{2\pi}{2}k} = e^{ik\pi}$ ($k = 0, 1$) であるから $e^0 = 1, e^{i\pi} = -1$. 実際、

$$z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1).$$

- $z^2 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ ($k = 0, 1$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. 実際、

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i).$$

- $n = 3$ のとき。 $z^3 = 1$ の解は $e^{i\frac{2\pi}{3}k}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 実際、

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1) \left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right).$$

- $z^3 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ であるから、 $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1, e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. 実際

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$$

で右辺の第 2 因数の根は $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

- $n = 4$ のとき。 $z^4 = 1$ の解は $e^{i\frac{2\pi}{4}k} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. 実際

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

- $z^4 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ であるから、 $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

$$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i).$$

$z^2 = -i, z^2 = i$ を解けなくもないが、

$$z^4 + 1 = z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$$

とすれば、2つの2次方程式の根として

$$\frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$$

- $n = 5$ のとき。 $z^5 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 + X - 1 = 0$ で、これは

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

と解ける。

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

から

$$\begin{aligned} 2z^2 + (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0, \quad 2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0. \\ z = \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(\sqrt{5} + 1) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned}$$

$z^5 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\frac{5\pi}{5}} = -1, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 - X - 1 = 0$ で、これは

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

と解ける。

$$z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

から

$$2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0, \quad 2z^2 - (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0.$$

$$z = \frac{(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

- $n = 6$ のとき。これは宿題にするので、ここには書かない。
- $n = 7$ のとき。 $z^7 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}}, e^{i\frac{12\pi}{7}}$. $z^7 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$. これらは $(1, -1$ を除いて)、 $\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

以上は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、 n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し、 $n = 17 = F_2$ のときに作図法を示した。作図可能な n を小さい方から示すと $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$.

フェルマー素数とは、素数であるようなフェルマー数 $F_m = 2^{2^m} + 1$ のことである。 $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ はいずれもフェルマー素数であるが、 F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来る (従って素数ではない) ことを Euler が発見した)。■

問 20. $c \in \mathbb{C}$ の 3 乗根は、 $c = \rho e^{i\varphi}$ として、

$$\sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{3}}, \quad \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3})}, \quad \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3})}$$

と求めることが出来るわけだが、 $c = \alpha + i\beta, z = x + iy$ として

$$(x + iy)^3 = \alpha + i\beta$$

を解いて求めることも考えられる (平方根の求め方の真似)。どうなるか考察せよ。

問 21. 一般に c の 4 乗根は c の平方根の平方根として求められる (なぜか?) ことを用いて、 $-1, i$ の 4 乗根をすべて求めよ。

1.11 $\mathbb{C}$ のちゃんとした定義

私のお勧めは Hamilton の方法である (体のいろは以外の予備知識が必要無く、明解である)。

Hamilton による $\mathbb{C}$ の定義 $\mathbb{R}^2$ については、加法、スカラー倍、内積、ノルムなどを定義してあるが、そこに次のようにあらたに乗法を定義する。

$$(5) \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

命題 1.16 $\mathbb{R}^2$ にもとからあった加法

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

と、(5) で定まる乗法によって、 $\mathbb{R}^2$ は可換体となる。加法の単位元は $(0, 0)$ 、乗法の単位元は $(1, 0)$ で、 $(x, y) \neq (0, 0)$ の乗法に関する逆元 $(x, y)^{-1}$ は

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

証明 体の公理が成り立つことを確認するだけ。 ■

それ以外のやり方についても簡単に紹介しておく。

行列を用いて定義 行列を知っていれば

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

の全体として定義することも出来る。1 と i に対応するのは

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、確かに $J^2 = -I$ が成り立つ。また $e^{i\theta}$ に対応するのは、回転を表す行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ である。

多項式環の剰余環として定義 実係数多項式の作る可換環 $\mathbb{R}[x]$ を、その極大イデアルである $(x^2 + 1)$ で割って作った剰余環 $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ として定義する、というやり方がある (極大イデアルによる剰余環は体である、というのは基本的な定理である)。高等学校流の定義の厳密化と言えなくもないが、このやり方が一番準備が多く必要 (だから難しめ) というのは皮肉である。環やイデアルについて学ぶ機会があれば、ぜひ思い出してみたい。

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

ここは本当に簡単に済ませた方が良いでしょう。 $\mathbb{R}^2$ と同じとだけ言う。数学解析で学んだことは使うが、定義定理の意味が分かる程度の用語の復習はすると宣言する。完備性 (「数学解析」では時間が足りなくなってカットした) は級数の議論をするところでやる。

$z \in \mathbb{C}$ に対して、 $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$, $\mathbf{z} := (x, y)$ とおくと、 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. 逆に $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $z := x + iy$ とおくと、 $z \in \mathbb{C}$ (つまり逆変換である). このとき

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{z}|$$

である。これから、2点間の距離についても対応していることが分かる。実際

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}),$$

$$\mathbf{z}_1 := (x_1, y_1), \quad \mathbf{z}_2 := (x_2, y_2)$$

とすると

$$|z_1 - z_2| = |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|.$$

$\mathbb{C}$ 内の数列の極限や、 $\mathbb{C}$ の部分集合を定義域とする関数の極限・連続性は、 $\mathbb{C}$ における距離を基礎に定義されるので、 $\mathbb{R}^2$ における定理の対応物が得られることになる。例えば Bolzano-Weierstrass の定理、Weierstrass の最大値定理などが $\mathbb{C}$ でも成り立つ。

$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**複素数列**であるとは、各自然数 n に対して、複素数 z_n が定まっていること、言い換えると $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{C}$ が写像であることをいう。

複素数列 $\{z_n\}$ が複素数 c に収束するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0$$

が成り立つことをいう。これは ε - δ 論法で書けば、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |z_n - c| < \varepsilon$$

が成り立つことを意味する。

z_n, c を

$$x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_n := \operatorname{Im} z_n, \quad \mathbf{z}_n := (x_n, y_n), \quad a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \mathbf{c} := (a, b)$$

で定めるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_n - \mathbf{c}| = 0$$

が成り立つことと同値であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

が成り立つこととも同値である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \right).$$

2 複素関数とその極限、正則性

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を定義域とする、複素数値の関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ のことを**複素関数**と呼ぶ。

2.1 複素関数の実部・虚部

複素関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (Ω は $\mathbb{C}$ の部分集合) が与えられたとき、しばしば、

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$$

で定まる実関数 u, v を考えることがある。以下では簡単のため、 u と v をそれぞれ f の実部、虚部と呼ぶことにする。

u, v の定義域は

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}$$

である。すなわち $u, v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である。 $(\Omega$ と $\tilde{\Omega}$ は、平面図形としては“同じ”ものであると考えて良いだろう。あるいは $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視したとき、 $\Omega = \tilde{\Omega}$.)

例 2.1 (1) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ の場合、 $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ より $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

(2) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ の場合、 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ より $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

(3) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. ($e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$) の場合、 $f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ より $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. ■

問 22. 以下の各 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の実部・虚部 u, v を求めよ。

(1) $f(z) = z^3$ ($z \in \mathbb{C}$) (2) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$) (3) $f(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ ($z \in \mathbb{C}$)
(ヒントにならないが、(3) で実は $f(z) = \cos z$ であることが後で分かり、結果も重要である。)

2.2 よく使う記号・言葉

$c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して、 c を中心とする半径 r の**開円盤** $D(c; r)$ を次式で定める:

$$D(c; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して、 Ω の**閉包** $\bar{\Omega}$ を次式で定める:

$$\bar{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ とするとき、 Ω が $\mathbb{C}$ の**開集合** (an open subset of $\mathbb{C}$) であるとは、

$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

— $\mathbb{R}^n$ の場合と同じようなものがあった… —

$a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ に対して、中心 a , 半径 r の開球は次式で定義された:

$$B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 Ω の閉包は次式で定義された:

$$\overline{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、 Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、次の条件が成り立つことをいう:

$$(\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

2.3 極限と連続性

(ここは簡単に流す。)

複素関数の収束 (極限)、連続性は実関数と同じように定義され、実は実部と虚部の収束、連続性と同値である。

定義 2.2 (複素関数の極限と連続性) $\Omega \subset \mathbb{C}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

(1) $c \in \overline{\Omega}, \gamma \in \mathbb{C}$ とする。 $z \rightarrow c$ のとき $f(z)$ が γ に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma$ と表す。

(2) $c \in \Omega$ とする。 f が c で連続であるとは、

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。

(3) f が Ω で連続であるとは、 Ω の任意の点 z で f が連続であることをいう。

u と v を組にしてベクトル値関数として考えると良い場合がある。以下しばらくそれを f と書く。すなわち $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ で、

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

である。 $z = (x, y)$ とすると、

$$f(z) = f(x, y) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

$c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $\gamma = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とするとき

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow c} \mathbf{f}(z) = \boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x,y) = \alpha \quad \text{かつ} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x,y) = \beta.$$

これから

$$f \text{ が } c \text{ で連続} \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ が } \mathbf{c} \text{ で連続} \Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ が } \mathbf{c} = (a, b)^T \text{ で連続.}$$

さらに

$$f \text{ が } \Omega \text{ で連続} \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ が } \tilde{\Omega} \text{ で連続} \Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ が } \tilde{\Omega} \text{ で連続.}$$

連続性だけだと、わざわざ複素関数を持ち出す理由がほとんどない、とも言える。

次の命題は、実関数のときと同様に証明することも出来るし、多変数ベクトル値関数 $\mathbf{f}$ について成り立つ (「数学解析」で証明済み) ことからすぐ得られる。

命題 2.3 (複素関数の和・差・積・商の極限) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \bar{\Omega}$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が $z \rightarrow c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) + \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) - \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow c} f(z)}{\lim_{z \rightarrow c} g(z)}.$$

証明 (方針のみ) 数学解析の講義ノート (桂田 [5]) には、実関数の場合の命題 (命題 3.7) を書いてある。その ε - δ 論法を用いた証明と同様にして証明することも出来る。一方、対応する実 2 変数関数を考え、多変数関数の極限に関する命題に帰着することも出来る。後者を積の場合に少し説明しておく。 $f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、 $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、 u_3, v_3 は u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積を取って組み立てられていることに注意すれば良い。■

系 2.4 (複素連続関数の和・差・積・商の連続性) 連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし分母は 0 にならない点に限定して考える) は連続である。

多項式関数、有理関数の連続性についても実関数の場合と同様である。

任意の複素係数多項式 $p(z)$ に対して、 $p(z)$ で定められる関数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = p(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) は $\mathbb{C}$ 全体で連続である。実際、定数関数 $f_c(z) = c$, 恒等写像 $f_{\text{id}}(z) = z$ が連続であることはすぐ分かるので、系 2.4 から、 f の連続性は直ちに得られる。通常は f のことを単に p と書くことが多い。

問 23. f_c, f_{id} の連続性を ε - δ 論法により証明せよ。

$r(z)$ が複素係数有理式であるとき、つまり $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ となる $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ が存在するとき、

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$$

とおき、 $f(z) = r(z)$ ($z \in \Omega$) で定めた $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を、 $r(z)$ で定められる有理関数と呼ぶ。これは定義域 Ω 全体で連続である。実際、 $p(z), q(z)$ から定められる多項式関数 p, q は Ω で連続であり、 $p(z) \neq 0$ ($z \in \Omega$) であることから、 $f = \frac{q}{p}$ が連続であることが分かる。

例 2.5 $f(z) = \frac{1}{z}$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ で連続である。■

例 2.6 (指数関数 e^z の連続性) (少しギクシャクしている証明) 一般に「 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば、 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \varphi(y) \in \mathbb{R}$ も連続である。」が成り立つので、 $f_1(x, y) = e^x, f_2(x, y) = \cos y, f_3(x, y) = \sin y$ とすると、 $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である。 $f(z) = e^z$ の実部、虚部はそれぞれ f_1, f_2, f_1, f_3 であるから、 f は $\mathbb{C}$ で連続である。

後で「収束冪級数は収束円の内部で微分可能」という定理を紹介する。それと

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

を認めれば e^z が連続関数であることはすっきりと分かる。■

2.4 微分

簡単のため、 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, c \in \Omega$ とする。 f が c で**微分可能**であるとは、極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、**微分係数**と呼ぶこと、その他**導関数**などの言葉の使い方は実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、 f が z で微分可能であるとき、 f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

余談 2.7 (「正則」という言葉)

- f が1点 c で正則という言い方をすることがある。これは、 c を含むある開集合 U ($\subset \Omega$) が存在して、 $f|_U: U \rightarrow \mathbb{C}$ が正則である、と定義される。この講義ではこの言い方は使わない。
- 「正則」という語とほぼ同じ意味を持つ語として**解析的** (analytic) というのがある (これは元々は各点の近傍で収束する冪級数に展開できる、という意味であり、正則性と解析性が同値であることは、もっと後になってから証明できることである)。

- 元々は regular の訳語が正則、holomorphic の訳語が整型である (らしい)。正則と整型を比べると、正則を使うのが日本語のテキストとしては普通であるが (多分、先生方の中にも「整型、なにそれ?」という方がいらっしゃるかと想像する)、英語では holomorphic を使うのが普通である (regular を使う本は最近はあまり見かけない)。その点は注意を要する。■

例 2.8 $f(z) = \gamma$ (定数関数) とするとき、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 0 = 0.$$

すなわち $f'(z) = 0$. 特に f は $\mathbb{C}$ で正則である。

$f(z) = z$ するとき、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h) - z}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 1 = 1.$$

すなわち $f'(z) = 1$. 特に f は $\mathbb{C}$ で正則である。■

問 24. $f(z) = z^2$ は $\mathbb{C}$ で正則かつ $f'(z) = 2z$ であることを示せ。

命題 2.9 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $c \in \Omega$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ と $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は c で微分可能であるならば、 $f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned} (f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c), \\ (f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c), \\ (fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}. \end{aligned}$$

証明 実関数の場合と同様である。■

系 2.10 (1) 任意の自然数 k に対して、 $f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、 $f'(z) = kz^{k-1}$.

(2) 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(3) 0 でない任意の複素係数有理式 $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$) の定める関数 $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

問 25. 系 2.10 の (1) を証明せよ。

問 26. 合成関数の微分法を証明せよ。

問 27. 逆関数の微分法 (関数 f の逆関数 f^{-1} が存在し、 f が c で、 f^{-1} が $f(c)$ で微分可能ならば、 $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$ が成り立つ) を証明せよ。(授業では言及し忘れた。)

2.5 Cauchy-Riemann の方程式

定理 2.11 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。 f が正則関数であるためには、 f の実部 u と虚部 v が微分可能でかつ

$$(\star) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たすことが必要十分である。

($\star$) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

この定理を証明する前に、その一部「 f が正則ならば $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ 」だけをすぐに導ける方法を紹介しよう。

f が $c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) で微分可能ならば、

$$(\sharp) \quad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b))$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$ 。

(($\sharp$) を $f' = f_x = \frac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用気味であるが、要点を簡潔に捕らえているかもしれない。)

証明 f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、 h の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。

(a) $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)

$f(c+h_x) = u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \rightarrow 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) \\ &= u_x(a, b) + iv_x(a, b). \end{aligned}$$

(b) $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)

$f(c + ih_y) = u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \rightarrow 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c + ih_y) - f(c)}{ih_y} = \frac{1}{i} \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{(u(a, b + h_y) + iv(a, b + h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_y} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_y \rightarrow 0} \left(\frac{u(a, b + h_y) - u(a, b)}{h_y} + i \frac{v(a, b + h_y) - v(a, b)}{h_y} \right) \\ &= \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)) . \blacksquare \end{aligned}$$

定理の証明 f が c で微分可能であるとは、

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(c + h) - f(c)}{h} - (p + iq) \right| = 0$$

と言うことを意味する。

$h = h_x + ih_y$ ($h_x, h_y \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$(p + iq)h = (p + iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(ph_y + qh_x)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(c + h) - f(c)}{h} - (p + iq) \right| \\ &= \left| \frac{[u(a + h_x, b + h_y) + iv(a, b)] - [u(a, b) + iv(a, b)]}{h_x + ih_y} - (p + iq) \right| \\ &= \left| \frac{[u(a + h_x, b + h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)] + i[v(a + h_x, b + h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)]}{h_x + ih_y} \right| \\ &= \frac{|[u(a + h_x, b + h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)] + i[v(a + h_x, b + h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)]|}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \\ &= \left| \frac{u(a + h_x, b + h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a + h_x, b + h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f \text{ が } c \text{ で微分可能} &\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0, 0)} \frac{u(a + h_x, b + h_y) - u(a, b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0 \\ &\quad \text{かつ} \quad \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0, 0)} \frac{v(a + h_x, b + h_y) - v(a, b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u \text{ と } v \text{ は } (a, b) \text{ で微分可能で} \\ &\quad u_x(a, b) = p, u_y(a, b) = -q, v_x(a, b) = q, v_y(a, b) = p. \\ &\Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ は } (a, b) \text{ で微分可能で } u_x(a, b) = v_y(a, b), u_y(a, b) = -v_x(a, b). \blacksquare \end{aligned}$$

なお、 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくと、 $\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であるから、

$$f \text{ は } c \text{ で微分可能で } f'(c) = p + iq \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ は } (a, b) \text{ で微分可能で } \mathbf{f}'(a, b) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

(以下、授業で言い漏らしたことを補足する。)

このとき次式が成り立つ。

$$\det \mathbf{f}'(a, b) = u_x(a, b)^2 + u_y(a, b)^2 = v_x(a, b)^2 + v_y(a, b)^2 = |f'(c)|^2.$$

余談 2.12 (先走って逆関数定理) 正則関数の逆関数定理は、導関数の連続性を認めればそれほど難しくない。実際、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が正則で、 f' が連続、 $c \in \Omega$, $f'(c) = p + iq \neq 0$ とするとき、 $\mathbf{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級で、 $\det \mathbf{f}'(a, b) \neq 0$. 実関数の逆関数定理から、 $\mathbf{f}$ は $\mathbf{f}(a, b)$ の十分小さな開近傍で C^1 級の局所的な逆写像 $\mathbf{f}^{-1}$ を持ち、

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{f}(x, y)) = (\mathbf{f}'(x, y))^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}, \quad p := u_x(a, b), \quad q := u_y(a, b).$$

これから f が $f(c)$ の十分小さな開近傍で局所的な逆 f^{-1} を持ち、その f^{-1} は Cauchy-Riemann の関係式を満たすことが分かる。ゆえにそれは正則である。

従って正則関数が冪級数展開可能であるという定理を証明するまで待てば話は簡単である。現時点で証明するのは難しそうだ。■

2.5.1 正則関数が定数関数となる場合

良い機会なので「連結」、「領域」という言葉の紹介をする。

「 $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $f' = 0$ を満たすならば、 f は定数関数と言えるか？」という問の答は No である。 $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ならば、 $f(x) = 1$ ($x > 0$), $f(x) = 0$ ($x < 0$) で定まる f は定数関数でないが、 $f' = 0$ を満たす。

I が区間であれば $f' = 0$ から f が定数関数であることを導ける。多変数の場合にも同じようなことをしたければ、連結性の概念が必要になる。

$\Omega \subset \mathbb{R}^{\ell}$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}^{\ell}$) が**弧連結**とは、 Ω 内の任意の2点が Ω 内の曲線で結べることをいう。弧連結な開集合をこの講義では**領域**と呼ぶことにする。

「 Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が微分可能で、 $u' = 0$ ($u_x = u_y = 0$) を満たすならば、 u は定数に等しい。」は認めることにする。

命題 2.13 Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする。

(1) f の実部または虚部が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。

(2) $|f|$ が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。

証明 (1) で実部が定数関数の場合を証明する。 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、 $u_x = u_y = 0$. Cauchy-Riemann の方程式 (☆) が成り立つので、 $v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ であるから、 v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv = u$ は定数関数である。■

問 28. 命題 2.13 の (2) を証明せよ。

次の命題は授業では説明し忘れて後から補足することになった(ここでやっておくのが自然であった)。

命題 2.14 Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $(\forall z \in \Omega) f'(z) = 0$ が成り立つならば、 f は定数関数である。

問 29. 命題 2.14 を証明せよ。

2.5.2 正則関数と調和関数

以下に述べることは論理的にはフライングであるが、順番を守ると、おそらく、この講義では説明することが出来なくなってしまうので、あえてここで説明する。

命題 2.15 (正則関数の実部虚部は調和関数である) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とすると、 f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\})$$

を満たす。

証明 後で f が Ω 内の任意の点の十分小さな近傍で冪級数展開出来ることが証明できる。ゆえに u と v は C^∞ 級である。そのことを認めて議論する。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、 v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

$v_{xx} + v_{yy} = 0$ についても同様である。 ■

n 変数関数 $u(x_1, \dots, x_n)$ が

(#)
$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

を満たすとき、 u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (#) を **Laplace 方程式**という。

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と述べる事が出来る。実は任意の調和関数は、局所的にはある正則関数の実部になっているので、複素関数論は 2 変数の調和関数論であるとも言える。

$\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω で定義された調和関数 u に対して、(☆) を満たす v のことを u の**共役調和関数**と呼ぶ。正則関数の虚部は実部の共役調和関数であるということになる。

問 30. v が u の共役調和関数であるとき、 u は v の共役調和関数であるかどうか答えよ。

Ω が領域であれば、調和関数 u を定めたとき、 u の共役調和関数は (もし存在するならば) 定数差を除いて一意的に定まる。

問 31. このことを証明せよ。(ベクトル解析を学んでいる人には、続けて問う) v を u を用いて表示する式を求めよ。

余談 2.16 (桂田君 2?才) 正則関数の実部虚部が調和関数という命題は、筆者が学生るとき (もう 30 年以上も前のこと)、某県の教員採用試験で解かされた問題で、ちょっと思い出深い。どういう採点基準か良く判らなかった。Cauchy-Riemann 方程式は既知として使ってよいのか、 u, v が C^2 級であることは認めて良いか、とか。Cauchy-Riemann 方程式はその場で導出したが (上に紹介した $f' = f_x = \frac{1}{i} f_y$ という議論をした)、 u, v が C^2 級であることの証明は書かなかった (そのときの私には書けなかった — 実はちょっと情けない)。どちらも受験生が証明を書くことは要求していなかったのかもしれない。その辺の判断は、学習指導要領で出題範囲が定まっている大学入試とは違って、難しい。■

Cauchy-Riemann 方程式に関係が深く、応用上も意義のある話題があるけれど (2 次元の渦なし非圧縮流体の速度ポテンシャル・流れ関数とか)、今年度はまた台風休講が来そうな雰囲気なので、先を急ぐことにする (練習問題のネタにするくらいか…まあ、応用複素関数でやれば良いか)。

3 冪級数

^{べき}**冪級数** (a power series) は巾級数、べき級数とも書く。**整級数**と呼ぶこともある。

実は「正則関数=各点の近傍で冪級数で表せる複素関数」と後で分かる。

現時点で関数欠乏症なので (多項式関数、有理関数、指数関数くらいしか複素関数がない)、冪級数を使ってたくさんの関数を導入したい。

3.0 イン트로

冪級数について、少し長めの話をすることになるので、ものものしいが、イントロをつける。

冪級数とは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ (ここで z は変数、 c や a_n は与えられた定数) の形をしている級数のことをいう。

3つの事実を指摘する (1つは既知、後の2つはこれから)。

1. (微積分で教わった) $e^x, \sin x, \cos x, \log x, (1+x)^\alpha$ などなど、高校生の知っているような関数 (「場合分け無し of 式で書けるような関数」) は、ほとんどが Taylor 展開できる $(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n)$ 。つまり冪級数で表せる。— x を複素変数 z に置き換えると、複素関数バージョン (複素関数拡張) の定義が得られる。

2. (複素関数論の主結果 (我々の目標) の一つ) 正則関数は冪級数展開出来る (冪級数で表せる)。逆に収束冪級数の和は正則関数となるので

正則関数 = (収束) 冪級数で表せる関数 (解析関数という)

と言える。具体的に書くと、 Ω が $\mathbb{C}$ の開集合で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が正則とすると、(Ω が開集合なので) 任意の $c \in \Omega$ に対して $D(c; \varepsilon) \subset \Omega$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するが、実はある $\{a_n\}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (|z - c| < \varepsilon)$$

が成り立つ (驚くべき定理)。

3. 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ に対して、収束円というものがある。それは c 中心の円盤 $D(c; R)$ で、その内部であれば、冪級数は何回でも項別微分、項別積分出来る。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - c)^n, \\ \int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n dz &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - c)^n dz. \end{aligned}$$

(ここで C は $D(c; R)$ 内の任意の区分的に滑らかな曲線である。図が必要。)

3.1 $\mathbb{C}$ の完備性

完備性は微積分の段階で学ぶことも多いがこれまでサボってきた (「数学解析」でもやろうかと考えていたが、差し迫った必要性がないので後回しにして、結局漏れてしまった)。冪級数を扱うために、必須のものなので、ここで取りかかる。

定義 3.1 (Cauchy 列) $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ でも OK) 内の数列 $\{a_n\}$ が、**Cauchy 列**であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

命題 3.2 $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ でも OK) 内の任意の収束列は Cauchy 列である。

証明 $\{a_n\}$ が a に収束するとする。 ε を任意の正数とすると、 $\varepsilon/2 > 0$ 。収束の定義から、 $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。ゆえに $n \geq N, m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ゆえに $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。■

実はこの命題の逆が成り立つ。そのことを「 $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ でも OK) は完備である」という。一般に任意の Cauchy 列が収束するような距離空間は完備であるという。

定理 3.3 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ は完備である。

証明 距離空間として $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ と、 $\mathbb{C}^\ell$ は $\mathbb{R}^{2\ell}$ と同じなので、 $\mathbb{R}^\ell$ について証明すれば良い。

$\{x_n\}$ を $\mathbb{R}^\ell$ の Cauchy 列とする。これが収束すること、言い換えると極限が存在することを示すのが目標である。

$\{x_n\}$ が有界であることはすぐに分かる (練習問題とする)。

$\{x_n\}$ が有界であるので、Bolzano-Weierstrass の定理によって、収束部分列が存在する。すなわち $(\exists a \in \mathbb{R}^\ell) (\exists \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}: \{x_n\} \text{ の部分列}) \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ 。

ε を任意の正数とする。 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であるから、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) (\forall m \in \mathbb{N}: m \geq N)$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$k \geq N$ を満たす任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $n_k \geq k \geq N$ であるから、(m のところに n_k が代入できて)

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

$k \rightarrow \infty$ とすると

$$|x_n - a| \leq \varepsilon.$$

これは $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ であることを示している。ゆえに $\{x_n\}$ は収束列である。■

問 32. Cauchy 列は有界であることを示せ。

問 33. $\mathbb{R}^\ell$ の点列 $\{x_n\}$, $a, c \in \mathbb{R}^\ell$, $r > 0$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $(\forall n \in \mathbb{N}) |x_n - c| < r$ を満たしているとき、 $|a - c| \leq r$ が成り立つことを示せ。

(解説: 数列であれば $|x_n - c| < r$ は $-c - r < x_n < c + r$ と同値なので、「数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq y_n$ を満たすならば $a \leq b$ 」という定理から $-c - r \leq a \leq c + r$ が導けるが、点列の場合はどうすれば良いか、という問題である。)

3.2 級数の収束判定

(まだ工事中。もう少しすっきり読み易くしたい。)

級数が与えられたとき、それが収束することを証明する必要がしばしば生じる。

入門段階の複素関数論では、次の2つの定理があれば、90% 程度は処理可能である。両者は良く似ていて、覚えるときには一つの定理にまとめてしまうことも可能ではある。それで並べて見せることにする。

定理 3.4 (Weierstrass の M-test (M 判定法)) (複素数値を取る) 関数項級数 $\sum_n a_n(z)$ ($z \in K$) に対して、次の 2 条件を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、 $\sum_n a_n(z)$ は K で一様に絶対収束する。

- (i) $(\forall n) (\forall z \in K) |a_n(z)| \leq b_n$.
- (ii) $\sum_n b_n$ は収束する。

定理 3.5 (優級数の定理) 複素数の級数 $\sum_n a_n$ に対して、次の 2 条件を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、 $\sum_n a_n$ は絶対収束する。

- (i) $(\forall n) |a_n| \leq b_n$.
- (ii) $\sum_n b_n$ は収束する。

この項では、定理 3.5 のみ証明する。まず定理に現れる「絶対収束」という言葉を定義しよう。

定義 3.6 (絶対収束) $\sum_n |a_n|$ が収束するとき、 $\sum_n a_n$ は**絶対収束する**と言う。

次の命題が基本的である。証明は無理に覚えなくても良いが、 $\mathbb{C}$ が完備であることをどのように使っているかを読み取ると良い (Cauchy 列、完備性が自然に会得できるかも)。

命題 3.7 (絶対収束級数は収束する) 任意の複素級数は、絶対収束するならば収束する。

証明 $\sum_n a_n$ が絶対収束するとする。

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad S_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$$

とおく。仮定から $\{S_n\}$ は収束列であるから、命題 3.2 によって Cauchy 列である。
 $n, m \in \mathbb{N}$ とする。 $n > m$ の場合は

—— 今日の変形はこれ! ——

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_k| = S_n - S_m.$$

同様に $n < m$ の場合は $|s_n - s_m| < S_m - S_n$ が得られるので、一般に

$$|s_n - s_m| \leq |S_n - S_m|$$

が成り立つ。ゆえに $\{s_n\}$ は Cauchy 列である。定理 3.3 より $\{s_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_n a_n$ は収束する。■

絶対収束はしないが、収束はする級数は、**条件収束**するという。条件収束する級数には例えば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ などがある。

問 34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であることを示せ。

問 35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の部分和の作る数列を $\{s_n\}$ とするとき、 $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $\{s_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が、それぞれ上に有界な単調増加数列、下に有界な単調減少数列であることを確かめ、共通の極限に収束することを示せ。

この2つの問に解答すれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ が条件収束することが証明できたことになる。

後で Abel の定理という定理を紹介するときに、この級数についてまとめて解説する予定である。実は極限は $\log 2$ になることが分かる。

絶対収束は各項の大きささえ十分小さければ収束ということで、大きさの比較の話に持ち込めて考えやすい。優級数の定理はそれが分かり易い形に現れている。

早速、優級数の定理の証明にとりかかる。優級数の定理は、定理 3.7 の一般化のようなもので、証明も上の定理と良く似ている。

優級数の定理の証明 $S_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$, $T_n := \sum_{k=1}^n b_k$ とおく。仮定から $\{T_n\}$ は収束列であるから、命題 3.2 によって Cauchy 列である。

$n, m \in \mathbb{N}$ とする。 $n > m$ の場合は

$$|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = T_n - T_m.$$

同様に $n < m$ の場合は $|S_n - S_m| \leq T_m - T_n$ が成り立つので、一般に

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|.$$

これから $\{S_n\}$ は Cauchy 列であるから、定理 3.3 より $\{S_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_n a_n$ は絶対収束する。■

優級数の定理を用いるには、与えられた $\sum_n a_n$ に対して、適当な収束する級数 $\sum_n b_n$ を見つけることが必要になる。

$\{b_n\}$ としては、

$$b_n = Mr^n \quad (\text{ここで } 0 \leq r < 1)$$

や

$$b_n = \frac{M}{n^\alpha} \quad (\text{ここで } \alpha > 1)$$

などが良く使われる。冪級数の場合は前者 (等比級数) の使用頻度が高い。

次の定理も知っておくと良い (というか、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ の収束を示すのにぴったり⁷⁾。

命題 3.8 (部分和が上に有界な正項級数は収束する) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が以下の 2 条件を満たすならば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。

(i) $(\forall n \in \mathbb{N}) b_n \geq 0$.

(ii) $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{k=1}^n b_k \leq M$.

(条件 (i) が成り立つとき、 $\sum_n b_n$ は**正項級数**という。優級数定理を使おうとするとき $|a_n| \leq b_n$ という条件があるので、自動的に (?) 条件 (i) が成り立つ。そこで条件 (ii) が要点となる条件ということになる。)

証明 条件 (i) より、部分和 $T_n := \sum_{k=1}^n b_k$ の作る数列 $\{T_n\}$ は単調増加数列である。条件 (ii) は $\{T_n\}$ が上に有界ということの意味しているので、「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理によって、 $\{T_n\}$ は収束する。すなわち $\sum_n b_n$ は収束する。■

例 3.9 (「画像処理とフーリエ変換」から) (唐突に別の講義で出て来たものにジャンプ) 内積空間 X の要素 f と正規直交系 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して、 $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2$$

という不等式が証明できる。このとき $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ は収束する。 $b_n = |(f, \varphi_n)|^2$, $M = \|f\|^2$

⁷結局、授業中に書くことに。例のグラフを描いて、 $n \geq 2$ ならば $\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha}$. それから $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq$

$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n \leq \frac{1}{1-\alpha}$. これ計算合っているのかな??

として命題 3.8 を適用するわけである。そして

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \|f\|^2$$

が成り立つ (これは Bessel の不等式と呼ばれる有名な不等式である)。■

3.3 冪級数の収束円

(次の命題は、授業では $c = 0$ の場合に証明を書くのが良い。中心を c とすると、案外式が複雑に見えてしまう。 $\zeta := z - c$, $\zeta_0 := z_0 - c$ とおくと、「 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ が $\zeta = \zeta_0$ で収束するならば、 $|\zeta| < |\zeta_0|$ を満たす任意の ζ に対して絶対収束する。」という命題に帰着されるので、 $c = 0$ の場合に証明すれば十分である」くらい言うておく。)

補題 3.10 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、 $|z-c| < |z_0-c|$ を満たす任意の z に対して絶対収束する。

証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_0 - c)^n = 0$ である。(一般に「収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の一般項は 0 に収束する:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。」が成り立つから。実際 $s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと、 $s_n \rightarrow s$ であるが、 $s_{n-1} \rightarrow s$ も成り立つ。ゆえに $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$.)

「収束列は有界である」から

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n(z_0 - c)^n| \leq M.$$

このとき $b_n := M \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n$ とおくと、

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n(z-c)^n| = |a_n(z_0-c)^n| \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n \leq M \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n = b_n.$$

数列 $\{b_n\}$ は公比 $|(z-c)/(z_0-c)| < 1$ の等比級数であるので収束する:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{M}{1 - |z-c|/|z_0-c|}.$$

ゆえに優級数の定理から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は絶対収束する。■

系 3.11 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_0$ で発散するならば、 $|z-c| > |z_0-c|$ を満たす任意の z に対して発散する。

証明 補題から「 $|z_1 - c| < |z_2 - c|$ のとき、 z_2 で収束すれば z_1 で収束する」が分かるが、その対偶である。 ■

定理 3.12 (冪級数の収束円の存在) 任意の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、次のいずれかが成立する。

- (i) $z = c$ 以外の任意の z で冪級数は収束しない。
- (ii) 任意の複素数 z で冪級数は収束する。
- (iii) ある正の数 ρ が存在して、 $|z - c| < \rho$ ならば冪級数は収束し、 $|z - c| > \rho$ ならば冪級数は発散する。

証明 (授業では、図を描いて流すものかもしれない。「きちんとやるには、区間縮小法に持ち込みますが、それは講義ノートを見て下さい。)

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ は収束する} \right\}$$

とおく。 $c \in A$ であることに注意する ($z = c$ を代入すると $n \geq 1$ に対して $a_n(z-c)^n = 0$)。次の3つに場合分けできる。

- (i) $A = \{c\}$. すなわち、 c 以外のすべての複素数で発散する。
- (ii) $A = \mathbb{C}$. すなわち、すべての複素数で収束する。
- (iii) (i), (ii) のいずれでもない。

(iii) の場合を考える。

(i) でないので、 $\exists z_c \in A \setminus \{c\}$. $r_0 := |z_c - c|$ とおくとき、 $|z - c| < r_0$ では収束する。

(ii) でないので、 $\exists z_d \in \mathbb{C} \setminus A$. $R_0 := |z_d - c|$ とおくとき、 $|z - c| > R_0$ では発散する。

$0 < r_0 < R_0$ である。以下、二分法を行なう。

$\rho_0 := \frac{r_0 + R_0}{2}$ とおく。

• $c + \rho_0 \in A$ であれば $|z - c| < \rho$ で級数は収束する。このとき $r_1 := \rho_0$, $R_1 := R_0$ とおく。

• $c + \rho_0 \notin A$ であれば $|z - c| > \rho$ で級数は発散する。このとき $r_1 := r_0$, $R_1 := \rho_0$ とおく。

どちらの場合も、級数は $|z - c| < r_1$ で収束し、 $|z - c| > R_1$ で発散する。また

$$r_0 \leq r_1 < R_1 \leq R_0, \quad R_1 - r_1 = \frac{R_0 - r_0}{2}$$

が成り立つ。

以下同様にして、数列 $\{r_n\}$, $\{R_n\}$ が作ると、

- $\{r_n\}$ は単調増加数列であり、 $\{R_n\}$ は単調減少数列である。

- 任意の n に対して $r_n < R_n$, $R_n - r_n = \frac{R_0 - r_0}{2^n}$.
- 任意の n に対して、級数は $|z - c| < r_n$ で収束し、 $|z - c| > R_n$ で発散する。

区間縮小法により、 $\{r_n\}$ と $\{R_n\}$ は共通の極限 ρ に収束する。

$\rho \geq r_0 > 0$ であるから $\rho > 0$.

また級数は $|z - c| < \rho$ で収束し、 $|z - c| > \rho$ で発散する。■

(i) の場合に $\rho = 0$, (ii) の場合に $\rho = \infty$ とすると、形式的に次のように一つにまとめられる。

ある ρ ($0 \leq \rho \leq \infty$) が一意的に存在し、 $|z - c| < \rho$ で収束、 $|z - c| > \rho$ で発散する。

定義 3.13 (収束半径, 収束円) ρ を冪級数の収束半径、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \rho\}$ を冪級数の収束円と呼ぶ。

例 3.14 (もっとも簡単な冪級数、等比級数) ($c = 0$, $a_n = 1$ とした) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考えよう。これは公比 z の等比級数であるから、収束・発散が具体的な計算で判る。結論だけ述べると、 $|z| < 1$ であれば収束、 $|z| \geq 1$ であれば発散する。ゆえに収束半径は 1 で、収束円は $D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. ■

問 36. 上の例で述べたこと (複素等比級数の収束条件) を確認せよ。

注意 3.15 (収束円の周上の点では) 収束円の周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = \rho\}$ 上の点 z での収束発散については何も主張していないことに注意しよう。これについてはケース・バイ・ケースとしか言いようがない。

上の例で見たように、 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については、収束半径は 1 で、 $|z| = 1$ 上のすべての点で発散する。

後で見るように

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ については、収束半径は 1 で、 $|z| = 1$ 上のすべての点で収束する。
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ については、収束半径は 1 で、 $|z| = 1$ 上の点のうち $z = 1$ では発散するが、それ以外では収束する。

この講義では、この問題には (このような単純な例を除いて) あまり深入りしないことにする。

■

$\{a_n\}$ が分かっているとき、それから ρ を計算する公式を紹介する。次の定理は、適用範囲はあまり広くないが (それでも微積の講義で現れる冪級数の多くを処理可能である)、使うのが簡単なので、身につけるべきものである。

命題 3.16 (係数比判定法, ratio test, ダ・ランベールの判定法) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、ある番号から先のすべての n に対して $a_n \neq 0$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

が存在するならば、それは冪級数の収束半径に等しい。

証明 $c = 0$ の場合に証明すれば良い。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ とおく。 $|z| < \rho$ ならば収束し、 $|z| > \rho$ ならば発散することを示す。

$|z| < \rho$ とする。 $|z| < R < \rho$ となる R を取る。 ($\rho < \infty$ ならば $R := \frac{|z| + \rho}{2}$ とおく。 $\rho = \infty$ ならば $R := |z| + 1$ とおく。) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ であるから、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N)$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > R \quad \left(\text{これは } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{R} \text{ と書き直せる} \right).$$

この条件を満たす N を 1 つ取る。 $m \geq 0$ とすると

$$|a_{N+m}z^{N+m}| = \left| a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}} z^N z^m \right| \leq |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R} \right)^m.$$

言い換えると $\forall n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \leq |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R} \right)^{n-N}.$$

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R} \right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n z^n| \leq b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{|a_N z^N|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

$|z| > \rho$ とする。 $|z| > R > \rho$ となる R を取る。 ($\rho = \infty$ のときは考えなくて良いので、 $R := \frac{|z| + \rho}{2}$ とおけば良い。) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ であるから、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N)$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < R \quad \left(\text{これは } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{1}{R} \text{ と書き直せる} \right).$$

上と同様にして (しかし不等号の向きは逆になって) $\forall n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \geq |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R} \right)^{n-N}.$$

ゆえに $a_n z^n$ は 0 に収束しないので、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。■

例 3.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径は 1 である。実際 $a_n = \frac{1}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

収束円は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

同様に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ の収束半径は 1 である。

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ($\exp z$ の Taylor 展開) の収束半径は ∞ である。実際 $a_n = \frac{1}{n!}$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

収束円は $\mathbb{C}$.

同様に $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ の収束半径は 0 である。

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ ($\cos z$ の Taylor 展開) の収束半径は ∞ である。実際 $\zeta = z^2$ とおくと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \zeta^n.$$

右辺は ζ の冪級数である。まずこの収束半径を調べる。 $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)(2n+1) = \infty.$$

収束半径が ∞ であるから、この ζ の冪級数は任意の ζ に対して収束する。するともとの級数は任意の z に対して収束することが判る。ゆえに収束半径は ∞ . 収束円は $\mathbb{C}$. ■

時々 $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ なのか $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ なのか、混乱しそうになるが、 $|a_n|$ の増大が早まるほど、収束半

径は小さくなるはず、と考えれば前者が正しいと判るであろう。あるいは $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\rho} \right)^n$ に対し

て(これは等比級数で収束条件が $|z| < \rho$ であることは明白)、収束半径が ρ という結果が出るかどうか。

与えられた冪級数の係数から収束半径を求める問題には、ある意味で決定版と言える解答がある。それが次の定理である。

命題 3.18 (Cauchy-Hadamard の公式) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とする。

$\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$ の約束のもとで、次式が成り立つ。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ は確定するので、任意の冪級数の収束半径を表す公式になっていることに注意しよう。

これを使いこなすためには、数列の上極限 $\limsup$ (付録 C.1.1(p. 168) 参照) を習得する必要があるが、それにはある程度の時間が必要になるので、この講義ではこれ以上追求しないことにする。証明は付録 ?? で与えておく。

例 3.19 例えば $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2} = z + z^4 + z^9 + \cdots$ のような級数は冪級数であり (n が平方数であるときに $a_n = 1$, そうでなければ $a_n = 0$)、収束半径が 1 であることは少し考えれば分かるが、係数比判定法の適用範囲外である。Cauchy-Hadamard の公式を使えば、収束半径が 1 であることはすぐに分かる。■

例 3.20 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ の収束半径はそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ である。その和として得られる冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) z^n$ の収束半径は $\frac{1}{3}$ である。実際

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$$

であることから、d'Alembert の公式により収束半径は $\frac{1}{3}$. ■

筆者は、2つの収束冪級数の和として得られる冪級数の収束半径は、最初の冪級数の収束半径の最小値とある時期勘違いしていたが、それは正しくない。

問 37. 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径がそれぞれ R_1, R_2 で、 $0 < R_1 < R_2 < \infty$ を満たすならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ の収束半径は R_1 であることを示せ。

問 38. 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径が両方共 R とする。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ の収束半径は R 以上であることを示せ。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ の収束半径が R より大きい例をあげよ。

3.4 関数列の一様収束

(この項では、 $\mathbb{C}$ の部分集合を定義域とする関数を主な対象とするが、より一般の場合にも成立する議論が多い。要するに**この項の話は関数論以外にも良く出て来る。**)

関数列の収束として、もっとも素朴なものは次の各点収束であろう (これで間に合えば嬉しいが、実はあまり役に立たない)。

定義 3.21 (関数列の各点収束 (単純収束)) K は空でない集合、 $f: K \rightarrow \mathbb{C}, \{f_n\}$ は K を定義域とする複素数値関数列 (各 n に対して $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ ということ) とする。 $\{f_n\}$ が f に (K 上) **各点収束** (converge pointwise) するとは、

$$(\forall x_0 \in K) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

が成り立つことをいう。

ところが各点収束はあまり扱い易くない (各点収束することから導ける命題があまりない)。

例 3.22 (連続関数列の極限が連続でない) $f_n(x) = \tan^{-1}(nx)$ ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) とする。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

とおくと、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. ($x = 0$ ならば $f_n(x) = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. $x > 0$ ならば、 $n \rightarrow \infty$ のとき $nx \rightarrow \infty$ であるから、 $\tan^{-1}(nx) \rightarrow 1$. $x < 0$ のときも同様。)

ゆえに $\{f_n\}$ は f に ($\mathbb{R}$ 上) 各点収束する。 f_n はすべて連続関数であるが、 f は不連続関数である。■

例 3.23 (魔女の帽子 (witch's hat), 項別積分出来ない例) $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x < \frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n & (\frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x \geq \frac{2}{n}) \end{cases}$$

で定めるとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

すなわち数列 $\{f_n\}$ は定数関数 $f(x) = 0$ に ($\mathbb{R}$ 上) 各点収束する。これを確かめるには (収束の定義によると)

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

を示す必要がある。

(a) $x \leq 0$ の場合: 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_n(x) = 0$ であるから、 $N = 1$ とすれば良い。

(b) $x > 0$ の場合: $N > \frac{2}{x}$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば良い⁸。

グラフを描けばすぐ分かるように、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1.$$

これは $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ とは一致しない。すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \blacksquare$$

一般に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(x) dx = \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

が成り立っているとき、 $\{f_n\}$ は K で**項別積分** (term by term integration) 出来る、項別積分可能である、という。上の例は無条件では項別積分が出来ないことを示している。

定義 3.24 (一様収束) K を空でない集合、 $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ は K を定義域とする複素数値関数列とする。 $\{f_n\}$ が f に (K 上) **一様収束する**とは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つことをいう。

K を定義域とする関数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ があるとき、関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ が (K 上) 一様収束するとは、部分和 $s_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k(x)$ の作る関数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (K 上) 一様収束すること

をいう。

⁸「数学解析」を受講した人向け: うるさく言うと、そういう N が存在することを示すのには、アルキメデスの公理を使うわけです。

(重要) 任意の $x_0 \in K$ に対して、

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)|$$

であるから、関数列が一樣収束するならば (同じ極限関数に) 各点収束するが⁹、逆は必ずしも成り立たない。上の例の関数列はどちらも各点収束しているが、一樣収束はしていない。実際、例 3.22 では、

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1,$$

例 3.23 では

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n$$

であるので、どちらも $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$ とはならない。

命題 3.25 (連続関数列の一樣収束極限は連続) $K \subset \mathbb{C}$, $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ は K 上の複素数値連続関数列とする。 $\{f_n\}$ が f に K 上一樣収束するならば、 f は K 上連続である。

証明 $x_0 \in K$ とする。任意の正数 ε に対して、 $\{f_n\}$ が f に K 上一樣収束することから、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N)$

$$\sup_{y \in K} |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は K で連続であるから、 $(\exists \delta > 0) (\forall x \in K: |x - x_0| < \delta) |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
 $x \in K$, $|x - x_0| < \delta$ であれば、

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \sup_{y \in K} |f(y) - f_N(y)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \sup_{y \in K} |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

これは f が x_0 で連続なことを示している。 ■

問 39. 例 3.22 の関数列 $\{f_n\}$ に対しては、各点収束の意味での極限 f は $x_0 = 0$ で連続ではない。命題 3.25 の証明のどこが成り立たないか、考えよ。

(冪級数に限らない関数列の) 項別積分、項別微分に関する定理もあるが¹⁰、詳しくは後述することにして、まずは冪級数の項別微分定理に向かって邁進する。

⁹従って、関数列 $\{f_n\}$ に対して、各点収束の意味での極限 f を求めておけば、 $\{f_n\}$ が一樣収束するかどうかは、 $\{f_n\}$ が f に一樣収束するかどうか、という問題になる。複数の種類の収束があるけれど、極限関数 f が複数あるわけでない、ということである。もしかすると、これが各点収束について一番大事な定理なのかもしれない。

¹⁰関数論では、後述する線積分が重要であるので、項別積分に関する定理はそのときに述べることにする。

次に紹介する Weierstrass の M-test は、便利な定理である¹¹(一様収束を証明する場合の採用率が九割近くになるのではないかと思われる)。

命題 3.26 (Weierstrass の M-test) K は空でない集合、 $\{a_n\}$ は K を定義域とする複素数値関数列とする。実数列 $\{M_n\}$ で

$$(i) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in K) |a_n(x)| \leq M_n.$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ は収束する。}$$

を満たすものが存在するならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ は K 上一様収束する。(前者が K 上一様収束することを、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ は K 上一様絶対収束するという。)

証明 $n \in \mathbb{N}, x \in K$ に対して、

$$T_n := \sum_{k=1}^n M_k, \quad S_n(x) := \sum_{k=1}^n |a_k(x)|, \quad s_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)$$

とおく。

任意の $x \in K$, 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(\#) \quad |s_n(x) - s_m(x)| \leq |S_n(x) - S_m(x)| \leq |T_n - T_m|$$

が成り立つ (いつもの式変形だから、もうさぼってもいいよね)。

仮定より、 $\{T_n\}$ は収束列であるから、Cauchy 列である。任意の $x \in K$ に対して、 $(\#)$ より、 $\{S_n(x)\}, \{s_n(x)\}$ も Cauchy 列であるから、収束列である。

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$$

とおく。 $(\#)$ で $m \rightarrow \infty$ とすると

$$|s_n(x) - s(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| \leq |T_n - T|.$$

これが任意の $x \in K$ について成り立つのだから

$$\sup_{x \in K} |s_n(x) - s(x)| \leq \sup_{x \in K} |S_n(x) - S(x)| \leq |T_n - T|.$$

¹¹暇話になるけれど、昔小説 (タイトルは忘れた) を読んでいて、主人公 (学生) が一様収束の勉強をしているというくだりがあった。難しいことを真面目に勉強しているということを言いたかったらしい。でも一様収束というのはそんなに難しいことではないと思う (時間が経って、自分の方がずれてしまったのかなあ?)。関数のグラフを描いてみればイメージは明瞭である (と思うのだけど)。実際に証明が出来るかについては、「級数の一様収束の証明なんて、結局はこれを使うしかないはずだ」くらいに割り切って、一様収束と Weierstrass の M-test をセットで覚えれば良いと思う。

$n \rightarrow \infty$ とすると、右辺は 0 に収束するから、 $\{S_n\}$ は S に、 $\{s_n\}$ は s に、 K 上一様収束する。 ■

(細かいことだが、上の証明から、一般に $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|$ が一様収束すれば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ も一様収束することが分かる。すなわち「一様絶対収束するならば一様収束する」。) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$

次の定理は有名である (定理 3.12 とセットにして覚えるべき)。

定理 3.27 (冪級数は収束円盤内の任意の閉円盤で一様絶対収束する) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とする。このとき $0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は閉円盤 $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq R\}$ 上一様絶対収束する。

証明 $c = 0$ として証明すれば十分である。

$R < \hat{r} < \rho$ なる $\hat{r}$ を取ると ($\rho < \infty$ ならば $\hat{r} = \frac{R+\rho}{2}$, $\rho = \infty$ ならば $\hat{r} = R+1$)、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $z = \hat{r}$ で収束するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \hat{r}^n = 0$ 。ゆえに $\{a_n \hat{r}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界な数列であるから、

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n \hat{r}^n|$$

とおくと $M \in \mathbb{R}$. $|z| \leq R$ に対して、

$$|a_n z^n| = |a_n \hat{r}^n| \left| \frac{z}{\hat{r}} \right|^n \leq M \left(\frac{R}{\hat{r}} \right)^n.$$

$M_n := M \left(\frac{R}{\hat{r}} \right)^n$ とおくと、 $\forall z \in K$ に対して、 $|a_n z^n| \leq M_n$, また $R < \hat{r}$ であるから、 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$

は収束する。Weierstrass の M-test により、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は、 K 上一様収束する。 ■

この定理により、冪級数は収束円の内部で連続であることが分かるが、すぐ後にもっと強く正則 (微分可能) であることを示すので、それはわざわざ命題として書かないことにする。

余談 3.28 (言葉遣い「広義一様収束」) $D(c; \rho)$ 内の任意のコンパクト集合 ($\mathbb{C}$ の場合は有界な閉集合のこと) は、適当な $R < \rho$ に対して、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq R\}$ に含まれるので、冪級数は $D(c; \rho)$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束することが分かる。そのことを $D(c; \rho)$ で広義一様収束するという (英語では、そのものずばりで、“uniformly convergent on every compact set” というのが普通らしい)。 ■

3.5 冪級数の項別微分定理

定理 3.29 (冪級数の項別微分可能性, Abel) 冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、 f は $D(c; \rho)$ で正則で、

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} \quad (z \in D(c; \rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

(冪級数に関して、もう1つ Abel による有名な定理がある。むしろ Abel の定理と言えどそれらの方を指す。それについては後日説明する。)

証明 $c=0$ として証明すれば良い。 $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

冪級数 $g(z)$ の収束半径は $(\sum_n n a_n z^n$ のそれと同じであるから)、Cauchy-Hadamard の公式により

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \cdot \rho = \rho.$$

$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、 f が $D(0; R)$ で正則で $f'(z) = g(z)$ を満たすことを証明しよう。

ε を任意の正数とする。 $g(z)$ は $|z| \leq R$ で一様に絶対収束するので、

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k |a_k| R^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

を満たす $N \in \mathbb{N}$ が取れる。

任意の $z \in D(0; R)$ と、 $z+h \in D(0; R)$ を満たす任意の $h \neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z+h)^n - a_n z^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} \right) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \frac{(z+h)^k - z^k}{h} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right|. \end{aligned}$$

右辺第2項については、 $(z^k)' = k z^{k-1}$ であるから、 $|h|$ が十分小さければ

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

また ($|z| < R$, $|z+h| < R$ に注意すると)

$$\begin{aligned} |(z+h)^k - z^k| &= |(z+h-z)[(z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2}z + \cdots + (z+h)z^{k-2} + z^{k-1}]| \\ &\leq |h| \left(|z+h|^{k-1} + |z+h|^{k-2}|z| + \cdots + |z+h||z|^{k-2} + |z|^{k-1} \right) \\ &\leq |h|kR^{k-1} \end{aligned}$$

であるから、右辺第2項については

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \frac{(z+h)^k - z^k}{h} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| kR^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第3項については、

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} k |a_k| R^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| < \varepsilon.$$

これは $f'(z) = g(z)$ を示している。■

余談 3.30 (導関数の冪級数の収束半径) 上の証明では、Cauchy-Hadamard の公式を用いて、 f と g の収束半径が一致することを導いたが、授業では、Cauchy-Hadamard の公式を証明しなかったの(上極限の性質の説明もさぼった)、それを用いずに収束半径の一致を導いてみよう¹²。

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-c)^n$ の収束半径をそれぞれ ρ_1 , ρ_2 とおくとき、 $\rho_1 = \rho_2$ を言えば良い。

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid r > 0, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}, \quad B = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid r > 0, \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^n < \infty \right\}$$

とおく。(状況をあらく説明すると、例えば前者について $\rho_1 = \sup A$ で、 $A = (0, \rho_1)$ または $A = (0, \rho_1]$ ということであるが、 $A = \emptyset$ という場合もあり (このとき $\sup A = \rho_1$ は成り立たない)、ていねいな議論が必要になる。)

一般に $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^n$ であるから、 $B \subset A$. 収束半径の定義から

$$0 < r < \rho_1 \Rightarrow r \in A, \quad r > \rho_1 \Rightarrow r \notin A$$

¹²この辺はどうすべきか悩むところで、何でも事前に準備をしておくと、すっきり解決するようになるものの、それで早くなった分の時間が準備にかけた時間とつりあうかどうか…ともあれ、証明しないものを使うのは気持ち悪いので、使わないで証明してみよう、ということである。そうして証明を作ってみた後で、杉浦 [6] を見たら、杉浦先生も同じようなことをして (本の中で Cauchy-Hadamard の公式の証明はするのだが、説明の順序の都合で、収束半径の一致は Cauchy-Hadamard の公式を使わずに証明してある)、「またか」と思ったのであった。

が成り立つので、 $\rho_1 = \begin{cases} 0 & (A = \emptyset) \\ \sup A & (A \neq \emptyset) \end{cases}$. 同様に $\rho_2 = \begin{cases} 0 & (B = \emptyset) \\ \sup B & (B \neq \emptyset) \end{cases}$.

$\rho_1 = 0$ のときは $A = \emptyset$. $B \subset A$ であるから $B = \emptyset$. ゆえに $\rho_2 = 0$ であるから $\rho_1 = \rho_2$.

以下 $\rho_1 > 0$ とする。 $A \neq \emptyset$ である。 $(A = B)$ が成り立つとは限らないが、少し弱くした) 次が成り立つ。

$$(\#) \quad (\forall r \in A)(\forall r' : 0 < r' < r) \quad r' \in B.$$

(# の証明) $\frac{r}{r'} > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ であるから、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) \sqrt[n]{n} \leq \frac{r}{r'}$. このとき $n \leq (r/r')^n$ であるから、

$$n |a_N| r'^n \leq \left(\frac{r}{r'}\right)^n \cdot |a_n| r'^n = |a_n| r^n.$$

ゆえに

$$\sum_{n=N}^{\infty} n |a_n| r'^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

ゆえに $r' \in B$ ((#) の証明終).

ゆえに $B \neq \emptyset$. $B \subset A$ であるから、 $\rho_2 = \sup B \leq \sup A = \rho_1$. もしも $\rho_2 < \rho_1$ が成り立つと仮定すると、 $\rho_2 < r' < r < \rho_1$ となる r, r' が取れて、 $r < \rho_1$ より $r \in A$. 一方 (#) より $r' \in B$. ゆえに $\rho_2 = \sup B \geq r'$. これは $\rho_2 < r'$ に矛盾する。ゆえに $\rho_2 = \rho_1$. ■

冪級数は (もちろん) Taylor 展開と関係が深い。まずは冪級数に展開出来るならば、それは Taylor 展開に他ならないということを示す (後で、関数が正則であれば冪級数に展開できるということを示す)。

系 3.31 (冪級数に展開出来るならば、それは Taylor 展開である) 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ の定義する関数 f は、収束円 $D(c; \rho)$ の内部で無限回微分可能であり、 $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n \quad (z \in D(c; \rho)).$$

証明 $D(c; R)$ で何回でも微分できて、 $k \in \mathbb{N}$ とするとき、 $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-c)^{n-k}$. ゆえに $f^{(k)}(c) = n! a_k$. ■

問 40. 収束冪級数について “係数比較” が可能なこと、つまり $c \in \mathbb{C}, r > 0$, 複素数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ と $\{b_n\}_{n \geq 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - c)^n \quad (|z - c| < r)$$

が成り立てば、 $a_n = b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ であることを示せ。

(系 3.31 を使ってもらうことを考えているが、 $z = c$ の代入と、 $(z - c)$ での割算を続けるという方法もある。後者の方法を用いる場合、一様収束の議論は不要かどうか、良く点検すること。)

後で、原始関数の存在が問題になることがあるので、一つ注意をしておく (冪級数に関しては簡単に「いつでも存在する」ことが言える)。

系 3.32 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ の収束半径 ρ が $\rho > 0$ を満たすとき、冪級数の和 $f(z)$ は収束円 $D(c; \rho)$ で原始関数 F を持つ。

証明 $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ とおくと、収束半径は ρ と等しく、 $F'(z) = f(z)$ を満たす。■

例 3.33 (微分方程式の冪級数解) 原点中心の収束冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で、 $f''(z) = -f(z)$,

$f(0) = 1, f'(0) = 0$ を満たすものを求めよ。

(解答)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n.$$

これが $-f(z)$ に等しいことから、係数を比較して

$$(\forall n \in \mathbb{Z} : n \geq 0) \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} = -a_n.$$

ゆえに $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$. 一方 $f(0) = 1$ より $a_0 = 1$, $f'(0) = 0$ より $a_1 = 0$ が得られるので、

$$a_{2k-1} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

この収束半径は ∞ である (省略 — 実は既にやったことがあるはず)。もう気づいていると思うが $f(z) = \cos z$. ■

この例の微分方程式は定数係数線形微分方程式なので (というか単振動の方程式なので常識と言っても良い)、冪級数を使わないでも簡単に解くことが出来るが、この方法は変数係数の

微分方程式の場合にも使うことが出来る。実際、数多くの微分方程式がその方法で解かれ、その解として新しい関数 (**特殊関数**) が豊富に導入された。例えば Gauss は超幾何微分方程式

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

の解として **超幾何関数** を導入し、Bessel は Bessel の微分方程式

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

の解として **Bessel 関数** を導入した。

さて、これで一気に使える関数が増える。ここでは初等関数を複素関数として定義しよう。

$$\begin{aligned} e^z &= \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \\ \sin z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}. \\ \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}. \\ \sinh z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}. \end{aligned}$$

これら冪級数の収束半径は ∞ であり、和は $\mathbb{C}$ で正則な関数である。 $z \in \mathbb{R}$ に対しては、高校数学や、大学1年時に微積分で学んだ関数に一致する。

実は $z \in \mathbb{R}$ で一致する正則関数は、 $\mathbb{C}$ 全体で一致することが分かるので (後述の「一致の定理」)、これは唯一の拡張と考えて良い。

$e^z = \exp z$ については (以前 $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ と定義したので) 再定義となるが、以前と一致することが分かる。

冪級数による定義のみを用いて、「よく知っている」性質 (指数法則、加法定理、 π との色々な関係など) を導くことも出来る。面白く (講義する立場でも楽しい)、有意義なことである (色々振り返ることが出来るし、テクニックの勉強になる) と思われるが、それほど時間に余裕はないので、この講義では省略し、面白そうなところを演習問題で取り上げるにとどめる。

問 41. $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ であることを確かめよ。

問 42. (e^z を冪級数で定義したとき) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、 $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ であることを示せ。

問 43. $z \in \mathbb{C}$ に対して $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

問 44. (1) $\sin z = 0$ を解け。 (2) $\sin z = 2$ を解け (「解なし」ではない)。

これらの関数については、とりあえず一段落と言って良いだろう。

以下は収束半径が有限であるものについて述べる。

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される一般 2 項係数である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(例えば $\sqrt{\quad}$ なども $\sqrt{1+z} = (1+z)^{1/2}$ として、これに含めることが出来る。)

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad (|z| < 1).$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \quad (|z| < 1).$$

これらの関数については、まだまだ満足の行く結果が得られたとは言えない(ここに書いた収束円の外でも関数が意味を持つので)。さらに頑張る必要がある。

$\tan^{-1} z, \log(1+z)$ については、実関数の範囲で

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}, \quad \log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{t+1}$$

であったので、積分を実行したくなる。次の節でそれを考えるのでしばしお待ちを。

$\tan z$ の冪級数展開が出て来ないが、それについては後述する(定義そのものは、実関数のときと同じ $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ で済むので、当面問題はない)。

3.6 実関数の場合の項別微分、項別積分

(これは講義では後回し)

本当は微積分を学ぶ際にやるべきことだけれど、省略されている可能性が高いので、さらっと紹介する。2つの定理とその証明を説明するが、筆者はとても見通しの良い証明であると思っている。複素関数の場合も同様の証明が可能であるが、そのためには複素関数の積分を定義する必要がある。冪級数の説明が終わったらそれをするので、ほんのしばらく待って下さい。

命題 3.34 K は $\mathbb{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、 $\{f_n\}$ は K 上の有界で積分可能な関数の列、 $\{f_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき K 上一様に f に収束するならば、 f は K で有界かつ積分可能で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(x) dx = \int_K f(x) dx.$$

証明のハイライト (可測性の証明は省略する。連続関数の場合はそういう問題はない。)

$$\begin{aligned} \left| \int_K f_n(x) dx - \int_K f(x) dx \right| &= \left| \int_K (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_K |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \int_K dx \\ &= \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \times (K \text{ の体積}) \rightarrow 0. \blacksquare \end{aligned}$$

命題 3.35 $\mathbb{R}$ の区間 $I = [a, b]$ 上の C^1 級関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が2条件

- (1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき、ある関数 f に I 上各点収束する。
 - (2) 導関数列 $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき、ある関数 g に I 上一様収束する。
- を満たすならば、 f は I 上 C^1 級で、 $f' = g$ を満たす。

証明 任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

が成り立つ。 $n \rightarrow \infty$ としたときの極限は

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

g は連続関数列の一様収束極限であるから、連続であることに注意すると、

$$f'(x) = g(x). \blacksquare$$

問 45. 微分の定義に基づき

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x)$$

を示せ。

3.7 Abel の級数変形法, Abel の連続性定理

議論が難しいので、授業では省略せざるを得ないかも。少なくとも後回し。
 どのような応用があるかを書いておく。

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす z について収束する。
- 次の有名な級数の和の証明

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \\ \log 2 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \end{aligned}$$

補題 3.36 (Abel の級数変形法) 数列 $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ があるとき、 $s_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ とおくと、

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k = s_n \beta_n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1})$$

が成り立つ。

証明 $a_0 = s_0$, $a_k = s_k - s_{k-1}$ ($k \geq 1$) であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n s_k \beta_k - \sum_{k=1}^n s_{k-1} \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\ &= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\ &= s_0 (\beta_0 - \beta_1) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n. \blacksquare \end{aligned}$$

これから次の定理が得られる。

命題 3.37 $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ は部分和が有界な複素数列、 $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ は単調減少して 0 に収束する数列とすると、 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。

証明 $s_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ とおくと、仮定から $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) s_n \leq M$. アーベルの級数変形により

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.$$

$n \rightarrow \infty$ とするとき、 $s_n \beta_n \rightarrow 0$ である。実際 $|s_n \beta_n| \leq M \beta_n \rightarrow 0$.

また $|s_k (\beta_k - \beta_{k+1})| \leq M (\beta_k - \beta_{k+1})$, $\sum_{k=0}^n M (\beta_k - \beta_{k+1}) = M \beta_0 - M \beta_{n+1} \rightarrow M \beta_0$ である

から、優級数の定理より $\sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1})$ は収束する。

ゆえに $\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k$ は収束する。■

例 3.38 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は $|z| = 1, z \neq 1$ を満たす z に対して収束する。実際、 $\alpha_n := z^n, \beta_n := \frac{1}{n}$ とおくと、

$$\left| \sum_{k=1}^n z^k \right| = \left| \frac{z(1-z^{n+1})}{1-z} \right| \leq \frac{|z|(1+|z^{n+1}|)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$$

であるから $\{\alpha_n\}$ の部分和は有界であり、 $\{\beta_n\}$ は単調減少して 0 に収束する。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束する。■

有名な Abel の連続性定理を証明するために、補題 3.36 を少し一般化しよう。

補題 3.39 数列 $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}, \{\beta_n\}_{n \geq 0}$ があるとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $s_m := \sum_{k=n}^m \alpha_k$ ($m \geq n$) とおくと、

$$\sum_{k=n}^m \alpha_k \beta_k = s_m \beta_m + \sum_{k=n}^{m-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1})$$

が成り立つ。

証明 補題 3.36 の証明と同様である。■

定理 3.40 (Abel の連続性定理 (Abel's continuity theorem)) 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ ($R > 0$) で収束したとする。任意の正数 K に対して、

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K \right\}$$

とおくとき、 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。特に f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。さらに特に

$$\lim_{\substack{x \in [0, R) \\ x \rightarrow R}} f(x) = f(R).$$

証明 $\alpha_n := a_n R^n$ とおくと、 $\sum_{j=0}^n \alpha_j = \sum_{j=0}^n a_j R^j$ は収束列の一般項であるから有界である：

$$(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left| \sum_{j=0}^n \alpha_j \right| \leq M.$$

$z \in \Omega_K$ に対して、 $\beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n$, $f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ とおくと、

- $a_n z^n = \alpha_n \beta_n$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n - \beta_{n+1}| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{R} \right|^n \left| 1 - \frac{z}{R} \right| = \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ($|公比| = \frac{|z|}{R} < 1$ の等比数列だから).

$m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ とするとき、

$$f_m(z) - f_n(z) = \sum_{k=n+1}^m a_k z^k = \sum_{k=n+1}^m \alpha_k \beta_k = \sum_{k=n+1}^m s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_m \beta_m.$$

ただし $s_k := \sum_{j=n+1}^k \alpha_j$ とおいた。

$$|s_k| = \left| \sum_{j=0}^k \alpha_j - \sum_{j=0}^n \alpha_j \right| = |f_k(R) - f_n(R)| \leq \sup_{k > n} |f_k(R) - f_n(R)|.$$

であるから、

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq \sup_{k > n} |f_k(R) - f_n(R)| \sum_{k=n+1}^m |\beta_k - \beta_{k+1}| + |s_m| |\beta_m| \\ &\leq K \sup_{k > n} |f_k(R) - f_n(R)| + |s_m| |\beta_m|. \end{aligned}$$

すなわち

$$(6) \quad |f_m(z) - f_n(z)| \leq K \sup_{k > n} |f_k(R) - f_n(R)| + |s_m| |\beta_m|.$$

z を固定して、 $n \rightarrow \infty$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに $\{f_n(z)\}$ は Cauchy 列であるから収束する。極限は $f(z)$ と書くことにしてあるので、(6) で $m \rightarrow \infty$ として

$$|f(z) - f_n(z)| \leq K \sup_{k > n} |f_k(R) - f_n(R)|.$$

ゆえに関数列 $\{f_n\}$ は Ω_K で一様収束する。すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は一様収束する。■

余談 3.41 (Abel とはどういう人) 昔は若くしてなくなった天才というのを誰でも良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、ベキ級数の収束発散についての基礎を確立した。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式が有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. 楕円関数論

など仕事 (後の二つは大仕事!) を行った。■

4 複素関数としての対数関数と冪関数

(冪級数とも線積分とも直接関係なくて、しかし重要であるから、短いけれど独立した節にしておく。)

4.1 対数関数 $\log z$

複素関数としての対数関数 $\log$ を定義しよう。

トレイラー: 冪級数として定義するのはイマイチなので、指数関数の逆関数として定義するが、多価性が現れてちょっと難しい。でもそこが大事なところで、その応用 (と言って良いか問題だが) が後で頻出する。

最初に実関数としての $\log$ を思い出そう。 $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ であるが、 $\exp$ の逆関数であった。すなわち $y \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$ に対して

$$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y.$$

$\log$ の Taylor 展開について、微積の本によく載っているのは、

$$(\sharp) \quad \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$

である。これは

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

を項別に積分したものである。これから変数を複素数にして

$$(\flat) \quad \log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

と定義することが考えられるが、変数の範囲が半径 1 の円に限られるのでは、満足できない。もともと $\log$ について

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log x = +\infty \quad (\text{つまり} \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \log(1+x) = +\infty)$$

であるから、 $(\sharp)$ が $x = -1$ で意味を持たないのは、ある意味で仕方がないが、「もっと右に行けるはず」である。これは複素変数に拡張するために冪級数展開に頼ったからとも言える。

そこで以下では、指数関数の逆関数として対数関数を定義することを考えよう (後でこれ以外に、積分による表現 $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ の一般化や、「解析接続」も考える)。

$z \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、方程式 $z = e^w$ を w について解こう。

$w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと、 $e^w = e^u e^{iv}$ となり、この右辺は指数形式に近いので、 z を指数形式で表すのが良さそうである。

$$z = r e^{i\theta} \quad (r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi))$$

とおく。

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow re^{i\theta} = e^u e^{iv} \\ &\Leftrightarrow r = e^u \wedge e^{i\theta} = e^{iv}. \end{aligned}$$

(念のため、おさらい: $re^{i\theta} = e^u e^{iv}$ の両辺の絶対値を取ることで $r = e^u$ が得られ、それを $re^{i\theta} = e^u e^{iv}$ に代入して割算して $e^{i\theta} = e^{iv}$ を得る。)

$r = e^u$ を $u = \log r$ と解こうとして、 $r = 0$ では困ることに気付く。そこで $z \neq 0$ という仮定を追加する (そうすると $r = |z| > 0$)。

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow u = \log r \wedge v \equiv \theta \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow u = \log r \wedge (\exists n \in \mathbb{Z}) v = \theta + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) w = \log r + i(\theta + 2n\pi). \end{aligned}$$

分かったことをまとめておく。

— $e^w = z$ を解く —

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が与えられたとき、 w に関する方程式 $e^w = z$ の解は存在し、 z の極形式を $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$) とするとき、

$$w = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と表される。これは

$$w = \log |z| + i \arg z$$

と書くことも出来る。

例 4.1 (まあ一応やってみるか) 色々な z の値に対し、実際に $e^w = z$ の解を求めてみよう。

$e^w = 0$ の解は存在しない (上でもやったし $e^w e^{-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \neq 0$ から分かる)。

$e^w = 1$ の解は $w = \log |1| + i \arg 1 = 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

$e^w = 2$ の解は $w = \log |2| + i \arg 2 = \log 2 + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

$x > 0$ とするとき $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。つまり $2n\pi i$ をくつつければ良い。

$e^w = -1$ の解は $w = \log |-1| + i \arg(-1) = 0 + (2n-1)\pi i = (2n-1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

$e^w = -2$ の解は $w = \log |-2| + i \arg(-2) = \log 2 + (2n-1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

$e^w = i$ の解は $w = \log |i| + i \arg i = 0 + (2n+1/2)\pi i = (2n+1/2)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。

$e^w = 2i$ の解は $w = \log |2i| + i \arg(2i) = \log 2 + (2n+1/2)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)。■

さて、それで複素関数 $\log z$ をどう定義するか。上の $e^w = z$ の解を見れば、 z の偏角 $\arg z$ をどう定義するかとほとんど同じであることが分かる。

(i) 気前よく $e^w = z$ を満たす w すべてを表すことにしてみよう。つまり

$$\begin{aligned} \log z &:= \log |z| + i \arg z \\ &= \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

任意の z に対して、 $\log z$ には無限個の値があることになる。 $\log$ は普通の意味では関数・写像ではないが、無限**多価関数**と呼ばれる。これに対し、(任意の z に1つの値だけに対応する) 普通の関数を (対比させる意味で) **一価関数**という。

一方、適当なルールで、 z の偏角をただ一つだけ選ぶことにより、 $\log$ を一価関数として定義することも出来る。

- (ii) z の偏角として主値 $\text{Arg } z$ (これは $(-\pi, \pi]$ から値を選ぶ) を取ったとき、**対数関数の主値**と呼び、 $\text{Log } z$ で表す:

$$\begin{aligned}\text{Log } z &:= \log |z| + i \text{Arg } z \\ &= \log r + i\theta \quad (z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \text{ を満たす } r, \theta).\end{aligned}$$

$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (普通の関数) であるが、負の実数全体 $N := \{z \in \mathbb{C} \mid z < 0\}$ 上の任意の点で不連続である。(x を任意の負の実数とすると、 z を「上岸」から x に近付けるとき $\text{Im } \text{Log } z \rightarrow \pi$, z を「下岸」から x に近付けるとき $\text{Im } \text{Log } z \rightarrow -\pi$. 従って $z \rightarrow x$ のとき $\text{Log } z$ は極限を持たない。)

— Mathematica でやってみよう —

プログラミング言語の複素対数関数は主値を計算するのが普通である。Mathematica では $\text{Log}[]$ で対数関数の主値が計算できる。
 $\text{Im } \text{Log } z$ のグラフは螺旋階段のような感じ。

```
Plot3D[Boole[x^2 + y^2 < 4] Im[Log[x + I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

($\text{Boole}[]$ はなくても良い。)

マウスでグラフをつかまえて動かしてみると様子が分かる。

ついでに $\text{Re } \text{Log } z$ のグラフも描いてみよう。描く前に想像できるだろうか。

無限多価関数 $\log z$ について、 $\text{Im } \log z$ のグラフは想像できる？

しかし、負の実数と 0 を除いた集合 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$ に制限すると、正則 (当然連続) になる。

これは指数関数を $\Omega_{(-\pi, \pi]} := \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im } w \leq \pi\}$ に制限した写像

$$f: \Omega_{(-\pi, \pi]} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(w) = e^w \quad (w \in \Omega_{(-\pi, \pi]})$$

の逆関数である (単射でない関数を小さい集合に制限することで単射にして逆関数を作る、という良くある話である)。 $z = f(w)$ とするとき、 $\frac{dz}{dw} = e^w = z$ であるから、 $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$.
すなわち $\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}$ が成り立つが、詳しいことは省略する¹³。

他のやり方もありうる。

¹³複素関数の場合の、逆関数の微分法、逆関数定理などは証明していない。 Log については後で別の方法で $(\text{Log } z)' = \frac{1}{z}$ を証明できる。

(iii) 例えば、これも良く使われるやり方だが、 z の偏角を $[0, 2\pi)$ の範囲に選ぶ (それを主値という人もいる)。つまり $z = re^{i\theta'}$, $r > 0$, $\theta' \in [0, 2\pi)$ として、

$$\log z := \log r + i\theta'$$

とする。

$\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (普通の関数) であるが、正の実数全体 $P := \{z \in \mathbb{C} \mid z > 0\}$ 上の任意の点で不連続である。しかし、正の実数と 0 を除いた集合 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \geq 0\}$ に制限すると、正則 (当然連続) になる。

これは指数関数を $\Omega_{[0, 2\pi)} := \{w \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Im } w < 2\pi\}$ に制限した写像

$$g: \Omega_{[0, 2\pi)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(w) = e^w \quad (w \in \Omega_{-\pi, \pi})$$

の逆関数である。 $z = g(w)$ とするとき、 $\frac{dz}{dw} = e^w = z$ であるから、 $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$ 。すなわち $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ が成り立つ。

(ii) の Log も (iii) の $\log$ も、実関数としての $\log$ の拡張になっている、つまり $x \in (0, \infty)$ とするとき、

$$\log x = \text{Log } x = \log x.$$

(それ以外の任意の $\log$ については、この関係が成り立つとは限らない。)

余談(?): (ii) の Log は N で不連続、(iii) の $\log$ も P で不連続と聞くと「気持ち悪い」と感じるかもしれないが、後でその不連続性を利用した計算を行なったりする。

4.2 冪関数 z^α

実数 a, b に対して、 a の b 乗 a^b はいつでも定義されるわけではなかった (詳しいことは省略)。 $a > 0$ の場合は

$$a^b = e^{b \log a}$$

となっていた。この関係を利用して、複素数の冪関数 z^α を定義しよう。

これまで定義してあるものと区別するため、しばらく z^α でなく $p(z, \alpha)$ と書くことにする (p は冪 (power) の頭文字のつもり)。

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z}$$

とおく。 $\log z$ は多価関数とするかもしれない。その場合は $p(z, \alpha)$ は多価関数となる。

z の極形式 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) を用いると、

$$p(z, \alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ のとき、 $e^{\alpha \log r} = (e^{\log r})^\alpha = r^\alpha$ であるので、

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i(\alpha\theta + n\alpha \cdot 2\pi)}.$$

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、 $n\alpha \in \mathbb{Z}$ であるから、 $e^{i(n\alpha \cdot 2\pi)} = 1$. ゆえに

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = (re^{i\theta})^\alpha = z^\alpha.$$

(この z^α は $\alpha > 0$ ならば α 個の z の積、 $\alpha < 0$ ならば $-\alpha$ 個の z の積の逆数という意味。)

(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、

$$(7) \quad \alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

と表せる。そうすると

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}}.$$

p と q が互いに素であるので、 nq を p で割った余りは $0, 1, \dots, p-1$ がすべて現れる。ゆえに

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{ik \frac{2\pi}{p}} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

これで十分であるが、 $\omega := e^{i \frac{2\pi}{p}}$ とおくと、 ω は 1 の原始 p 乗根で

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

これらは円 $|z| = r^\alpha$ の p 等分点である。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ ならば、 z の p 乗根に等しい。

(c) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ ならば実は $p(z, \alpha)$ は無限個の値を持つ。(証明は省略する。)

この $p(z, \alpha)$ のことを慣習上 z^α と書くけれど、上から分かるように注意が必要で、

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}$ ならば、これまで使ってきたのと同じ意味になる。

(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ならば、 α の既約分数表示を (7) とすると、 p 価関数であり、 p 個の値は複素平面内の円周の p 等分点である。

(c) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ ならば、無限多価関数である。

(分枝の話、 $\sqrt{z}$ の話をしたい…)

5 線積分

(少し過密スケジュールでばてています。内容を整理する余裕がないので、しばらくは「工事中」と考えて下さい。ごめんなさい。)

5.1 線積分の定義

今日はこの講義の核心部分に触れるので真剣に聴きましょう。

(余談: 関数論縁起からの1頁ちょっとのガウスの手紙の引用を読んでみよう。)

これからしばらく線積分を学ぶ。

この講義の大きな目標は「正則関数は冪級数展開可能である」ことを示すことにある(他にもやるべきことはあるが、現時点で既習の用語を使って説明できることとしては、まあまあであろう)。

主張のどこにも「積分」という語は出てこないが、普通「線積分」を使って証明される。('線積分'を使わない証明もあるらしいが、ずっと後になって発見されたもので、一般にはあまり知られていないそうである。Ahlfors に書いてあった話?)

$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ に近いので、重積分というものもあるが、複素関数論でそれが必要になることは稀で、必要なのは線積分の方である。

これからしばらくの話は

1. まず線積分を定義、例を見せる
2. 反省モード
3. 基本的な性質を粛々と調べる

となり、Cauchy の積分定理の準備を行なう。

次は図を描くこと。ちょろっと、始点、終点という言葉を書き込み、ちょろっと「始点と終点と同じでも道はたくさんある」と言う。

早速、線積分を定義しよう。2種類あるが、良く使うのは次のものである。

定義 5.1 (曲線に沿う線積分) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき、曲線 C に沿った f の線積分を次式で定める。

$$(8) \quad \int_C f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

C のことを積分路ということがある。

次の形の線積分も必要になる。

定義 5.2 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき、

$$(9) \quad \int_C f(z) |dz| = \int_C f ds := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

(特に $f \equiv 1$ のとき、つまり $\int_C ds$ は C の弧長となる。)

曲線、区分的に C^1 級などの言葉については、知っている人も多いと想像するが、すぐ後で説明する。

$F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は複素数値関数である。微積分では実数値関数の積分しか出て来なかったかもしれない。 $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$ とおいて、

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (U(t) + iV(t)) dt := \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt$$

で積分を定義すると考えれば良い。(これは実際には既に他の授業で普通に使っているはず。例えば「画像処理とフーリエ変換」の Fourier 係数の計算など。)

例 5.3 $f(z) = z^2$, C は $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とするとき

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^2 i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{3i\theta} d\theta = i \left[\frac{e^{3i\theta}}{3i} \right]_0^{\pi} = \frac{e^{3\pi i} - e^0}{3} = \frac{-1 - 1}{3} = -\frac{2}{3}. \blacksquare$$

注意 5.4 (細かい注意 — 授業では寝た子を起こさないかも) 任意の t に対して $\varphi'(t)$ が定義されるわけではない。(8) は大丈夫なのだろうか? $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ が区分的に C^1 級の曲線とは、 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ は連続で、 $\exists \{t_j\}_{j=0}^n$ s.t. $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, φ を $I_j := [t_{j-1}, t_j]$ に制限した $\varphi_j := \varphi|_{I_j}$ は I_j で C^1 級、と定義される。ゆえに

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi_j(t)) \varphi_j'(t) dt$$

は問題なく定義される (積分可能であり、値が確定する)。(8) は

$$\int_C f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi_j(t)) \varphi_j'(t) dt.$$

と定義するのが厳密であるとも言えるかもしれない。しかし積分は関数が定義されていなかったり、不連続であるような例外点の存在を許して考えるのが普通 (慣習) なので、上のように書いておいた。積分可能であることを確かめるには、ここに書いたような議論が必要になる。■

定理 5.5 (微積分の基本定理 (のようなもの)) Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線で、始点が a , 終点が b とするとき、

$$\int_C F'(z) dz = [F(z)]_{z=a}^{z=b} = F(b) - F(a).$$

証明 C が $z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) とする。 φ が C^1 級の場合は、

$$\begin{aligned} \int_C F'(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

φ が連続かつ区分的に C^1 級の場合は、 C^1 級であるような小区間に分割して、各区間で上と同じことをして

$$\begin{aligned} \int_C F'(z) dz &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \sum_{j=1}^n (F(\varphi(t_j)) - F(\varphi(t_{j-1}))) \\ &= F(\varphi(t_n)) - F(\varphi(t_0)) = F(b) - F(a). \blacksquare \end{aligned}$$

例 5.6 $\varphi(0) = 1, \varphi(\pi) = -1, \left(\frac{z^3}{3}\right)' = z^2$ であるから、

$$\int_C f(z) dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3}. \blacksquare$$

何だ、同じじゃないか？

(確かに原始関数が分かっているだけでこれまでと同じだ。)

しかし、

複素関数では、原始関数が存在するとは限らない。

これについては時間をかけて説明することになる。

Cf. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば、 f は必ず原始関数を持つ。すなわち $\exists F$ s.t. $F' = f$. 実際、

微積分の基本定理

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

より、 $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ とおけば良い。

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

も微積分の基本定理と呼ばれる。これらは要するに、

微分と積分は互いに逆演算である

ということを行っている。

複素関数で曲線に沿う線積分が重要である理由は、微分の逆演算となりうるからである。

例 5.7 $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}, C: z = \varphi(t) = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi])$ とするとき、

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i.$$

もしも f の原始関数 F が存在すると仮定すると、上の定理によって

$$\int_C f(z) dz = F(\varphi(2\pi)) - F(\varphi(0)) = F(1) - F(1) = 0$$

となり矛盾が生じる。ゆえに f は原始関数を持たない。

この辺の事情は、前回話した複素対数関数の話に通じる。やや判りづらいと思われるが、説明する。(上の線積分の計算そのものは簡単であろう。)

関数 f の定義域を少し小さいものに置き換えると、原始関数は存在する。 $\Omega' := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \geq 0\}$ では

$$F(z) = \log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad (\text{偏角 } \theta \text{ を } (0, 2\pi) \text{ の間取る})$$

が f の原始関数になる。そこで $0 < \varepsilon < 1$ に対して、 $C_\varepsilon: z = \varphi(t) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$) とすると、

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = F(\varphi(2\pi - \varepsilon)) - F(\varphi(\varepsilon)) = (\log 1 + i(2\pi - \varepsilon)) - (\log 1 + i\varepsilon) = (2\pi - 2\varepsilon)i.$$

ここで $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると $2\pi i$ に収束する。■

$n \in \mathbb{Z}$, $f(z) = z^n$ とする。 $n \neq -1$ であれば、 $F(z) := \frac{z^{n+1}}{n+1}$ とおくと、 $F'(z) = f(z)$ であるから、

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a).$$

関数が原始関数を持つかどうか、簡単に分かることを述べておく。

- 多項式関数は ($n \geq 0$ しか出て来ないので) 必ず原始関数を持つ。
- 有理関数で $\log$ が出て来るケース ($\frac{1}{z-a}$ とか、 $\frac{z}{z^2+1}$ — もっともこちらは $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$ に等しいので $\frac{1}{z-a}$ と同じか) や、 $\sqrt{\quad}$ などが要注意。
 $z^\alpha = e^{z \log \alpha}$ であるが、これはまだ授業でやっていない...
- 実は原始関数を持つならば正則であるということが後で分かる。従って正則関数でない $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ などは原始関数を持たない。

線積分の練習問題を出す立場の楽屋裏を説明すると、原始関数を持つと、線積分の定義に基づいて計算することの練習にならないので、この手の

積分の定義の反省 実関数の積分は Riemann 和の極限として定義されるのが普通である:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j,$$

$$\Delta x_j := x_j - x_{j-1}, \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j], \quad |\Delta| := \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}).$$

複素関数の曲線に沿う線積分も同様に定義すべきであろう。

$$\int_C f(z) dz = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j.$$

$$\Delta z_j := z_j - z_{j-1}, \quad \zeta_j \in \widehat{z_{j-1} z_j}, \quad |\Delta| := ?$$

z_j , ζ_j をどう取るか。パラメーターの区間の分割

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

と各小区間から任意の選んだ点

$$\xi_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad (j = 1, \dots, n)$$

を用いて

$$z_j = \varphi(t_j), \quad \zeta_j := \varphi(\xi_j)$$

とすると良いであろう。すると

$$\begin{aligned} f(\zeta_j) &= f(\varphi(\xi_j)), \\ \Delta z_j &= \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \simeq \varphi'(\xi_j) \Delta t_j, \\ \Delta t_j &:= t_j - t_{j-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j \simeq \sum_{j=1}^n f(\varphi(\xi_j)) \varphi'(\xi_j) \Delta t_j.$$

この右辺は、実変数の関数 $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の Riemann 和になっているので、 $|\Delta| := \max_{1 \leq j \leq n} (t_j - t_{j-1})$ を 0 に近付けた時の右辺の極限は $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ になることが証明できる。複素関数の曲線に沿う線積分の妥当性が分かる。

もう一つの方の線積分は

$$\int_C f(z) |dz| = \int_C f \, ds = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) |\Delta z_j|.$$

($f \equiv 1$ の場合は、Riemann 和は折れ線の長さになっていることに注意。)

5.2 曲線に関する用語の定義

定義 5.8 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の曲線とする。(これは $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ 連続ということの意味する。)

- 写像 φ の値域 $\{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ のことを曲線 C の**像** (あるいは**跡**) という。
- 曲線 C が C^1 級曲線であるとは、 φ が C^1 級であること、すなわち 1 回微分可能で、導関数 φ' が連続であることをいう。
- 曲線 C が C^1 級**正則曲線**であるとは、 φ が C^1 級であり、 $\forall t \in [\alpha, \beta] \varphi'(t) \neq 0$ を満たすことをいう。
- 曲線 C が**区分的に C^1 級の曲線**であるとは、 $[\alpha, \beta]$ のある分割 $\{t_j\}_{j=0}^n$ で、各 $[t_{j-1}, t_j]$ に φ を制限した $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j]}$ が C^1 級曲線であるものが存在することをいう。
(t_j では片側微分係数しか存在しないかもしれない、ということである。)
- 曲線 C が**区分的に C^1 級の正則曲線**であるとは、ある $\{t_j\}_{j=0}^n$ で各 $[t_{j-1}, t_j]$ に φ を制限した $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j]}$ が C^1 級正則曲線であるものが存在することをいう。
- 曲線 C が**閉曲線** (closed curve) であるとは、始点と終点が等しいこと、すなわち $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- 曲線 C が**単純曲線** (**Jordan 弧**) であるとは、

- (曲線が閉曲線でない場合) φ が単射であること、すなわち

$$(\forall t_1 \in [\alpha, \beta])(\forall t_2 \in [\alpha, \beta]) \quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

を満たすことをいう。

- (曲線が閉曲線である場合) φ が $[\alpha, \beta]$ で単射であること、すなわち

$$(\forall t_1 \in [\alpha, \beta])(\forall t_2 \in [\alpha, \beta]) \quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

を満たすことをいう。(直観的には「自分自身と交わらないこと」である。)

- 単純閉曲線 C が**正の向き**の曲線であるとは、進行方向の左手に C が囲む有界領域が見えることをいう。

(曖昧な言い方であるが、簡単な場合のときのみ扱うので、混乱は生じないであろう。)

C^1 級の正則曲線では、曲線上の各点で 0 でない接線ベクトルが存在し、その接線ベクトルが連続的に変化するので、図形として滑らかである。

任意の単純閉曲線は平面を 2 つの領域に分け、そのうちの一方は有界、他方は非有界となる (**Jordan 曲線定理** — 証明が難しいことで有名)。有界な領域の方をその曲線が囲む領域と呼ぶ。

曲線の例を 2,3 あげる。

例 5.9 $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とする。 $C: z = \varphi(t) = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とすると、 C は C^1 級正則曲線である。さらに単純閉曲線で、正の向きである。 C の像は c を中心とする半径 r の円である。■

問 46. このことを確かめよ。

例 5.10 曲線 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [0, 4]$) を

$$z = \varphi(t) := \begin{cases} t & (t \in [0, 1]) \\ 1 + i(t - 1) & (t \in [1, 2]) \\ 1 + i - (t - 2) & (t \in [2, 3]) \\ i - i(t - 3) & (t \in [3, 4]) \end{cases}$$

で定めると、 C の像は $0, 1, 1 + i, i$ を頂点とする正方形の周である。 C は区分的に C^1 級正則曲線である。さらに単純閉曲線で、正の向きである。■

区分的に C^1 級の曲線を考える理由は、このような多角形や折れ線を扱うためである。

定義 5.11 (C を逆向きにした $-C$) 曲線 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して、 $z = \varphi(-t)$ ($t \in [-\beta, -\alpha]$) で定まる曲線を、 C を逆向きにした曲線と呼び、 $-C$ で表す。

定義 5.12 (曲線 C_1, C_2 をつないだ $C_1 + C_2$) 曲線 $C_1: z = \varphi_1(t)$ ($t \in [\alpha_1, \beta_1]$), $C_2: z = \varphi_2(t)$ ($t \in [\alpha_2, \beta_2]$) で、 C_1 の終点と C_2 の始点が等しい ($\varphi_1(\beta_1) = \varphi_2(\alpha_1)$) であるとする。このとき

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & (t \in [\alpha_1, \beta_1]) \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & (t \in [\alpha_2, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_1]) \end{cases}$$

で定まる曲線を、 C_1 に C_2 をつないだ曲線と呼び、 $C_1 + C_2$ で表す。

(教科書では $C_2 C_1$ と書くことにしているが、標準的な記号とは言えないので、この講義では $C_1 + C_2$ と書くことにする。)

命題 5.13 (1) $\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$

$$(2) \int_C \lambda f(z) dz = \lambda \int_C f(z) dz.$$

$$(3) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

$$(4) \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

$$(5) \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

証明 (1), (2) は明らかである。(3), (4), (5) は演習問題とする。 ■

問 47. (3) を証明せよ。

((3) は線積分を Riemann 和の極限と定義すると、三角不等式

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j|$$

から明らかであるが、実関数の積分に帰着して定義する場合は

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (u(t) + iv(t)) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} dt$$

の形の不等式を示す必要があり、工夫が必要である。)

命題 5.14 線積分は曲線 C の向きを変えないパラメーター付けに依らない。

例 5.15

$$C_1: z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$C_2: z = e^{i\pi t} \quad (t \in [0, 1]),$$

$$C_3: z = e^{i\pi t^2} \quad (t \in [0, 1]),$$

$$C_4: z = -t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

とするとき、曲線の像はみな同じ半円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. また向きも同じである (始点は 1, 終点は -1). 半円の近傍で定義された f に対して、 $\int_{C_j} f(z) dz$ は共通の値を取る。 ■

問 48. $C_5: z = t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$ とするとき、 $\int_{C_5} f(z) dz$ と $\int_{C_4} f(z) dz$ の間の関係はどういうものか。

命題 5.14 により、例えば「点 a から点 b に向かう線分」や「点 c を中心として、半径 r の円周上を正の向きに一周する曲線」の上での線積分が、具体的なパラメーター付け φ を指定しなくても確定することが分かる。

閉曲線の場合は、向きを指定していない場合は、正の向きであるとする暗黙のルールがある。

5.3 $\mathbb{R}^2$ で活躍する積分 (ベクトル解析との関係)

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

$$\int_C f ds$$

$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, C の単位接線ベクトル $\mathbf{t}$ に対して

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C P dx + Q dy.$$

(Green の定理) C が単純閉曲線であるとき、ある有界領域 D を囲む。 C の向きが正であるとすると

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot } \mathbf{f} dx dy,$$

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

ただし

$$\text{rot } \mathbf{f} = \det \left(\nabla \mathbf{f} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{pmatrix} = Q_x - P_y.$$

複素数値関数 f の実部、虚部を u, v とするとき、

$$\int_C f dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy).$$

$$\int_C g |dz| = \int_C g ds.$$

6 Cauchy の積分定理 (1)

これから、この講義が終わるまでのすべては、ある意味で Cauchy の積分定理とその応用 (あるいはそれから導かれる結果) である。

ここでは円盤領域における Cauchy の積分定理を述べる。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹⁴は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、

(a) f は正則関数。簡単のため定義域は $\mathbb{C}$ の領域 Ω としておく。

(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

(c) C の「囲む」範囲に Ω の点でない点 (f が定義されていない点) がない。

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}, C: z = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従っても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

C が単純閉曲線 (Jordan 閉曲線) ならば、Jordan 曲線定理により、 C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界になり、 C は D を囲むと言っても良いだろうが、あまりそういう大道具は使いたくないし。

ともあれ、解決の方向は2つある。

(i) Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える。後で定義する「単連結」という条件を使う。「 Ω が $\mathbb{C}$ の単連結領域であれば、 Ω で正則な任意の関数と、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。

(ii) 個々の閉曲線 C が1つの点を囲むという条件をうまく定義してからとりかかる。閉曲線の点の周りの回転数という概念を使うことになる。

いずれにしても単純な場合から話を進めていく。

¹⁴余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる。2次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、聞いても答えられないんじゃないかと思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.2 三角形の周に沿う線積分の場合

三角形のような単純な図形の場合は、内部とは何か明らかで議論が簡単になる。次の補題は有名である。

補題 6.1 (Goursat, Pringsheim) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 正則、 Δ は Ω 内の三角形とすると、

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は三角形 Δ の周を正の向きに一周する閉曲線である。

(有名な定理であるが、その歴史については Gray [7] を見よ。Goursat (グルサー) の定理と呼ぶ人が多いが、高木 [8] では Pringsheim という名前をあげている理由が良く分かる。簡潔な証明であるが、ここに行き着くまでに紆余曲折があったことが分かる。)

証明に使われるのは、(a) 微分できるということは、局所的には 1 次関数でいくらかでも精度良く近似できるということである、(b) 1 次関数の閉曲線に沿う積分は 0 (1 次関数は原始関数を持つから) という 2 つの要素だけだが、その 2 つをきちんと組み合わせるところが素晴らしい。

証明 $M := \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right|$ とおく。 $M = 0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。 Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、 $\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、そうでない線分は、 $j = 1, 2, 3, 4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので (図が欲しい)、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z) dz.$$

ゆえに

$$M = \left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial\Delta_{0j}} f(z) dz \right|.$$

右辺の 4 つの項 $\left| \int_{\partial\Delta_{0j}} f(z) dz \right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j_0} であつたとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|.$$

ゆえに

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

Δ_0 の周長を L とするとき、 Δ_n の周長 L_n は $L_n = \frac{L}{2^n}$.

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

$c \in \Delta_0 \subset \Omega$ であることに注意する。 f は Ω で正則であるから、 $f'(c) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$ が存在する。ゆえに

$$g(z) := f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)$$

とおくと

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{g(z)}{z - c} = 0.$$

ゆえに

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D(c; \delta)) \quad |g(z)| \leq \varepsilon |z - c|.$$

十分大きな n に対して $\Delta_n \subset D(c; \delta)$ となる。そのとき $|z - c| \leq L_n$ (図を描けばすぐ分かる) であるから、

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} g(z) dz \right| \leq \int_{\partial \Delta_n} |g(z)| |dz| \leq \varepsilon \int_{\partial \Delta_n} |z - c| |dz| \leq \varepsilon L_n \int_{\partial \Delta_n} |dz| = \varepsilon L_n^2 = \frac{\varepsilon L^2}{4^n}.$$

一方、 $-f(c) - f'(c)(z - c)$ は z の 1 次関数であるから (原始関数が存在し、それは閉曲線に沿って積分すると 0 で)、

$$\int_{\partial \Delta_n} g(z) dz = \int_{\partial \Delta_n} (f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)) dz = \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz.$$

ゆえに

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} g(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

2つの不等式から

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial \Delta_n} g(z) dz \right| \leq \varepsilon \frac{L^2}{4^n}.$$

ゆえに

$$0 \leq M \leq \varepsilon L^2.$$

ε は任意の正数であるから、 $M = 0$. ■

後の Cauchy の積分公式の証明に用いるため、仮定を少し弱くした命題も証明しておく。実際には、 Ω で連続で、1 点を除いて正則という場合、実はその点でも微分可能で、 Ω 全体で正則になってしまう (後述の除去可能な特異点というものにあたる)。つまり、これは純粹に証明するための都合、ということになる。

系 6.2 (積分公式のための準備) 上の補題 6.1 の条件で、 f が Ω で正則というところを、

f は Ω で連続、1 点 $a \in \Omega$ を除いて正則

とゆるめても、 $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ が成り立つ。

証明 $a \notin \Delta$ ならば、上の証明のままで良い。 $a \in \Delta$ の場合は、

- (i) a が Δ のある頂点に一致
- (ii) a が Δ の頂点ではない辺上にある
- (iii) a が Δ の内部にある

のいずれかに分類される。

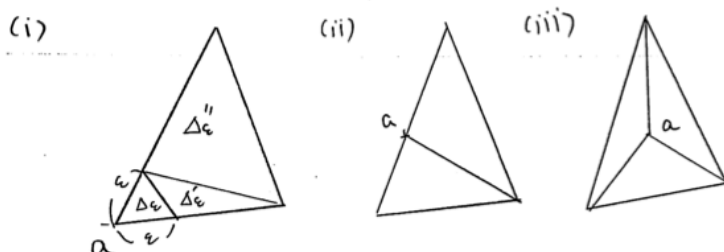


図 3: a が三角形 Δ のどこにあるかで場合分け

(i) の場合、 Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。 a を含まない三角形 $\Delta'_\varepsilon, \Delta''_\varepsilon$ では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz.$$

ゆえに $(\partial\Delta_\varepsilon)$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \Delta} |f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \leq 4\varepsilon \max_{z \in \Delta} |f(z)|.$$

$\varepsilon \rightarrow +0$ とすることで $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が 0 であることが導かれる。■

余談 6.3 Cauchy の積分公式を導くために、正則性の条件のゆるめた積分定理をおくテキストが良くあるが、上の形のものはどうやら高橋 [9] が最初らしい (杉浦 [10] で [9] があげられている)。■

余談 6.4 これも私の昔話で、大学2年生の秋学期、数学科に進学を決めたのだけれど、自分が果たしてこのまま数学の勉強を続けられるかどうか、おっかなびっくり過ごしていた。1つ上の学年は(定員が45名というクラスで)、何と6人が転学科したという話を聞いていて、自分もそうなる羽目になるのではとおそれていたのだ。そうならないように、必死に予習をしてのぞんだのだけれど、最初の1コマで3ヶ月分の貯金がなくなる講義があったり、心の中はパニック状態。秋が深まり、疲れが出て来た時のこと。

複素関数論の講義を受講していたのだが、教官が授業で上の定理の証明をしていた。内容は有名な解析概論で予習済みであったので、自分にとっては復習だったが、「ああ、この定理の証明はやはり美しい、もっと数学を続けたい」と感じた。

そのとき、証明を終えた教官が「この証明を見て何も感じない奴は、数学を続けることを考え直した方が良い」という発言をした。今だったら非難されそうだが(時代を感じてしまいます)、そのときの自分は何か救われたような気がした(まあ、教官の主張が真だとしても、何かを感じた奴が数学を続けることを考え直さなくて良い、ということには、論理的にはならないけれど)。

その後、数学者の中で、この定理の証明が素敵だと思う人と、別にそれほどのことは感じない人、両方がいるらしいことは分かったので、あの教官の発言に賛成というわけではないのだけれど、まあ、同じように感じる人もいる、ということですね。■

6.3 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が0

もう少し後になってから説明しようと思っていたことだが、学生から

Q 「原始関数を持つことと、正則であることは同じなんですか」

という質問を受けた。疑問に感じる人が出て来るのは当然である、という気がしてきたので、予定を変更して、ここで説明する。早めに見通しがつくのは良いだろうし。

Ω を $\mathbb{C}$ の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続とするとき、以下の3つの条件の関係について調べよう。

- (i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
- (ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ
- (iii) f は Ω で正則である

すでに (i) $\Rightarrow$ (ii) は知っているが、実は (ii) $\Rightarrow$ (i) も成り立つ。証明は難しくないのですぐ後で述べる。

実は (i) $\Rightarrow$ (iii) である。それは Cauchy の積分定理を用いて得られる「正則ならば、各点の近傍で冪級数展出来る」という定理(この講義の重要な目標)から、 F は何回でも微分できることが分かるので、特に F が2回微分可能であることから、 $f = F'$ も微分できるからである。上に述べたように (i) と (ii) は同値なので、(ii) $\Rightarrow$ (iii) が成り立つわけであるが、これは通常 **Morera の定理**と呼ばれる。

(これは既に言っていることだが) (iii) $\Rightarrow$ (ii) は一般には成り立たない。これは $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ という例から分かる(念のため: $\int_C f(z) dz = 2\pi i \neq 0$)。

(i) と (ii) は同値で (iii) より強い

(iii) に条件を足して (ii) を導くのが Cauchy の積分定理である、と見ると、はつきりする。

Ω が単連結領域である場合は、(iii) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つ。これは Cauchy の積分定理の 1 つの形である (後で説明する予定であるが、証明をきちんとする時間的余裕があるかは分からない)。ゆえに

単連結領域に対しては、(i), (ii), (iii) は同値である

余談 6.5 (ベクトル解析を勉強した人に) 実は、ベクトル解析にもこれと対応する話がある¹⁵。

(i) が「ベクトル場 $\mathbf{f}$ がポテンシャルを持つ」、(ii) が $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 、(iii) が $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ 、ということになる。(i) と (ii) は同値で、(i) (あるいは (ii)) から (iii) が導かれるが、逆は一般には成り立たず、単連結領域であれば逆も成立する、というのは同じである。■

余談 6.6 高木貞治の解析概論にはこの辺りのことを次のように書いてある。(i) と (ii) に相当することを「かりに積分可能ということにしてみよう」…(中略)…「この意味において、複素数の世界では、微分可能も積分可能も同意語である。驚嘆すべき朗らかさ！」とある。印象的な言い回しだけど (持っている人は原文を読むことを勧めます)、単連結などの条件がないと同意でないことは注意しよう。■

余談 6.7 実は任意の f に対して (iii) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つならば、 Ω は単連結である。■

(i), (ii), (iii) のこのような関係をはつきりさせるのが、この講義の重要な課題である。では (ii) $\Rightarrow$ (i) を証明しよう。

命題 6.8 (任意の閉曲線に沿う線積分が 0 ならば原始関数を持つ) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つとする。このとき、ある正則関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $F' = f$ 。

証明 Ω 内の任意の点 a を取る。 Ω が弧連結であるから、任意の $z \in \Omega$ に対して、 a を始点、 z を終点とする Ω 内の区分的に C^1 級の曲線 C_z が存在する。

$$F(z) := \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta$$

とおく。 $F(z)$ の値は C_z の取り方にはよらない。実際、 a を始点、 z を終点とする Ω 内の 2 曲線 C_z, C'_z があるとき、 $C := C_z + (-C'_z)$ とおくと、 C は閉曲線であるので、条件 (ii) から

$$0 = \int_C f(\zeta) d\zeta = \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{C'_z} f(\zeta) d\zeta$$

が成り立つからである。

¹⁵ベクトル解析の場合は、クロース・アップされる条件が (i), (iii) なのに、関数論では (ii), (iii) がクロース・アップされるのはなぜなのだろう？Cauchy の積分定理のせい？

この F が f の原始関数であることを示す。任意の $z \in \Omega$ に対して、 $\exists \varepsilon > 0$ $D(z; \varepsilon) \subset \Omega$. ゆえに $|h| < \varepsilon$ を満たす任意の h に対して、 z から $z+h$ に向かう線分 $[z, z+h]$ は Ω に含まれる。 C_{z+h} として $C_z + [z, z+h]$ を選ぶことにより、

$$F(z+h) - F(z) = \int_{C_z + [z, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

一方

$$\int_{[z, z+h]} d\zeta = [\zeta]_{\zeta=z}^{\zeta=z+h} = h$$

であるから、 $\int_{[z, z+h]} f(z) d\zeta = f(z)h$ であるので、 $h \neq 0$ とするとき

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \int_{[z, z+h]} |d\zeta| = \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

f は z で連続であるから、この右辺は、 $h \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する。ゆえに $F'(z) = f(z)$. ■

6.4 星型領域における Cauchy の積分定理

単連結領域における Cauchy の積分定理が1つの(切りの良い)目標であるが、単連結領域の議論は少し手間がかかるので、ここでは、星型領域における Cauchy の積分定理を述べて証明しよう。この後に控えている、正則関数の性質を調べる議論に必要な Cauchy の積分公式は、円盤領域 (これは星型領域) に関するもので十分なので、Cauchy の積分定理の一般性を追求することは当面後回しにする、ということである。

定義 6.9 (星型) Ω を $\mathbb{C}$ の部分集合とする。 Ω が**星型** (star-shaped) とは、

$$(\exists a \in \Omega)(\forall z \in \Omega) \quad [a, z] \in \Omega$$

が成り立つことをいう。ただし $[a, z] = \{(1-t)a + tz \mid t \in [0, 1]\}$ (a と z を結ぶ線分).

点 a のことを明示する言い方もある。すなわち、 $(\forall z \in \Omega) [a, z] \in \Omega$ が成り立つとき、 Ω は a について星型である、という。

良くある説明に次のようなものがある。 Ω が部屋の見取り図であるとする。部屋全体を明るくするために、1つのライトだけで足りる場合が星型で、そうでない場合が星型でない。つまり、ある場所にライトをおいたとき、部屋のすみずみまで光が届くように出来るならば、その場所を a として定義の条件が満たされる、ということである。

例 6.10 $\mathbb{C}$, 三角形の内部、開円板、 $\mathbb{C}$ から負軸を取り除いた領域

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\},$$

そして (もちろん) “星の形” $\star$ の内部などは星型である。一方、 $\mathbb{C}$ から原点を除いた領域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は星型ではない (どこにライトを置いても、原点の影になる半直線が出来る)。■

余談 6.11 色々な用語を知っている人が疑問に感じた時に、頭の中の整理を助けるための情報 (疑問に感じていない人は読み飛ばして OK)

Ω は三角形の内部または開円盤 $\Rightarrow \Omega$ は凸領域 $\Rightarrow \Omega$ は星型領域 $\Rightarrow \Omega$ は単連結領域

定理の条件を、一番一般的な “単連結” にしたいのは山々だけど、長めの議論が必要になるので、それは後回しにして、とりあえず星型でやっておく、ということである。■

補題 6.12 (星型領域で定義された正則関数は原始関数を持つ) Ω は $\mathbb{C}$ の星型領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とすると、 f の原始関数が存在する。すなわち、ある正則関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $F' = f$ 。
(f は Ω で連続で、 Ω 内の 1 点を除き正則と仮定を弱めても、同じ結論が成り立つ。)

(証明のあらすじを一言でまとめると、積分で原始関数を作る、ということになる。実関数の場合の $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ に相当する事実が成立するのが要点である。以下の証明の中の議論は、初めて見ると難しく感じるかもしれないが、実はワン・パターンである、ということは前項にも出て来たので分かるであろう。)

証明 Ω は星型であるから、ある $a \in \Omega$ が存在して、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、 $[a, z_0] \subset \Omega$ が成り立つ。そこで

$$F(z_0) := \int_{[a, z_0]} f(z) dz \quad ([a, z_0] \text{ は } a \text{ を始点、} z_0 \text{ を終点とする線分})$$

とおくことにより、 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が定義できるが、実は $F' = f$ が成り立つことを以下に示す。

Ω は開集合であるから、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、ある正数 ε が存在して $D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ 。

ゆえに $0 < |h| < \varepsilon$ を満たす任意の h に対して、 $z_0 + h \in \Omega$ 。3 点 $a, z_0, z_0 + h$ を頂点とする三角形 (周を含む) を Δ とすると、 $\Delta \subset \Omega$ (このことの証明は読者に任せる)。

(曲線としての) $[a, z_0] + [z_0, z_0 + h] - [a, z_0 + h]$ は、三角形の周を一周する閉曲線であるから (向きは正である場合もあるし、そうでない場合もあるが、いずれにしても) 補題 6.1 によって

$$\int_{[a, z_0]} f(z) dz + \int_{[z_0, z_0 + h]} f(z) dz - \int_{[a, z_0 + h]} f(z) dz = 0.$$

ゆえに

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{[z_0, z_0 + h]} f(z) dz.$$

(ここから後は、命題 6.8 の証明と同じである。一応書いておく。) これから

$$\begin{aligned}\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}-f(z_0) &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(z) dz - \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} dz \cdot f(z_0) \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} (f(z)-f(z_0)) dz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}-f(z_0) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \max_{z \in [z_0, z_0+h]} |f(z)-f(z_0)| \int_{[z_0, z_0+h]} |dz| \\ &= \max_{z \in [z_0, z_0+h]} |f(z)-f(z_0)|.\end{aligned}$$

f が z_0 で連続であるから、 $h \rightarrow 0$ のとき右辺は 0 に収束する。ゆえに

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} = f(z_0).$$

すなわち F は z_0 で微分できて $F'(z_0) = f(z_0)$. ■

問 49. 上の証明の中に現れた a, z_0, z_0+h を頂点とする三角形 Δ (三角形がつぶれている場合も考える) が Ω に含まれることを証明せよ。

($z_0 \in \Omega, z_0+h \in D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$, Ω が a について星型、という条件が成り立っている。)

問 50. (自分でそらで書けるようにしておくと良い。) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が連続ならば、 $z \in \Omega$ に対して、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta \rightarrow f(z)$ であることを示せ。

(大きさを 0 に近づけると、平均が密度に収束する、という関数論に限らず良く出て来る話である。)

定理 6.13 (星型領域に対する Cauchy の積分定理) Ω は $\mathbb{C}$ の星型領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とするとき、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ。

(f は Ω で連続で、 Ω 内の 1 点を除き正則、と仮定を弱めても同じ結論が成り立つ。)

証明 C の始点と終点をそれぞれ a, b とするとき、 C が閉曲線であるから $a = b$. f が原始関数 F を持つので、

$$\int_C f(z) dz = [F(z)]_a^b = F(b) - F(a) = 0. \blacksquare$$

系 6.14 (円盤領域に対する Cauchy の積分定理) D は $\mathbb{C}$ の円盤領域、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とすると、 D 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ。

(f は D で連続で、 D 内の 1 点を除き正則、と仮定を弱めても同じ結論が成り立つ。)

証明 円盤領域は星型領域であるから。 ■

例 6.15 ($1/z$ の原始関数) (もう Log は知っているわけだけど) 関数 $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ は原始関数を持たない (復習: $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$ だから)。領域 $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$ は、点 1 について星型であるので、 f を Ω に制限した関数 $f|_{\Omega}$ は原始関数

$$F(z) = \int_{[1,z]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (z \in \Omega)$$

を持つ (これは実は対数関数の主値 $\text{Log } z$ に等しい — 導関数と、 $z=1$ での値がそれぞれ一致するから)。また、 C が Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線ならば $\int_C f(z) dz = 0$. ■

次の例はとても重要である。慣れると簡単に分かる (「関数 $\frac{1}{z-a}$ が正則な範囲内で、曲線 $|z-c|=r$ を連続的に変形して曲線 $|z-a|=\delta$ に出来るから、 $\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a}$ 」あるいは Cauchy の積分公式 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ を $f \equiv 1$ に対して用いる) のだが、最初は一仕事である。

例 6.16 ($\frac{1}{z-a}$ の円周に沿う積分) $a, c \in \mathbb{C}$, $|c-a| < r$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

これを証明する。以下、式を用いて表すが、図を描いて議論することを勧める (板書はきっと図で説明する)。

11/24 反省点 1: 最初に方針を述べるべきだった。 $|z-c|=r$, $|z-a|=\delta$ での積分が一致することを言えば良い。そのためには、こういうまっすぐな路を加えて閉曲線を作る、厳密には開いておいて、後から閉じる。

11/24 反省点 2: 良くあるテクニックだけど、後の別解に示すように、 ε を持ち出す必要なかった。この単純な場合に、二つに切り離すのは盲点で、気が付かなかった。多分 (?) 別解の方が分かり易いだろう。

解 $c = a$ のときは簡単である。以下 $c \neq a$ の場合を考える。 $\rho = |c - a|$ とおくと $\rho > 0$.
 $a = c + \rho e^{i\phi}$ となる $\phi \in \mathbb{R}$ が取れる。
 $\rho = |c - a| < r$ であるから、 $\delta := (r - \rho)/2$ とおくと、 $\delta > 0$ であり、 $\overline{D(a; \delta)} \subset D(c; r)$.
 $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ を満たす ε に対して、

$$\begin{aligned} C_{1,\varepsilon}: z &= c + \rho e^{i\theta} \quad (\theta \in [\phi + \varepsilon, \phi + 2\pi - \varepsilon]), \\ C_{2,\varepsilon}: z &= a + \delta e^{i\theta} \quad (\theta \in [\phi + \varepsilon, \phi + 2\pi - \varepsilon]), \\ \Gamma_\varepsilon: z &= [(1-t)(\rho + \delta) + tr] e^{i(\phi + \varepsilon)} \quad (t \in [0, 1]), \\ \Gamma'_\varepsilon: z &= [(1-t)(\rho + \delta) + tr] e^{i(\phi + 2\pi - \varepsilon)} \quad (t \in [0, 1]), \\ C_\varepsilon &:= \Gamma_\varepsilon + C_{1,\varepsilon} - \Gamma'_\varepsilon - C_{2,\varepsilon} \end{aligned}$$

とおくと、 C_ε は $\varepsilon > 0$ のときは星型領域

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{a + re^{i\phi} \mid r \geq 0\}$$

内の閉曲線であり、 $\frac{1}{z-a}$ はそこで正則であるから、

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると¹⁶($\Gamma_0 = \Gamma'_0$ に注意して)

$$\int_{C_{1,0}} \frac{dz}{z-a} - \int_{C_{2,0}} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

すなわち

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} - \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\delta e^{i\theta}} \cdot i\delta e^{i\theta} d\theta = 2\pi i. \blacksquare$$

(ここから 2014/11/25)

$|a - c| > r$ のとき、 $R := \frac{r + |a - c|}{2}$ とおくと、 $r < R < |a - c|$ で、さらに

- $\frac{1}{z-a}$ は $D(c; R)$ で正則
- $|z - c| = r$ は円盤 $D(c; R)$ 内の閉曲線

が成り立つ。円盤領域における Cauchy の積分定理により、

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

$|a - c| < r$ の場合の別証明をいくつか紹介する。

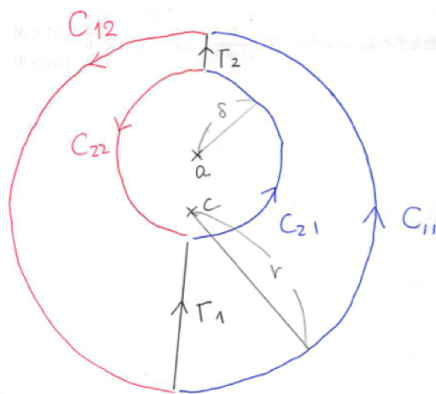


図 4: 切り込みを入れて二つの閉曲線の和として表す

- (a) 図 4 のような曲線 C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} , Γ_1 , Γ_2 を導入する。 $C_{11} + C_{12}$, $C_{21} + C_{22}$ はそれぞれ $|z - c| = r$, $|z - a| = \delta$ であるから、

$$(10) \quad \int_{C_{11}+C_{12}} \frac{dz}{z-a} = \int_{C_{21}+C_{22}} \frac{dz}{z-a}$$

を証明すれば良い。

ここからは演習問題にする。

- (b) $|z - c| = r$ を満たす任意の z に対して、

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-c) - (a-c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-c}{z-c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で $|\text{公比}| = \left| \frac{a-c}{z-c} \right| = \frac{|a-c|}{r} < 1$ (z によらない!) であるから、Weierstrass の M-test より $|z - c| = r$ 上で一様収束する。ゆえに項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z-c|=r} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (a-c)^n 2\pi i \delta_{n0} = 2\pi i.$$

- (c) 教科書は、Green の定理から次の形の Cauchy の積分定理を導いている。(Green の定理¹⁷ 等の証明を他の本任せにしているので、あまりこの定理を使いたくはないのだけど…)

D は $\mathbb{C}$ の領域で、その境界は有限個の互いに交わらない滑らかな単純閉曲線からなるとする。 f は $\bar{D} = D \cup \partial D$ を含む領域上で正則とすると、 $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$. (∂D は、進行方向の左手に領域を見るように向きがつけられている、と仮定していると思われる。)

¹⁶ここを厳密にやるのは演習問題とする。

¹⁷実は私は、そういう形の Green の定理の証明を読んだことがない (思いつく本が一冊だけあるが、ちょっと読みにくそう)。自力でも証明できないので、使うのは気が引けてしまう。

$\frac{1}{z-a}$ は $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > \delta, |z-c| < r\}$ の閉包を含む領域で正則で、 D の境界は $C_1: |z-c|=r$ と $C_2: |z-a|=\delta$ の像からなり、 C_1-C_2 は、進行方向の左手に D を見る向きになっているので

$$0 = \int_{\partial D} \frac{dz}{z-c} = \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} - \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a}. \blacksquare$$

問 51. (10) を示せ。

余談 6.17 (言い訳) 関数論のテキストで、数学色の強いやつは、三角形とか凸領域とか、ごちゃごちゃ書いてあって、訳が分かんない、というボヤキと言うか、文句をネットでつぶやいている人がいた(すみません、ここでは星型領域でやりました...). まあ、Cauchy の積分定理を定積分計算に利用しよう(それ以外は興味ないぞ) などという場合は、出て来る曲線は円弧とか線分とかで作った単純なものが多いので、「囲む」にしても直観で処理して問題は生じないのだが、一般の場合に何か主張する(定理を得る)ためには、それなりの準備が必要になる、ということである。■

7 円盤における正則関数の性質

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

命題 7.1 (円盤における Cauchy の積分公式) $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$ に対して、 $D := D(c; R)$, $C = \partial D$ とおく。 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、 $\overline{D} \subset \Omega$ を満たし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とするとき、任意の $z \in D$ に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(状況を図に描くこと。)

証明

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & (\zeta \in \Omega \setminus \{z\}) \\ f'(z) & (\zeta = z) \end{cases}$$

とおくと、 $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で、 $\Omega \setminus \{z\}$ で正則である。

円盤領域は星型領域であるから、星型領域における Cauchy の積分定理により、

$$\int_C g(\zeta) d\zeta = 0.$$

ゆえに

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z). \blacksquare$$

7.2 正則関数の巾級数展開可能性

この項で、この講義の1つの大きな目標を達成する。おっと「一様収束するならば項別積分可能」を忘れていた。

命題 7.2 C は $\mathbb{C}$ 内の区分的に C^1 級の曲線、 $\{f_n\}$ は C^* 上の連続関数からなる関数列で、 C^* 上 f に一様収束するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz.$$

証明 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f_n(z) - f(z)| |dz| \leq \sup_{z \in C^*} |f_n(z) - f(z)| \int_C |dz| \rightarrow 0. \blacksquare$$

各点の近傍で巾級数展開できる関数を伝統的に**解析関数** (analytic function) と呼ぶ。

定理 7.3 (正則関数は解析的) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$, $R > 0$, $\overline{D(c; R)} \subset \Omega$ とするとき、

$$(11) \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta$$

とおくと、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c; R)).$$

証明 $D := D(c; R)$, $C := \partial D$ とおく (C はパラメーター曲線 $\zeta = c + Re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), あるいはその像 $C^* = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - c| = R\}$ を表す)。任意の $z \in D$ に対して、Cauchy の積分公式から

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$r := \frac{|z - c|}{R}$ とおくと、 $0 \leq r < 1$ で、任意の $\zeta \in C$ に対して、 $\left| \frac{z - c}{\zeta - c} \right| = r$ であるから、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) + (c - z)} = \frac{1}{\zeta - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - c}{\zeta - c}} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n.$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n d\zeta.$$

f は C^* で連続であるから、 $M := \max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|$ が存在する。

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n \right| \leq \frac{M}{R} r^n.$$

$M_n := \frac{M}{R} r^n$ とおくと、 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束するので、Weierstrass の M-test により、級数は円周 C^* 上一様収束する。ゆえに項別積分が出来て、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \right) (z - c)^n.$$

すなわち

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n. \blacksquare$$

(11) の右辺の積分は、一見 R に依存するようだが、そうではないことに注意しよう。つまり、 c を定めたとき、 $R > 0$, $\overline{D(c; R)} \subset \Omega$ を満たす R は無数に存在するが、 a_n の値そのものは R によらず定まる。そのことは、実は

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

が成り立つことから分かるが、次のようにしても分かる (この後者の考え方が後で重要になる)。 $0 < R_1 < R_2$, $\overline{D(c; R_2)} \subset \Omega$ とするとき、被積分関数が $D = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid R_1 < |\zeta - c| < R_2\}$ の閉包を含むある開集合で正則なことから、

$$(*) \quad \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta - \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta = 0.$$

問 52. $(*)$ を確かめよ。

系 7.4 正則関数は何回でも微分可能である。

証明 収束中級数の定める関数は、収束円の内部で何回でも微分可能であるから。 ■

系 7.5 複素関数が原始関数を持つならば、実は正則関数である。

証明 複素関数 f に対して $F' = f$ を満たす F が存在したとする。 F は正則であるから、無限回微分可能で、特に 2 回微分可能であるから、 $f = F'$ は 1 回微分可能、すなわち正則である。 ■

系 7.6 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $z \in \Omega$, $R > 0$, $\overline{D(z; R)} \subset \Omega$ とするとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(12) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

(Cauchy の積分公式で積分記号下の微分を n 回行った式が成立する。)

証明 命題の記号で $f^{(n)}(c) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta$. この c を z と書き換えただけである。 ■

8 二つ目のイントロと積分路の変形

今後の見通しを述べ、教科書との接続をし、積分路の変形という概念を紹介する。

8.1 二つ目のイントロ

これまでは、正則関数が冪級数展開可能であることを示すことが大きな目標である、と言ってきて、それが果たされたし、Cauchy の積分定理も円盤に対して紹介できたし、ほんと一段落。それで今後の話の流れをおおまかに説明する。

- (冪級数展開を利用した) 正則関数の性質の詳しい分析
- **孤立特異点**に注目し Cauchy の積分公式を利用して、孤立特異点の周りの **Laurent 展開** (the Laurent expansion) を導き、孤立特異点の **留数** (residue) を定義する。
 c が孤立特異点とは、 $\exists R > 0$ s.t. $0 < |z - c| < R$ で正則ということ、 f の c の周りの Laurent 展開とは

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (0 < |z - c| < R)$$

という形の式、実は a_n は

$$a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta$$

という式で表される (Taylor 展開の係数と形が同じじゃないか!)。 f の c における留数 $\text{Res}(f; c)$ とは

$$\text{Res}(f; c) := a_{-1} \quad \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z - c| = R} f(z) dz \text{ に等しい} \right).$$

Q Laurent 級数、負の冪があって扱い方難しくないですか？

A 二つ目の $\sum$ は、 $\zeta := \frac{1}{z - c}$ とおくと、 ζ の冪級数だから、すべて冪級数任せに出来る。全然難しくない。

これまで何となく問題児のようだった $\frac{1}{z - c}$ を集中的に攻略する、ということになる。

- 定積分計算への留数の応用

8.2 教科書に載っている Cauchy の積分定理

教科書をめくっていた人は、教科書に書いてある Cauchy の積分定理の話と、これまでの授業の話が違っていることに気づいていたと思う。

定理 8.1 (教科書の定理 3.20) D は $\mathbb{C}$ の領域で、その境界 ∂D は、有限個の互いに交わらない区分的 C^1 級の単純閉曲線からなり、それら閉曲線の進行方向の左手に D が見えるとする (こうなっているとき ∂D は正の向きであるという)。このとき、 $\overline{D}$ を含む開集合で正則な任意の f に対して、

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

(閉曲線や、複数の閉曲線の和で表される曲線に沿っての線積分は、**周回積分** (a contour integral) と呼ばれ、そのことを強調するため $\oint$ と書かれることがある。TEX では `\oint` と入力する。)

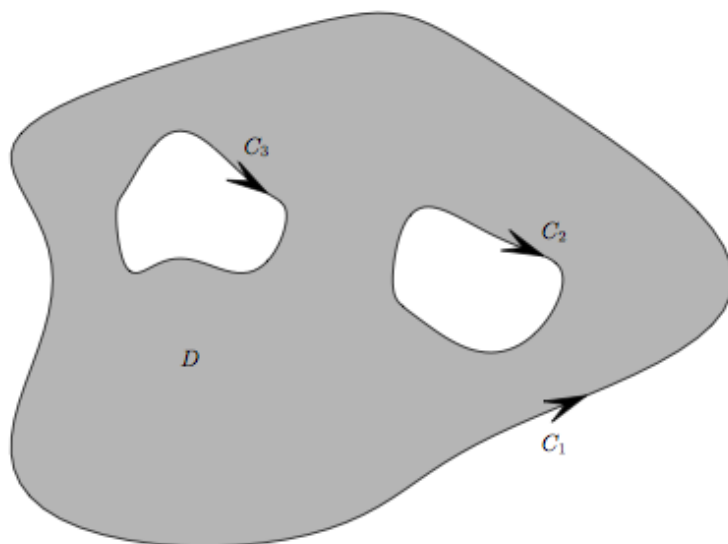


図 5: 領域 D の境界 ∂D が $C_1 + C_2 + C_3$ に等しい

これまで、この定理を採用しなかった理由を (時間をかけてまで) 説明する価値があるか疑問なので、授業では省略する (講義ノートでは、以下の 8.4 「授業の楽屋裏」 で説明する)。

授業では教科書と違う路線をたどったため、三角形の周に沿って積分すると 0 とか、星型領域内の任意の閉曲線に沿って積分すると 0 とか、少し説明に時間がかかったが、それは後で役に立つ (例えば、積分路の変形に関する一般的な定理の証明など)。

一方、この定理 8.1 は便利なので、今後は使用しても構わないことにする (普通は、後で説明する理由で、導関数 f' の連続性が気になるところだけけれど、それはもう証明できたわけだし)。

使い方を説明するための例をあげることにする。

例 8.2 (しつこいようだけど、やっかいなものは、逆にとことん調べるのが良いと思う。)

$c, a \in \mathbb{C}, r > 0, |c - a| < r$ とするとき、

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

を示そう。 $0 < \delta < r - |a - c|$ を満たす δ をとり、

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r, |z - a| > \delta\},$$

$$C_1: |z - c| = r,$$

$$C_2: |z - a| = \delta$$

とおくと、 D は領域、 C_1 と C_2 は互いに交わらない C^1 級の単純閉曲線で、向きまで考慮して $\partial D = C_1 - C_2$ である。ゆえに

$$0 = \oint_{\partial D} \frac{dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{dz}{z-a} - \int_{C_2} \frac{dz}{z-a}.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \int_{C_2} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \blacksquare$$

この例の議論と同様にして、Cauchy の積分公式も証明できる (本質的に教科書の証明と同じ)。念のため書いておく。

例 8.3 (定理 8.1 を用いた Cauchy の積分公式の証明) 上の例と同じようにして、 $0 < \delta < r - |a - c|$ を満たす任意の δ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\delta} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} \cdot i\delta e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \delta e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \delta e^{i\theta}) d\theta - f(a) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + \delta e^{i\theta}) - f(a)| \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + \delta e^{i\theta}) - f(a)|. \end{aligned}$$

$\delta \rightarrow 0$ とすると右辺は 0 に収束する。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

これは (円盤内の) Cauchy の積分公式にほかならない。 ■

8.3 積分路の変形について

閉曲線に沿う正則関数の線積分は、関数が正則な範囲で曲線を連続的に変形しても、線積分の値は変わらない (図を使って説明すること — 図は準備中)。そのことを使って線積分の値を求めることがしばしば行われる。その証明は難しくはないが、それは後回しにする。

ここでは Cauchy の積分定理を使って積分路を変形する例をいくつかあげておく。既に $|z - c| = r$ を $|z - a| = \delta$ に変形する議論を紹介したが、同類をもう少し追加、ということである。

次の例は教科書に載っているものである (例題 3.24 に $2\pi i$ をかけたもの)。楕円に沿う線積分は、定義に従って計算しようとするのが難しいが、この例では、被積分関数が正則な範囲で積分路を変形することで、2つの円周に沿う線積分の和に帰着している。これは、後で説明する留数定理を用いて計算するのにピッタリの問題であるが、以下の計算はその内容を先取りしたようなものになっている。

例 8.4 (後でもっと簡単に解くけれど) C を楕円 $z = 2\cos\theta + i\sin\theta$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とするとき

$$I = \int_C \frac{2z}{z^2 - 1} dz$$

を求めよ。

被積分関数を $f(z)$ とおき、部分分数分解しておく：

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1} = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}.$$

正数 ε に対して、 $z = 1 + \varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) を $C_{1,\varepsilon}$, $z = -1 + \varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) を $C_{-1,\varepsilon}$ とおくと、 ε が十分小さければ、 C , $C_{1,\varepsilon}$, $C_{-1,\varepsilon}$ は互いに交わらない。

このとき

$$D := \left\{ z = x + iy \mid \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} < 1 \wedge |z+1| > \varepsilon \wedge |z-1| > \varepsilon \right\}$$

とおくと、 D は領域で

$$\partial D = C - C_{1,\varepsilon} - C_{-1,\varepsilon}.$$

$\overline{D}$ は 1, -1 を含まないので、 f は $\overline{D}$ を含むある開集合で正則である。ゆえに Cauchy の積分定理 (定理 8.1) から、

$$0 = \int_{\partial D} f(z) dz = \int_C f(z) dz - \int_{C_{1,\varepsilon}} f(z) dz - \int_{C_{-1,\varepsilon}} f(z) dz.$$

ゆえに

$$\int_{C_{1,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{C_{1,\varepsilon}} \frac{dz}{z+1} + \int_{C_{1,\varepsilon}} \frac{dz}{z-1} = 0 + 2\pi i = 2\pi i.$$

(第1項は、 $C_{1,\varepsilon}$ が $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ に含まれ、 $\frac{1}{z+1}$ はそこで正則であることから、Cauchy の積分定理より 0 である。第2項は例の積分である。)

同様にして

$$\int_{C_{-1,\varepsilon}} f(z)dz = \int_{C_{-1,\varepsilon}} \frac{dz}{z+1} + \int_{C_{-1,\varepsilon}} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i + 0 = 2\pi i.$$

ゆえに

$$I = \int_C f(z) dz = \int_{C_{1,\varepsilon}} f(z)dz + \int_{C_{-1,\varepsilon}} f(z)dz = 4\pi i. \blacksquare$$

次の例は、熱方程式 $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ の基本解 $U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ を Fourier 変換を用いて求める計算に使われる、非常に有名な例である。

例 8.5 $h \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ih)^2} dx = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

(実軸 $\mathbb{R}$ に沿う積分が、 h だけ浮かせた直線 $\{x+ih \mid x \in \mathbb{R}\}$ に沿う積分と等しい。)

証明 $f(z) = e^{-z^2}$ ($z \in \mathbb{C}$) とおくと、 f は $\mathbb{C}$ で正則である。

任意の $R > 0$ に対して、

$$\Gamma_{1,R} := [-R, R], \quad \Gamma_{2,R} := [R, R+ih], \quad \Gamma_{3,R} := [-R+ih, R+ih], \quad \Gamma_{4,R} := [-R, -R+ih],$$

$$\Gamma_R := \Gamma_{1,R} + \Gamma_{2,R} - \Gamma_{3,R} - \Gamma_{4,R}$$

とおく。 Γ_R は星型領域 $\mathbb{C}$ における閉曲線であり、 f は $\mathbb{C}$ で正則であるから、Cauchy の積分定理によって、

$$(13) \quad 0 = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\Gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz - \int_{\Gamma_{3,R}} f(z)dz - \int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz.$$

$\Gamma_{1,R}$ は $z = x$ ($x \in [-R, R]$) とパラメーター付けできるので、 $dz = dx$ より

$$\int_{\Gamma_{1,R}} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx.$$

この積分については、 $R \rightarrow \infty$ のとき、 $\sqrt{\pi}$ に収束することが知られている：

$$(14) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

同様に $\Gamma_{3,R}$ は $z = x+ih$ ($x \in [-R, R]$) とパラメーター付けできるので、 $dz = dx$ より

$$\int_{\Gamma_{3,R}} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x+ih) dx = \int_{-R}^R e^{-(x+ih)^2} dx.$$

$\Gamma_{2,R}$ は $z = R+ith$ ($t \in [0, 1]$) とパラメーター付けできるので¹⁸、

$$|f(z)| = \left| e^{z^2} \right| = e^{\operatorname{Re}(-z^2)} = e^{\operatorname{Re}(-(R+ith)^2)} = e^{-R^2+t^2h^2} \leq e^{-R^2+h^2}.$$

¹⁸ $h > 0$ であれば $z = R+iy$ ($y \in [0, h]$) とすれば良いけれど、 $h < 0$ のときは不適当なので、 $z = R+ith$ とした。

ゆえに

$$\left| \int_{\Gamma_{2,R}} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma_{2,R}^*} |f(z)| \int_{\Gamma_{2,R}} |dz| \leq e^{-R^2+h^2} |h|.$$

ゆえに

$$(15) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{2,R}} f(z) dz = 0.$$

同様に $\Gamma_{4,R}$ は $z = -R + ith$ ($t \in [0, 1]$) とパラメーター付けできるので、

$$|f(z)| = \left| e^{z^2} \right| = e^{\operatorname{Re}(-z^2)} = e^{\operatorname{Re}(-(-R+ith)^2)} = e^{-R^2+t^2h^2} \leq e^{-R^2+h^2},$$

$$\left| \int_{\Gamma_{4,R}} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma_{4,R}^*} |f(z)| \int_{\Gamma_{4,R}} |dz| \leq e^{-R^2+h^2} |h|.$$

ゆえに

$$(16) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{4,R}} f(z) dz = 0.$$

(13) から

$$\int_{\Gamma_{3,R}} f(z) dz = \int_{\Gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{\Gamma_{2,R}} f(z) dz - \int_{\Gamma_{4,R}} f(z) dz$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R e^{-(x+ih)^2} dx - \sqrt{\pi} \right| &= \left| \int_{-R}^R e^{-x^2} dx - \sqrt{\pi} + \int_{\Gamma_{2,R}} f(z) dz - \int_{\Gamma_{4,R}} f(z) dz \right| \\ &\leq \left| \int_{-R}^R e^{-x^2} dx - \sqrt{\pi} \right| + \left| \int_{\Gamma_{2,R}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Gamma_{4,R}} f(z) dz \right|. \end{aligned}$$

(14), (15), (16) から、 $R \rightarrow \infty$ のとき、右辺は 0 に収束することが分かる。以上から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ih)^2} dx = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

8.4 楽屋裏 (授業では話しません, 興味がなければ読む必要はないです)

Cauchy の積分定理には色々な形があるけれど、この授業で教科書のやり方を採用しなかった理由を説明する。

Cauchy の積分定理は、もともとは次の形で述べられることが多かったそうである。

定理 8.6 任意の区分的に C^1 級な単純閉曲線 C と、 C の囲む領域 D の閉包 $\bar{D}$ を含む (ある) 開集合で正則な f に対して、 $\int_C f(z) dz = 0$.

単純閉曲線がいつでも領域を囲むことは、証明が必要なこととはみなされていなかった。19世紀の末頃、それは明らかなことではなく、証明を要することだと認識されるようになり、Camille Jordan (1838–1922) が最初にその証明を試みたことにちなみ、この定理は今では **Jordan 曲線定理** (Jordan curve theorem, Jordan 閉曲線定理) と呼ばれている (という説明を一松 [1] で読んだことがあり、受け売りしているだけ。Wikipedia によると、最初に定式化したのは、Bolzano-Weierstrass の定理で有名な Bolzano であるとか。)。

Jordan 曲線定理は、明らかとも思えるその主張の簡単さからは想像できないほど、証明するのが大変である。

そこで関数論のテキストでは、20 世紀の途中から、徐々に Jordan 曲線定理の利用を避けるようになり、今では Jordan 曲線定理を前提とするテキストはほとんどない。

それではどうするかというと、大まか、次の二つのやり方がある。

- (1) (この授業のやり方) 簡単な曲線 (三角形や長方形の周とか)、簡単な領域 (円盤領域や星型領域) から始め、それで円盤における Cauchy の積分公式を導いてしまう。正則関数の性質や Laurent 展開、留数の議論をするのはそれで十分である。それ以降、必要があれば、

- 曲線 C の点 a の周りの回転数 $n(C; a)$ を導入してトポロジカルな (位相幾何学的な) 問題进行处理する
- ホモトピー形の Cauchy の積分定理を導入する

などを行う。

- (2) 次の定理からスタートする。

定理 8.7 $\mathbb{C}$ の領域 D の境界は、1つの区分的 C^1 級単純閉曲線 C の像になっていて、 C の進行方向の左手に D を見るようになっていいるとする。このとき、 $\overline{D}$ を含むある開集合で正則な任意の f に対して

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

閉曲線 C が一般に領域を囲むかどうかは問題にしないで、領域 D があることを仮定するところから始めるのが、(細かいようであるが) 話を単純化する工夫である。実際に定理を応用するとき、領域 D は確定していることが多いので、その存在を示すための一般化に労力をつぎ込まない、ということである。

それでこの定理はどうやって証明するかであるが、それについては Green の定理を使う。Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z) dz &= \int_{\partial D} (u dx - v dy) + i \int_{\partial D} (v dx + u dy) \\ &= \iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy \\ &= \iint_D 0 dx dy = 0. \end{aligned}$$

この方法の長所の1つとして、Green の定理は、 D の境界が、有限個の互いに交わらない単純閉曲線の和である場合に拡張した形で述べられていることが多く¹⁹、これを使うと Cauchy の積分定理も便利な形 (定理 8.1) になることがあげられる。

一方、短所としては次のものがあげられる。

- (a) 普通の Green の定理は、 u_x, u_y, v_x, v_y の連続性は仮定するので、Cauchy の積分定理の仮定、または関数 f の正則性の定義に、導関数 f' の連続性を含める必要がある。
- (b) Green の定理の証明にはそれなりの手間がかかる。ここをどうするかはちょっと悩ましい。多くのテキストで、Green の定理は微積分で習うことだからと言って、証明は他の本に丸投げしてしまうことが行われているが、無責任であると思われる。誠実な本には、堀川 [11], 小平 [12] がある (どちらも素晴らしい本であるが入手しづらい)。^[11] では、Green の定理を簡単な場合に限って、きちんと親切に説明し、それを用いた Cauchy の積分定理を使って関数論を展開している²⁰。
- (c) 曲線が、領域の境界をなすものに限られるので、例えばポテンシャルを構成したりするときに少し面倒になる。

色々考えた末に、この講義では (1) の路線を選んだ。結果的には多数派に所属したことになる。

(ここは前に述べたことの繰り返し) 一方で、定理 8.1 は使ってもらっても構わない。普通、その場合一番気になるのは導関数 f' の連続性なのだが、この講義ではそれは証明済みなので (「正則関数は無限回微分可能」)、そこはまったく気にする必要がある。堂々と使ってもらって結構である。

9 正則関数の性質

9.1 正則関数の零点とその位数

2014 年度の講義ではもっと後になってから (§11.2) 説明したが、この辺でやっておくべきであった。正則関数が $f(c) = 0$ を満たすとき、次の2つのいずれか一方が成り立つ。

$$(i) (\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) f^{(n)}(c) = 0.$$

$$(ii) (\exists k \in \mathbb{N}) f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0, f^{(k)}(c) \neq 0.$$

(ii) の場合は $f(z) = (z - c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$ を満たす正則関数 g が存在する。多項式の場合に、同様の命題 ($g(z) \in \mathbb{C}[z]$ とする) が因数定理と帰納法で導かれることに注意する。

¹⁹しかし証明をきちんと書いてある本は和書では杉浦 [10] くらいしかない。

²⁰余談になるが、以前微積分を担当していたとき、色々考えた末に、Green の定理で無理をせず、証明が比較的簡単に済む場合に限り、後はその限定版の定理だけを使って議論を展開した。関数論でもそれと同じことをすれば良いということだが、そういう書き方をしている本がなぜかあまりない。^[11] の議論の進め方は腑に落ちた。

9.2 一致の定理

0 でない多項式は有限個の根 (零点) しか持たないが、0 でない正則関数は無限個の零点を持ち得る ($\sin z$ が分かり易い例である)。しかし、次の (非常に重要な) 命題が成り立つ。

定理 9.1 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理) D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ と $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in D$ 、複素数列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は二条件

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } z_n \in D \text{ かつ } z_n \neq c \text{ かつ } f(z_n) = g(z_n)$$

を満たすとするとき、 D 全体で $f = g$ 。

(例えば D 内の線分や正則曲線の上で $f = g$ が成り立っていれば、二条件 (i), (ii) を満たす複素数列の存在は明らかであるので、 $f = g$ が成り立つ。)

証明 $f - g$ を新たに f と置いて考えることで、 $g = 0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。 D は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) D(c; \varepsilon) \subset D$ 。定理 7.3 より、 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c; \varepsilon)$ で $f = 0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n = 0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、 $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ s.t. $a_n \neq 0$ 。そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0.$$

すると

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n$ は $z \in D(c; \varepsilon)$ で収束し、

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - c)^k} = \frac{0}{(z_n - c)^k} = 0.$$

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$ 。ゆえに

$$f(z) = 0 \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

(後半)

$$D_0 := \{z \in D \mid (\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) f^{(n)}(z) = 0\}, \quad D_1 := \{z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) f^{(n)}(z) \neq 0\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

$f^{(n)}$ が連続関数であることから、 D_1 は開集合であることが分かる²¹。

一方、 D_0 も開集合である。実際、 $z_0 \in D_0$ とするとき、 $(\exists R > 0) (\exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \cup \{0\}})$
 $(\forall z \in D(z_0; R)) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. ところが $z_0 \in D_0$ より、任意の n に対して $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ であるから、 $f(z) = 0$ ($z \in D(z_0; R)$). これから容易に $D(z_0; R) \subset D_0$ が分かる。
 ゆえに D_0 は開集合である。

また $c \in D_0$ であるから、 $D_0 \neq \emptyset$.

以下で示す命題 9.2 より、 $D_1 = \emptyset, D_0 = D$. ゆえに $f = 0$ in D . ■

定理の途中で使った命題を片付けておく。

命題 9.2 (弧連結な開集合は連結) D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、 D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D, D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、 D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

独白: この授業では、一般の連結性 (二つの共通部分のない開集合に分割したとき、一方が必

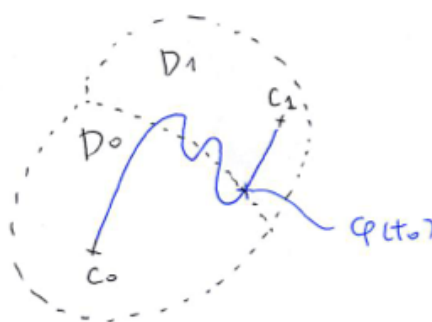


図 6: c_0 から c_1 に至る道、最後に D_0 を出るところ $\varphi(t_0)$

$\varphi(t_0)$ は D_0, D_1 のどちらに属しても矛盾が生じる。

ず空集合になること) を使わずに済ませるつもりだったが、結局は使うことになってしまった。使わなくても定理 9.1 は証明出来るけれど (そういう証明も書いてみたけれど)、それにある程度手間をかけるよりは、通常路線に戻る方が教育的だと判断した。

証明 背理法を用いる。 $D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。 $c_0 \in D_0, c_1 \in D_1$ を取る。 $\exists \varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega, \varphi(0) = c_0, \varphi(1) = c_1$ となる連続関数 φ が取れる。

$$I_0 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

²¹実際、 $z_0 \in D_1$ とするとき、まず D が開集合であることから、 $(\exists \delta_1 > 0) D(z_0; \delta_1) \subset D$. また $(\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) f^{(n)}(z_0) \neq 0$. $\varepsilon := |f^{(n)}(z_0)|$ とおくと、 $\varepsilon > 0$ であり、 $f^{(n)}$ は連続であるから、 $(\exists \delta_2 > 0) (\forall z \in D : |z - z_0| < \delta_2) |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)| < \varepsilon$. このとき、 $|f^{(n)}(z)| = |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)| \geq |f^{(n)}(z_0)| - |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)| > \varepsilon - \varepsilon = 0$. ゆえに $f^{(n)}(z) \neq 0$. 従って $z \in D_1$. $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、 $\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0, 1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

D_0, D_1 が開集合で、 φ が連続であるから、 $\exists \delta_0 > 0, \exists \delta_1 > 0$ s.t. $[0, \delta_0] \subset I_0, [1 - \delta_1, 1] \subset I_1$.

$$t_0 := \sup I_0$$

とおくと、 $0 < t_0 < 1$. t_0 と $0, 1$ との距離は $d := \min\{t_0, 1 - t_0\} > 0$ である。

$t_0 \in I_0$ の場合、 $\exists \varepsilon_1 \in (0, d)$ s.t. $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0$. すると $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$ となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$ の場合、 $\exists \varepsilon_2 \in (0, d)$ s.t. $(t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1$. I_1 と共通部分のない I_0 の上限が I_1 の内部にあるのは矛盾である。■

系 9.3 (領域における) 正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち c が定数でない正則関数の零点 ($f(c) = 0$ を満たす) ならば、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

証明 結論を否定すると、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in D \cap D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) = 0.$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $0 < |z_n - c| < \frac{1}{n}$, $f(z_n) = 0$ を満たす $z_n \in D$ が取れる。一致の定理から $f = 0$ in D が導かれる。■

例 9.4 (実関数を正則に拡張する仕方は 1 つしかない) この講義では、初等関数について、微積分で得られた Taylor 展開の式を用いて、正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

から

$$(\star) \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

一致の定理によると、正則な $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ で、 $f(x) = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) を満たす f は存在するならば一意である。言い換えると、 $\cos x$ の拡張に、正則性を要求する限り、 $(\star)$ とする以外の選択肢はなかった。■

例 9.5 (関数関係不変の原理 (英語では言わない?)) 例えば指数法則

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

が $x, y \in \mathbb{R}$ について成り立つことは既知として、 x, y が複素数のときも成り立つことを示そう。

任意の $y \in \mathbb{R}$ を固定して、

$$f(z) := e^{z+y} - e^z e^y \quad (z \in \mathbb{C})$$

とおく。これは正則関数であり、 $z \in \mathbb{R}$ のとき $f(z) = 0$ を満たすので、一致の定理により $f = 0$ in $\mathbb{C}$. すなわち

$$e^{z+y} = e^z e^y \quad (z \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R}).$$

次に任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定して、

$$g(w) := e^{z+w} - e^z e^w \quad (w \in \mathbb{C})$$

とおく。これは正則関数であり、 $w \in \mathbb{R}$ のとき $g(w) = 0$ を満たすので、一致の定理により $g = 0$ in $\mathbb{C}$. すなわち

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}).$$

すなわち複素指数関数は指数法則を満たす。■

問 53. 三角関数の加法定理を証明せよ。

余談 9.6 (教科書の一致の定理の証明) 教科書では、証明の後半 (p. 41) で $t_0 = 1$ を示すために、「 $t_n < t_0, t_n \rightarrow t_0 (n \rightarrow \infty), z(t_n) \neq z(t_0)$ となる列を取れば」とあるが、条件 $z(t_n) \neq z(t_0)$ を満たすように取れる根拠が私には分からなかった。連続曲線 $z(t)$ が $t = t_0$ の近傍で停滞している場合を排除していないように思われる。(弧連結であることから、正則な曲線で結べることを想定している？それはそれで証明を要することである。) ■

9.3 平均値の定理と最大値原理

命題 9.7 (平均値の性質 (the mean-value property)) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$ とするとき、 $\overline{D}(c; r) \subset \Omega$ を満たす任意の $r > 0$ に対して、

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta.$$

(右辺は、円 $|z - c| = r$ での f の平均値であることに注意)

証明 Cauchy の積分公式を $z = c$ で適用して、

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta.$$

$\zeta = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とパラメータづけすると、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta}) d\theta. \blacksquare$$

余談 9.8 (実関数では) 実関数 $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ については、

$$u \text{ が平均値の性質を持つ} \Leftrightarrow \Delta u = 0 \quad (u \text{ は調和関数})$$

が成り立つ (Gauss の**球面平均の定理**²²とその逆)。

正則関数 f の実部・虚部 u, v ($u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$) については、 $\Delta u = \Delta v = 0$ が成り立つので、実調和関数の平均値の性質から、正則関数の平均値の性質を導くことも可能である。

次の最大値原理に相当する命題も調和関数版があり、非常に重要である。 ■

命題 9.9 (最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $z_0 \in \Omega$,

$$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$$

が成り立つならば、

$$(\exists C \in \mathbb{C})(\forall z \in \Omega) \quad f(z) = C.$$

(正則関数の絶対値が内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

証明 $M := |f(z_0)|$ とおく。

Ω は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$. $\rho := \varepsilon/2$ とおくと、 $\overline{D}(z_0; \rho) \subset \Omega$.

$0 < r \leq \rho$ なる任意の r に対して、平均値の性質から、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M.$$

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である²³。特に

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$ で、 $\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$ は連続であるから、

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]) \quad \text{i.e.} \quad |f(z)| = M \quad (|z - z_0| = r).$$

r の任意性から、

$$|f(z)| = M \quad (|z - z_0| \leq \rho).$$

命題 2.13 から、 f は $D(z_0; \rho)$ で定数関数に等しい: $(\exists C \in \mathbb{C}) f = C$ on $D(z_0; \rho)$.

一致の定理より、 Ω 全体で $f = C$. ■

²²偏微分方程式のテキスト、あるいは桂田 [13] の 3 章 5 節などを参照せよ。

²³ $f \leq g$ on $[a, b]$ ならば $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. もしも、さらに f と g が連続で、 $\exists x_0 \in [a, b] f(x_0) < g(x_0)$

(どこか一点で真不等号) が成り立つならば、 $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$. 対偶を取ると、 f と g が連続で

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ ならば $f \equiv g$.

9.4 Liouville の定理

定義 9.10 (整関数) $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (an entire function) という。

例 9.11 (整関数の例) 多項式関数、指数関数 e^z 、三角関数 $\cos z$, $\sin z$ は整関数である。 $\tan z$, $\log z$, $\frac{1}{1+z^2}$ は整関数ではない。 ■

定理 9.12 (Liouville の定理 (リウヴィユの定理, Liouville's theorem)) 有界な整関数は定数関数に限る。

証明 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則で、 $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall z \in \mathbb{C}) |f(z)| \leq M$ が成り立つと仮定する。
任意の正数 R に対して、ある $\{a_{n,R}\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,R} z^n \quad (z \in D(0; R)).$$

冪級数展開の係数の一意性から、 $\{a_{n,R}\}_{n=0}^{\infty}$ は R に依存しないことが分かる。ゆえに $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = 0$ を示そう。 $\forall R > 0$ に対して、Cauchy の積分公式から

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

であるから、

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{M}{R^{n+1}} |d\zeta|.$$

$\int_{|\zeta|=R} |d\zeta| = 2\pi R$ であるから、**Cauchy の評価式**と呼ばれる次の不等式を得る。

$$(17) \quad |a_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

ゆえに $R \rightarrow \infty$ として $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). ゆえに $(\forall z \in \mathbb{C}) f(z) = a_0$. ■

代数学の基本定理の証明を与えよう。準備として、多項式の $z \rightarrow \infty$ での挙動を調べておく。簡単にまとめると、 $|z|$ が大きいところでは、最高次の項が支配的である。

補題 9.13 (多項式の遠方での挙動) $n \in \mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j=0}^n \in \mathbb{C}^{n+1}$, $a_0 \neq 0$, $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ とするとき、

$$(\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1 - \varepsilon)|a_0||z|^n \leq |f(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_0||z|^n.$$

特に $(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) f(z) \neq 0$ が成り立つ。また、もしも $n \geq 1$ ならば $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$.

証明 $z \neq 0$ とするとき、

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \frac{a_2}{a_0 z^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n}.$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{1}{z^m} \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) であるから、 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1$. ゆえに

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|a_0| |z|^n} = 1.$$

これから、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in \mathbb{R}) (\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq R)$

$$\left| \frac{|f(z)|}{|a_0| |z|^n} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{|f(z)|}{|a_0| |z|^n} \leq 1 + \varepsilon. \blacksquare$$

命題 9.14 (代数学の基本定理 (the fundamental theorem of algebra)) $P(z)$ を複素係数の多項式で、その次数 n は 1 以上とすると、 $P(z)$ は少なくとも一つの根を持つ。

証明を二つ与えておく。

証明 (教科書の証明を少し修正してある。) 背理法を用いる。 $(\forall z \in \mathbb{C}) P(z) \neq 0$ と仮定する。このとき $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ は整関数である。

補題 ?? より、

$$(\exists M > 0)(\exists R^* \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq R^*) \quad |P(z)| \geq M|z|^n.$$

$\forall R \geq R^*$ に対して、

$$(\heartsuit) \quad (\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq \frac{1}{M|z|^n} \leq \frac{1}{MR^n}.$$

$|f|$ は $\overline{D}(0; R)$ で最大値を持つが、最大値の原理から、それは $|z| = R$ での最大値と一致する。それは (♥) により $\frac{1}{MR^n}$ で押えられる。結局、 $|f(z)| \leq \frac{1}{MR^n}$ ($z \in \mathbb{C}$). $R \rightarrow \infty$ とすると、 $|f(z)| = 0$. ゆえに $f(z) \equiv 0$. これは矛盾である。■

証明 (良く本に載っている証明) 背理法を用いる。 $(\forall z \in \mathbb{C}) P(z) \neq 0$ と仮定する。このとき、 $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ は整関数である。補題 ?? より、 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ であるから、

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq 1 \quad (|z| \geq R).$$

一方 $\overline{D}(0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合であり、 $|f|$ は連続関数であるから、Weierstrass の最大値定理によって、 $|f|$ は最大値を持つ：

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall z \in \overline{D}(0; R)) \quad |f(z)| \leq M.$$

ゆえに $(\forall z \in \mathbb{C}) |f(z)| \leq \max\{1, M\}$. Liouville の定理から、 f は定数関数である。ゆえに P も定数関数であるが、これは n の次数が 1 以上であることと矛盾する²⁴。■

注意 9.1 (教科書に対する物言い) 教科書 p. 80 の、最大値原理による代数学の基本定理の証明は曖昧である。 $(R \rightarrow \infty$ とするためには、 M が R より先に定まっている必要があるのに、「 R が十分大きければ適当に $M > 0$ を取って」なんて書いてある)。上に書いた証明は修正してあるが、大抵のテキストがそうしているように、Liouville の定理を用いた証明の方が簡単である。授業ではそちらを解説することにする。■

9.5 収束半径

与えられた関数の冪級数展開の収束半径については、係数を用いた公式 (ratio test (d'Alembert の公式) や Cauchy-Hadamard の公式) もあるが、元の関数の性質を元にした特徴づけが重要である。次の命題は、教科書のものとは少し変えてある。

命題 9.15 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$ とする。

$\mathcal{R} := \{R > 0 \mid D(c; R) \subset \Omega \text{ であるか、あるいは } f \text{ は } D(c; R) \text{ まで正則に拡張できる}\}$

とおくとき、 f の c のまわりの冪級数展開の収束半径 ρ は $\sup \mathcal{R}$ に等しい。

証明 $\rho > 0$ であることに注意する。(実際、 Ω は開集合であるから、 $D(c; \varepsilon) \subset \Omega$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する。 ε を小さく取り直して、 $\overline{D}(c; \varepsilon) \subset \Omega$ と出来る。このとき、定理 7.3 より、 f は $D(c; \varepsilon)$ で冪級数展開出来る。収束半径の定義より $\rho \geq \varepsilon$ であるから、 $\rho > 0$.)

ρ が有限の数である場合、収束半径の定義により $\rho \in \mathcal{R}$ であるから、 $\rho \leq \sup \mathcal{R}$ 。一方、 $R \in \mathcal{R}$ とするとき、 $\forall \varepsilon \in (0, R)$ に対して、 $\overline{D}(c; R - \varepsilon) \subset \Omega$ であるから、定理 7.3 が適用できて、 f の c の回りの冪級数展開は $D(c; R - \varepsilon)$ で収束する。ゆえに収束半径の定義から $R - \varepsilon \leq \rho$ 。 ε は任意であるから、 $R \leq \rho$ 。ゆえに $\sup \mathcal{R} \leq \rho$ 。従って $\rho = \sup \mathcal{R}$ 。

$\rho = \infty$ である場合、 f の c の周りの冪級数展開は $\mathbb{C}$ 全体で収束するので、その冪級数が定める関数は $\mathbb{C}$ で正則である。ゆえに特に任意の正数 R に対して、その冪級数は $D(c; R)$ で収束するので、 $R \in \mathcal{R}$ 。ゆえに $\sup \mathcal{R} = \infty$ であるから、 $\rho = \sup \mathcal{R}$ 。■

例 9.16 (有理関数の冪級数展開の収束半径) $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $P(z)$ と $Q(z)$ は互いに素) とするとき、 $P(z)$ のすべての根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を除いた $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ で f は定義されて正則である。

一方、各 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $\lim_{z \rightarrow \alpha_j} |f(z)| = \infty$ であるので、 $z = \alpha_j$ を含めて正則に拡張することは出来ない (α_j は後で定義する言葉を使うと、 f の極である)。

ゆえに、 $\forall c \in \Omega$ に対して、 f の c の回りの冪級数展開の収束半径は $\min_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j - c|$ である (最寄りの赤点までの距離に等しい)。■

²⁴もし $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ($a_0 \neq 0, n \geq 1$) が定数であれば、 $a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} \equiv 0$ である。「0 の代入と微分 (あるいは割り算)」によって、 $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ が得られ、 $a_0 \neq 0$ に矛盾する。

例 9.17 (教科書 p.81) 実関数

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

は $\mathbb{R}$ 全体で実解析的である。すなわち、 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して、 f は x_0 で冪級数展開できる:

$$(\exists r > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq 0})(\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0^n).$$

しかし $x = 0$ での冪級数展開

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

は $-1 < x < 1$ でしか収束しない (理由は各自チェックせよ)。それは $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ の $c = 0$ のまわりの冪級数展開の収束半径が、上の例から $\min\{|i-0|, |-i-0|\} = 1$ となるから、 $D(0; 1)$ では収束し、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ では発散することから分かる。■

例 9.18 (Bernoulli 数の母関数の収束半径) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ とおく。まず分母と分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。

$$\text{分母 } e^z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{Z}) z = 2n\pi i$$

であるから、 f は $D_0 := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{2n\pi i\}$ で正則な関数を定める。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

であるから、 $z \neq 0$ に対して

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

右辺の冪級数の収束半径は ∞ であるので、

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

とおくと、整関数 g が定まる。 $g(0) = 1 \neq 0$ に注意すると、

$$g(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0 \wedge e^z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad z = 2n\pi i.$$

そこで

$$D := \mathbb{C} \setminus \{2n\pi i \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} = D_0 \cup \{0\},$$

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{g(z)} \quad (z \in D)$$

とおくと、 $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則になり、 f の拡張になる (0 でも定義できた)。

特に $|z| < 2\pi$ で正則であるから、 $\exists \{B_n\}$ s.t.

$$(18) \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (|z| < 2\pi).$$

なお、 $\lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} |\tilde{f}(z)| = \infty$ であるから、 $z = \pm 2\pi i$ での値を ($z = 0$ のときと同様に) 適当に定義することによって、より大きい半径の円盤で正則になるようには出来ない。ゆえに (18) の収束半径は 2π である。

B_n は ^{ベルヌーイ}**Bernoulli 数** と呼ばれ、多くの重要な応用がある (冪乗和 $\sum_{n=1}^{\infty} n^k$ の公式, $\tan$ と $\cot$

の冪級数展開、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ の和, Euler-Maclaurin の公式, etc.)。

最初の数項を書くと

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \dots$$

B_n の一般項を表す簡単な式は知られていない (そのため、この冪級数の収束半径を、Cauchy-Hadamard の定理を使って求めることは難しいことに注意しよう)。Bernoulli 数の定義の仕方はいくつかあるが、上の議論はそのうちの一つである。

—— 手短な定義 (まとめ) ——

$f(z) := \frac{z}{e^z - 1}$ とおくとき、 $B_n := f^{(n)}(0)$ を Bernoulli 数という。

—— Mathematica で試す ——

$f(z)$ を 0 のまわりに 10 次の項まで Taylor 展開してみる。

`Series[z/(Exp[z]-1),{z,0,10}]`

そもそもベルヌーイ数を計算する関数 `BernoulliB[]` が用意されている。

`Table[BernoulliB[n],{n,0,10}]`

$f(z) + \frac{z}{2}$ は偶関数なので、 B_1 を除き、奇数次の項の係数 B_{2n-1} ($n \geq 2$) は 0 であることが分かる (偶関数は z^2 の冪級数に展開できることに注意)。

実は Bernoulli 数の定義には色々な流儀がある。

一応、上で定義したものがメジャーだと思っているが (だから上でそのように紹介したが)、それ以外で比較的多いのは、 $f(z)$ の代わりに $f(z) + z$ を用いた場合に得られるもので、そうすると、 B_1 だけが上の定義と異なり、 $B_1 = \frac{1}{2}$ となる。オリジナルの Jacob Bernoulli (1655–1705)

や関孝和 (1642–1708) はこちらを用いたということである (Bernoulli も関も冪乗和を考える過程で導いた)。

その他にも、偶数番目しか考えないとか (B_{2n} を B_n にする)、符号を変えたり、細かな流儀の違いがある。教科書は B_{2n} のみ定義し、それが正になるようにしている。 ■

問 54. 0 の近傍で正則な偶関数は z^2 の冪級数に展開されることを示せ。

余談 9.19 (Bernoulli 数の応用) Bernoulli 数は色々な基本的な問題の解を表すために使われる。いくつか紹介しよう。

$\cot, \tan, \coth$ などの冪級数展開:

$$\begin{aligned}\cot z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \\ z \coth z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n}, \\ \tan z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.\end{aligned}$$

(教科書の流儀では $\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ となる。)

冪乗和の公式 (関・Bernoulli の公式): ここでは $B_1 = 1/2$ とする。

$$\sum_{i=1}^n i^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

ゼータ関数の関数値:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Euler-Maclaurin の公式: f が $[0, n]$ で C^k 級とするとき

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) + f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

ただし $\tilde{B}_k(x)$ は、Bernoulli 多項式 (おっと、紹介し忘れた) $B_k(x)$ を周期 1 で拡張したものである。和を積分で評価したり、定積分を台形公式で近似するときの誤差評価をしたり (周期関数の 1 周期積分を台形公式で近似すると高精度と云う話がどこかであったけれど、それはなぜだろう...) 色々な使い道のある公式である。

Bernoulli 数については、荒川・息吹山・金子 [14] が詳しい。■

例 9.20 2 つの関数

$$f(z) := \frac{1}{z-1}, \quad g(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

はそれぞれ $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ で正則である。 f も g も $|z| < 1$ で正則であるから、 $h := f + g$ も $|z| < 1$ で正則であるが、実は h は $|z| < 2$ まで正則に拡張可能である。これは $g(z)$ の部分分数分解

$$g(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

を見れば明らかである。■

9.6 Schwarz の補題

(これはカットしよう。1 次分数変換とか、等角写像を説明するときにやればいいや。)

10 孤立特異点, Laurent 展開, 留数

いよいよ最終コーナーを回る、というところ。理工系の学科で関数論を学ぶときに最終目標とされる留数定理とそれを用いた定積分計算が視界に入ってくる。

10.1 冪級数 (テイラー級数)、負冪級数、ローラン級数の収束

正則関数は各点の近傍 (円盤領域) で冪級数展開 (Taylor 展開) できる、という結果 (定理 4.1) を得ているが、ここでは円環領域で (特別な場合として「孤立特異点のまわりで」) Laurent 展開という、負冪を含む級数に展開できる、という結果 (定理 10.5) を目指す。

ここでは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$$

という形の関数項級数を、負冪級数と呼ぶことにする (ここだけの用語)。

例 10.1 (負冪級数とこんには) $f(z) := \frac{1}{z-3}$ は、 $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ で正則である。

まず Taylor 展開 (冪級数展開) の復習をしよう。 $c=1$ を中心とする円盤 $D(1;2)$ で正則である。ここで次のように Taylor 展開できる。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{-2 \left(1 - \frac{z-1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \quad (z \in D(1;2)). \end{aligned}$$

ところで、 f は $D(1;2)$ の外部 $D := \{z \in \mathbb{C}; |z-1| > 2\}$ でも正則である。そこで次のように“負冪級数”展開することも出来る。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{(z-1) \left(1 - \frac{2}{z-1}\right)} \\ &= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-1)^n} \quad \left(\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1 \text{ すなわち } |z-1| > 2\right). \end{aligned}$$

($\frac{1}{z-3}$ のような簡単な関数を、目的もなく級数にするのはバカバカしいが、この計算は後の定理の証明と関連深い。) ■

定理 7.3 の証明でも用いたことであるが、級数の一様収束に基づく項別積分が再び必要になる。ここでは、一つの工夫として、命題 10.2 を用意する (冪級数に関する有名な定理から簡単に導けるが)。

定理 3.12(p. 44) と、定理 3.27(p. 53) を思い出そう。

命題 10.2 (「負冪級数」の収束) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

- (i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。 $\forall R^* \in (0, \infty)$ に対して、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \geq R^*\}$ で一様に絶対収束する。
- (ii) $\exists R \in (0, \infty)$ s.t. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > R\}$ で収束し、 $D(c; R)$ で発散する。 $\forall R^* \in (R, \infty)$ に対して、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \geq R^*\}$ で一様に絶対収束する。
- (iii) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

(一応証明は書いたけれど、実際に説明する必要はないと思う。変数変換で、円が円に、円の内部が円の外部に、円の外部が円の内部に対応することを説明するくらい。)

証明 変数変換 $\zeta = \frac{1}{z-c}$ により、

- c を中心とする円周 $|z-c| = r$ と 0 を中心とする円周 $|\zeta| = \frac{1}{r}$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ と $\left\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| > \frac{1}{r}\right\}$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > r\}$ と $\left\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < \frac{1}{r}\right\}$

がそれぞれ対応することに注意する (不等号を等号付きにしても同様)。

また $\frac{b_n}{(z-c)^n} = b_n \zeta^n$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$ に対して、定理 3.12 と定理 3.27 を適用する。

- (i) 冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$ が $\forall \zeta \in \mathbb{C}$ について収束する場合、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。 $0 < \forall R^* < \infty$ に対して、 $\rho^* = 1/R^*$ とおく。 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$ が $|\zeta| \leq \rho^*$ で一様に絶対収束することから、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束することが導かれる。
- (ii) $0 < \exists \rho < \infty$ s.t. 冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$ が $|\zeta| < \rho$ について収束し、 $|\zeta| > \rho$ について発散する場合、 $R := 1/\rho$ とおくと、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、 $|z-c| < R$ で発散す

る。 $R < R^* < \infty$ を満たす任意の R^* に対して、 $1/R^* < 1/R = \rho$ であるから、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$ が $|\zeta| \leq 1/R^*$ で一様に絶対収束することから、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束することが導かれる。

(iii) 冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$ が $\forall \zeta \neq 0$ に対して発散する場合、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は任意の $z \neq c$ で発散する。 ■

この命題の (i) の場合を $R = 0$, (iii) の場合を $R = \infty$ と解釈することで、以下のように書き直せる (これは冪級数の場合は普通に行われている)。

—— 命題 10.2 の書き直し ——

$0 \leq \exists R \leq \infty$ s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、 $|z-c| < R$ で発散する。
 $R < \forall R^* < \infty$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束する。

冪級数と「負冪級数」の和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

の形に書ける級数を **Laurent 級数** と呼ぶ。2つの級数がともに収束するとき、その Laurent 級数は収束し、その和は2つの級数の和であると定義する。2つの級数の少なくとも一方が発散するときは、その Laurent 級数は発散する、と定義する。

それぞれの和が収束するための条件を考えると、ある“円環領域”で収束し、その外部では発散することが分かる。

円環領域とその記号の定義をしておこう。

定義 10.3 (円環領域) $c \in \mathbb{C}$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ とするとき、

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-c| < R_2\}$$

と置く。この形の領域を c を中心とする**円環領域** (an **annulus**, an annular domain, an annular region) と呼ぶ。

さらに

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \leq |z-c| \leq R_2\}.$$

定理 10.4 (Laurent 級数の収束範囲, “収束円環” の存在) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$

について、次の3つのうちのいずれか一つが成り立つ。

- (i) $0 \leq \exists R_1 < \exists R_2 \leq \infty$ s.t. 円環領域 $A(c; R_1, R_2)$ で収束し、その外部では発散する。
 $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、 $\overline{A}(c; r_1, r_2)$ で一様に絶対収束する。
 - (ii) $0 \leq \exists R < \infty$ s.t. 円周 $|z-c| = R$ の空でない部分集合上で収束し、その補集合では発散する。
 - (iii) $\mathbb{C}$ 上いたるところで発散する。
- (i) の場合の R_1 と R_2 , (ii) の場合の R は一意的に定まる。

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ については、ある $R_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ が存在して、 $|z-c| < R_2$ で収束し、 $|z-c| > R_2$ では発散する。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ については、ある $R_1 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ が存在して、 $|z-c| < R_2$ で発散し、 $|z-c| > R_2$ では収束する。

$R_1 < R_2$ であれば、Laurent 級数は $A(c; R_1, R_2)$ で収束し、その外部 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R_1 \text{ or } |z-c| > R_2\}$ で発散する。

$R_1 = R_2$ であれば、Laurent 級数は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \neq R_2\}$ で発散する。 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = R_2\}$ の部分集合上では収束する可能性があるが、部分集合が空集合ということもありうる。

$R_1 > R_2$ であれば、Laurent 級数は $\mathbb{C}$ 上のいたるところで発散する。■

問 55. 上の定理の (i) の場合に、 R_1, R_2 を a_n を用いて表わせ。

10.2 円環領域における正則関数の Laurent 展開

すでに円盤領域で正則な関数は、収束する冪級数と等しい (冪級数展開できる) ことを示しているが、円環領域で正則な関数は、収束する Laurent 級数と等しい (これを「Laurent (級数) 展開出来る」という) ことを示そう。

定理 10.5 (円環領域で正則な関数の Laurent 展開) $c \in \mathbb{C}$ で、 R_1, R_2 は $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ を満たすとする (R_1 は 0 以上の実数だが、 R_2 は R_1 より大きい実数であるか、または ∞ に等しい)。 f が $A(c; R_1, R_2)$ で正則ならば、 $\exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ s.t.

$$(19) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (R_1 < |z-c| < R_2).$$

(19) の右辺の級数は、 $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、 $\overline{A}(c; r_1, r_2)$ で一様に絶対収束する (特に一様収束であり、絶対収束である)。

(係数の一意性) 等式 (19) が成り立っているならば、 $R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して、

$$(20) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

以下、(19) を書く手間を少なくするため (案外と大事)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

あるいは

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-c)^n$$

と略記する。

証明 (係数の一意性) $\forall m \in \mathbb{Z}$ に対して、等式 (19) の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割った

$$\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m-1}$$

は、 $R_1 < r < R_2$ なる r に対して、円周 $|z-c|=r$ 上で一様に収束するので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} a_n \int_{|z-c|=r} (z-c)^{n-m-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} a_n \cdot 2\pi i \delta_{nm} = a_m. \end{aligned}$$

すなわち (20) が成立する。

(存在) $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 を取る。 $z \in A(c; r_1, r_2)$ とする。

$$C_1: |\zeta - c| = r_1,$$

$$C_2: |\zeta - c| = r_2$$

とおくと、Cauchy の積分公式から、

$$(\sharp) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$D := A(c; r_1, r_2)$, $M := \max_{\zeta \in \overline{D}} |f(\zeta)|$ とおく。

($\sharp$) の右辺第 1 項については、円盤内の Cauchy の積分公式の証明とまったく同様の議論で

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

($\sharp$) の右辺第 2 項についても、ほぼ同様であるが、これは一応書く。 ζ が $|\zeta - c| = r_1$ を満たすとき、

$$\left| \frac{\zeta - c}{z - c} \right| = \frac{r_1}{|z - c|} < 1$$

に注意して

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = \frac{-1}{z - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - c}{z - c} \right)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}.$$

$$\left| f(\zeta) \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} \right| \leq \frac{M}{r_1} \left(\frac{r_1}{|z - c|} \right)^n$$

であり、右辺は |公比| < 1 の等比数列であるから、Weierstrass の M-test により、

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

は円周 C_1 : $|\zeta - c| = r_1$ 上、一様収束する。ゆえに項別積分が可能で、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n}. \end{aligned}$$

ただし

$$a_{-n} := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) (\zeta - c)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{-n+1}} d\zeta.$$

以上から

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; r_1, r_2)).$$

係数の一意性で示したことから、 $r_1 < r < r_2$ を満たす任意の r に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

(最後のしあげ) r_1, r_2 が任意であることと、この係数を表す積分の積分路が r によらないことから、 $A(c; R_1, R_2)$ で収束することが分かる。■

定義 10.6 (円環領域における Laurent 展開, 孤立特異点のまわりの Laurent 展開)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, f は $A(c; R_1, R_2)$ で正則とするとき、

$$(21) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (R_1 < |z-c| < R_2)$$

を満たす $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が一意的に存在するが、(21) を f の $A(c; R_1, R_2)$ における **Laurent (級数) 展開** (the Laurent (series) expansion) あるいは単に **Laurent 級数** (Laurent series) と呼ぶ。特に $R_1 = 0$ の場合、 f の孤立特異点 c のまわりの (「 c における」とも言う) Laurent 展開とも呼ぶ。

正則関数が冪級数展開 (Taylor 展開) 出来るという定理と、上の定理は良く似ている。 f が c を中心とする円盤 $D(c; \varepsilon)$ で正則な場合、 f は c のまわりで Taylor 展開可能できるが、それは実は f の c のまわりの (あるいはもっと詳しく $A(c; 0, \varepsilon)$ における) Laurent 展開でもある。その意味で

Laurent 展開は、Taylor 展開の一般化である

後でおいおい分かることであるが、実は Laurent 展開が出来ることは重要であるが、Laurent 展開の具体形が必要になることはあまりない (後で紹介する留数が分かれば十分であることが多い)。以下、Laurent 展開を具体的に求めるための方法をいくつか紹介するが、“便利な方法”は存在しない、という感想を持つかもしれない。それでもあまり困らないわけである。

まず Taylor 展開の場合の

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の拡張であるような便利な公式は存在しない。また、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z})$$

という公式は、 a_n の一意性を示すのに役立ったが (重要)、 a_n を具体的に求める目的には役立たないことが多い (線積分を計算するのはしばしば難しい)。

とにかく何らかの手段で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (R_1 < |z-c| < R_2)$$

を満たす $\{a_n\}$ が得られれば、これが f の $A(c; R_1, R_2)$ における Laurent 展開である (一意性による)、という事実を利用する場合が多い。

例 10.7 (色々な求め方) (1) 関数 $f(z) = \frac{3}{(z-1)^2}$ は、 $\mathbb{C} \setminus \{1\} = A(1; 0, \infty)$ で正則であるが、それ自身が 1 のまわりの Laurent 展開を与える。実際、

$$a_{-2} := 3, \quad a_n := 0 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\})$$

で $\{a_n\}$ を定義するとき、

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < \infty)$$

が成り立つ。

(2) $f(z) = \exp \frac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, \infty)$ で正則であるから、そこで Laurent 展開出来るはずである。 $\exp z$ の 0 のまわりの Taylor 展開

$$\exp \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

の ζ に $\frac{1}{z}$ を代入することで得られる

$$f(z) = \exp \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < \infty)$$

が $A(0; 0, \infty)$ における Laurent 展開である。

(3) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ は、 $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, \infty)$ で正則であるから、そこで Laurent 展開できるはずである。 $\sin z$ の 0 のまわりの Taylor 展開

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (z \in \mathbb{C})$$

を z^2 で割って得られる

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} + \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < \infty)$$

が f の $A(0; 0, \infty)$ における Laurent 展開である。■

問 56. 上の例の (2), (3) で、 a_n が何であるか書け。

任意の有理関数 f は、部分分数分解することによって、多項式または $\frac{1}{(z-a)^n}$ の形の項の線型結合で書ける。それらは、例 10.1 で見たように等比級数の和の公式を利用したり、微分を考えることで Laurent 級数展開が求まる。そうして求めた部分分数分解の各項の Laurent 展開を寄せ集めることで、 f の Laurent 展開が得られる。

例 10.8 ($\frac{1}{z-a}$ の Laurent 展開) $f(z) = \frac{1}{z-a}$ の Laurent 展開は以下のように求まる。

- (1) f は $A(a; 0, \infty)$ で正則であるから、 f は a のまわりで Laurent 展開出来て、それは $f(z)$ の定義式の右辺そのものである。つまり

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \quad (0 < |z-a| < \infty)$$

が f の a のまわりの ($A(a; 0, \infty)$ における) Laurent 展開である。

- (2) $c \neq a$ とすると、 f は c の近傍 $D(c; |a-c|)$ で正則であるから、 f は c のまわりで Taylor 展開できるが、それが f の c のまわりの (円環領域 $A(c; 0, |a-c|)$ における) Laurent 展開である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-c) - (a-c)} = -\frac{1}{a-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{a-c}} \\ &= -\frac{1}{a-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{a-c} \right)^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |(z-c)/(a-c)| < 1) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(a-c)^{n+1}} \quad (0 < |z-c| < |a-c|). \end{aligned}$$

- (3) $c \neq a$ とすると、 f は $A(c; |a-c|, \infty)$ で正則であるから、そこで Laurent 展開出来る。
実際

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-c) - (a-c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-c}{z-c}} \\ &= \frac{1}{z-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-c}{z-c} \right)^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |(a-c)/(z-c)| < 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-c)^{n-1}}{(z-c)^n} \quad (|a-c| < |z-c| < \infty). \blacksquare \end{aligned}$$

次の例は授業ではカットするかもしれない。

例 10.9 (部分分数分解の Laurent 展開を寄せ集めて Laurent 展開する)

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}$$

とする。 f は $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ で正則である。 f を 0 を中心とする円環領域で Laurent 展開してみよう。

(1) f は $A(0; 0, 1)$ で正則であるから、そこで Laurent 展開出来るはずである。

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < \infty), \\ \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1), \\ \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z| < 2).\end{aligned}$$

であるから

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < 1).$$

(2) f は $A(0; 1, 2)$ でも正則であるから、そこでも Laurent 展開できる。

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < 2).$$

(3) f は $A(0; 2, \infty)$ でも正則であるから、そこでも Laurent 展開できる。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} = \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} - 1}{z^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-2} - 1}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty).$$

これが $A(0; 2, \infty)$ における f の Laurent 展開である。■

10.3 孤立特異点, 孤立特異点の留数, 孤立特異点の分類

孤立特異点は、ここで初めて呼び名をつけるが、実はこれまで例に何度も出て来たものである。

定義 10.10 (孤立特異点) Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、 $c \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。 c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正数 ε が存在して、 f は $D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}$ で正則であるが、 $D(c; \varepsilon)$ では正則でないことと定義する。
 c が f の正則点であるとは、ある正数 ε が存在して、 f は $D(c; \varepsilon)$ で正則であることと定義する。

$D(c; \varepsilon)$ では正則でないとは、具体的には次の2つの場合がある。

(i) f は c で定義されていない ($c \notin \Omega$)。

(ii) f は c で定義されているが、 c では微分可能でない。

注意 10.11 実は上の定義は、教科書のそれとは違っている。教科書ではある正数 ε が存在して、 f が $D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}$ で正則であるとき、 c を f の孤立特異点と定義している。つまり、上の定義の正則点も孤立特異点に含めているわけである。教科書の流儀にも良い点があるが、少数派のようなので、ここでは多数派になることにする。■

例 10.12 以下の各場合に共通: $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

(1) $f(z) = z^2 + 1$.

(2) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

(3) $f(z) = \frac{1}{z}$.

(4) $f(z) = \exp \frac{1}{z}$.

いずれの場合も、 f は Ω で正則、しかし $0 \notin \Omega$ であるので、 0 は f の孤立特異点である ($\varepsilon = 1$ として定義の条件が満たされる)。

しかし色々な違いがある。

(1), (2) で、 $f(0) = 1$ として 0 まで込めて拡張すると、 f は $D(0; 1)$ で正則となる ((1) は多項式なので明らかだが、(2) については後で証明する)。こういう孤立特異点を除去可能特異点と呼ぶ (定義は後述)。

(3) については、 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ である。こういう孤立特異点を極と呼ぶ (定義は後述)。この場合、 $f(0)$ をどのように定義しても f は 0 で連続にならず、従って 0 で正則ではない。

(4) については $\lim_{z \rightarrow \infty}$ が存在しない ($\lim_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ x \rightarrow +\infty}} \exp x = \infty$, $\lim_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ x \rightarrow -\infty}} \exp x = 0$ であるから)。こういう孤立特異点を孤立真性特異点と呼ぶ (定義は後述)。この場合、 $f(0)$ をどのように定義しても f は 0 で連続にならず、従って 0 で正則ではない。

この際、これも説明しておこう。 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(z) := \begin{cases} z^2 + 1 & (z \neq 0) \\ 2 & (z = 0) \end{cases}$$

で定めると、 0 は f の孤立特異点である。実際 $\varepsilon = 1$ としたとき、 f は $D(0; \varepsilon) \setminus \{0\}$ で正則であるが、 0 で微分可能でないので ($\lim_{\substack{z \neq 0 \\ z \rightarrow 0}} f(z) = 1 \neq 2 = f(0)$ であるから連続でない) f は $D(0; \varepsilon)$ で正則でない。この場合も 0 を f の除去可能特異点と呼ぶ。 $f(0)$ の値を 2 から 1 に変更すれば正則になるから、というニュアンスである。■

例 10.13 (定義できない点が集積している場合) $\frac{1}{\sin(1/z)}$ という式は、 $z = 0$ はもちろん、 $z \neq 0$, $\sin(1/z) = 0$ であるような z に対しても意味を持たない。それ以外の $z \in \mathbb{C}$ に対しては値が定まる。

そこで

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n\pi} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \right)$$

とおくと、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

で定義できる。 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合であり、 f は Ω で正則である。

任意の正の数 ε に対して、 $|n|$ を十分大きく取ると $0 < \left| \frac{1}{n\pi} \right| < \varepsilon$ となるので、 f は $0 < |z - 0| < \varepsilon$ で正則ではない。ゆえに 0 は f の孤立特異点ではない。 ■

定義 10.14 (孤立特異点、正則点のまわりの Laurent 展開と留数) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、 c は f の孤立特異点または正則点とするとき、 $\varepsilon > 0$, $\exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (0 < |z - c| < \varepsilon)$$

となるが、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n}$ を f の c のまわりの Laurent 展開の**主部** (主要部, the **principal part**) と呼ぶ。また a_{-1} を f の c における**留数** (the residue of f at c) と呼び、 $\text{Res}(f; c)$ で表す。

$$\text{Res}(f; c) := a_{-1}.$$

c が f の正則点である場合、 f は $D(c; \varepsilon)$ で Taylor 展開出来て、それは Laurent 展開と一致し、 $\text{Res}(f; c) = 0$ である。Laurent 展開は Taylor 展開の一般化であるとしておくと色々と都合が良いので、正則点に対しても、その点のまわりの Laurent 展開、留数を定義することにした。

定義 10.15 (孤立特異点の分類, 除去可能特異点, 極, 孤立真性特異点) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、 c は f の孤立特異点とすると、 $\varepsilon > 0$, $\exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < \varepsilon)$$

となるが、これを用いて以下の言葉の定義をする。

(i) c が f の**除去可能特異点** (a removable singularity) であるとは、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{-n} = 0$$

が成り立つことをいう。

(要するに c のまわりの Laurent 展開の主部が 0 ということである。)

(ii) c が f の**極** (a pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N}) \quad a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) a_{-n} = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、 k を f の極 c の**位数**と呼び、 c は f の k 位の極である、ともいう。

(要するに c のまわりの Laurent 展開の主部が 0 でなく、0 でない項の個数が有限である、ということである。)

(iii) c が f の**孤立真性特異点** (an essential singularity) であるとは、

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} \neq 0$$

が成り立つことをいう。

(要するに c のまわりの Laurent 展開の主部に 0 でない項が無数個ある、ということである。)

紛らわしいが、教科書では、除去可能特異点のことを「正則点」とも呼んでいる。これは後で示すように、除去可能特異点での値を適当に定義すると、その点の近傍で正則になるからである。

例 10.16 (前項の例を再び) $f(z) = z^2 + 1$ の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = 1 + z^2 \quad (0 < |z| < \infty).$$

(これを $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ と書いたとき、 a_n が何になるか考えること。) 主部は 0 であるから、0 は f の除去可能特異点であり、 $\text{Res}(f; 0) = 0$.

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \quad (0 < |z| < \infty).$$

これも主部は 0 であるから、0 は f の除去可能特異点であり、 $\text{Res}(f; 0) = 0$.

$f(z) = \frac{1}{z}$ の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < \infty).$$

この主部は $\frac{1}{z}$ であるから、0 は 1 位の極であり、 $\text{Res}(f; 0) = 1$.

$f(z) = \exp \frac{1}{z}$ の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty).$$

主部は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ で、無限項からなるから、0 は真性特異点である。 $\text{Res}(f; 0) = 1$. ■

例 10.17 (有理関数の分母の零点は孤立特異点) 有理関数 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$) の分母 $P(z)$ の零点は f の孤立特異点である。実際、 $P(z)$ の次数を n とするとき、 $P(z)$ の相異なる零点の個数は n 個以下であり、それを $c_1, c_2, \dots, c_r$ とするとき、 f は $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ で定義される。各 c_i に対して、 $R_i := \min_{1 \leq j \leq r, j \neq i} |c_i - c_j|$ とおくと $R_i > 0$ で、 f は $0 < |z - c_i| < R_i$ で正則だが、 $z = c_i$ では定義されていないので $|z - c_i| < R_i$ では正則でない。ゆえに $c_1, \dots, c_r$ は f の孤立特異点である。■

例 10.18 $f(z) = \frac{2}{(z-3)^4}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$) は、3 を 4 位の極に持つ。実際、

$$f(z) = \frac{2}{(z-3)^4} \quad (0 < |z-3| < \infty)$$

は 3 のまわりの Laurent 展開でもあり ($a_{-4} = 2, a_n = 0$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-4\}$)) とすると、 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-3)^n$ 、 $\frac{2}{(z-3)^4}$ は Laurent 展開の主部である。■

例 10.19 $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ とするとき、0 は f の孤立特異点である。実際、 $\varepsilon = 1$ とするとき、 $0 < |z-0| < \varepsilon$ で f は正則であるが、0 では定義されていないので、 $|z-0| < \varepsilon$ で f は正則でない。

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

と部分分数分解すると、右辺第 1, 2 項は 0 の近傍で正則であるから、0 のまわりの Laurent 展開の主部は $-\frac{1}{z}$ であることが分かる。ゆえに 0 は極で、 $\text{Res}(f; 0) = -1$. ■

問 57. (教科書 p. 84) 次の関数のそれぞれの孤立特異点における主要部は何か。

$$(1) \frac{\cos z}{z^2 \sin z} \quad (z=0) \quad (1) \frac{z^2}{(z^2-1)^3} \quad (z=1)$$

命題 10.20 (除去可能特異点の性質) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、 c は f の除去可能特異点であるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z)$ は有限確定である (有限の極限が存在する)。

(2) $\exists R \in (0, \infty]$, $\exists \tilde{f}: D(c; R) \rightarrow \mathbb{C}$ 正則 s.t.

$$f(z) = \tilde{f}(z) \quad (0 < |z - c| < R).$$

すなわち、 f は c までこめて正則に拡張できる。

証明 c が f の孤立特異点であることから、 $\exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z - c| < R$ で正則である。
ゆえに $\exists \{a_n\}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (0 < |z - c| < R).$$

c が f の除去可能特異点であるという仮定から、

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{-n} = 0.$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (0 < |z - c| < R).$$

右辺の級数は $z = c$ でも収束する (値は a_0) ことに注意して、

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (|z - c| < R)$$

とおくと、 $\tilde{f}: D(c; R) \rightarrow \mathbb{C}$ は (収束冪級数なので) 正則であり、特に $z = c$ で連続であるから、

$$\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(c) = a_0. \blacksquare$$

注意 10.1 c が f の除去可能特異点であるとき、特に断りなく、 f を $D(c; R)$ 上の正則な関数 $\tilde{f}$ に置き換えて議論することが多い。この $\tilde{f}$ は、

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & (0 < |z - c| < R) \\ \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) & (z = c) \end{cases}$$

と特徴づけることも出来る。 ■

命題 10.21 (極の性質) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、 c が f の極であれば、 $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) = \infty$.

証明 c が f の孤立特異点であるから、 $\exists R > 0, \exists \{a_n\}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

極の位数を k とすると、 $a_{-k} \neq 0$ かつ $(\forall n \in \mathbb{N}: n > k) a_{-n} = 0$ であるから、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

前命題と同様に

$$\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = a_0.$$

$\zeta = \frac{1}{z-c}$ とおくと、 $z \neq c, z \rightarrow c$ のとき $\zeta \rightarrow \infty$ で、

$$\sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^k a_{-n} \zeta^n.$$

補題 ?? により、

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_{-n} \zeta^n = \infty.$$

ゆえに

$$\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) = a_0 + \infty = \infty. \blacksquare$$

補題 10.22 (Riemann の除去可能特異点定理) c は f の孤立特異点とする。ある正数 ε が存在して、 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < \varepsilon\}$ で f が有界であれば、 c は f の除去可能特異点である。特に $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z)$ が有限確定であれば、 c は f の除去可能特異点である。

証明 (Liouville の定理の証明と見比べてみると面白い。) f が有界という仮定から、 $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $|f(z)| \leq M$ ($0 < |z-c| < R$).

f が $A(c; 0, R)$ で正則であることから、 $\exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

任意の $n \in \mathbb{Z}, 0 < r < R$ を満たす任意の r に対して

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-c|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \int_{|\zeta-c|=r} |d\zeta| = \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

特に、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0 < r < R).$$

$r \downarrow 0$ とすることで $a_{-n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). ゆえに f の c におけるローラン展開の主部は 0 であるので、 c は f の除去可能特異点である。■

別証 (不等式は嫌いだという人向け²⁵) f が $A(c; 0, R)$ で正則であるとする。

$$g(z) := \begin{cases} (z-c)^2 f(z) & (0 < |z-c| < R) \\ 0 & (z=c) \end{cases}$$

とおく。 g は明らかに $0 < |z-c| < R$ で正則であるが、

$$g'(c) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{g(z) - g(c)}{z - c} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{(z-c)^2 f(z) - 0}{z - c} = \lim_{z \rightarrow c} (z-c) f(z) = 0$$

であるから (ここで f が有界であることを用いた)、 g は c でも微分可能で、結局 $|z-c| < R$ で正則である。ゆえにその範囲で収束する冪級数に展開できる:

$$\exists \{a_n\}_{n \geq 0} \quad \text{s.t.} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R).$$

$g(c) = 0, g'(c) = 0$ であるから、 $a_0 = a_1 = 0$. ゆえに

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-c)^n = (z-c)^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-c)^{n-2} = (z-c)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-c)^n \quad (|z-c| < R).$$

これから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

ゆえに c は f の除去可能特異点である。■

命題 10.23 (Casorati-Weierstrass, 真性特異点の性質) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、 c は f の孤立真性特異点とすると、

$$(\forall \beta \in \mathbb{C}) (\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \left((\forall n \in \mathbb{N}) z_n \neq c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta \right).$$

(結局 $\beta = \infty$ でも良いことになる。)

この定理の証明は省略してある本が多いが、以下に見るようにそれほど長い証明は必要ない。

²⁵ どうもそういう人がいるみたい。個人的には、Riemann の定理の不等式を用いた証明は、Liouville の定理の Cauchy 評価を用いた証明と同じで、面白いと感じるのだけれど、そうでない人もいるらしい。この別証にも、違った面白さは感じられるけれど...

証明 f は $0 < |z - c| < R$ で正則とする。 $\forall \beta \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ²⁶。

主張

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall r \in (0, R)) (\exists z \in A(c; 0, r)) |f(z) - \beta| < \varepsilon.$$

もしこれが証明できれば、 $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $\varepsilon = r = \frac{1}{n}$ として用いて、 $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s.t.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < |z_n - c| < \frac{1}{n}, \quad |f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}.$$

これから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta.$$

以下、上の主張を背理法²⁷を用いて証明する。そのため成り立たないと仮定すると、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall z \in A(c; 0, r) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon.$$

このとき、

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと (分母が 0 にならないことに注意)、 g は除外近傍 $A(c; 0, r)$ で正則である。ゆえに c は g の孤立特異点であるが、

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

という評価が成り立つので、Riemann の定理によって、 c は除去可能な特異点である。すなわち g は $B(c; r)$ で正則な関数に拡張できる。定義から $g(z) \neq 0$ ($z \in A(c; 0, r)$) である。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} = \frac{\beta g(z) + 1}{g(z)}$$

であるから、 c は f の除去可能特異点または極である (c が g の零点でなければ c は f の除去可能特異点、 c が g の k 位の零点であれば、 c は f の k 位の極)。これは c が f の孤立真性特異点であるという仮定に反する。 ■

定理 10.24 (孤立特異点の $\lim$ による特徴づけ) c が f の孤立特異点であるとき、以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

- (1) c が f の除去可能特異点であるためには、 $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z)$ が有限確定であることが必要十分である。
- (2) c が f の極であるためには、 $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) = \infty$ であることが必要十分である。
- (3) c が f の孤立真性特異点であるためには、 $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z)$ が有限確定でもなく、 $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) = \infty$ でもないことが必要十分である。

²⁶この主張は、定理の結論と同値と言って良い。つまり、 ε - δ で書き換えたものである。

²⁷背理法 (proof by contradiction, reductio ad absurdum)

証明 必要性は上で示した3つの命題 (除去可能特異点の性質、極の性質、真性特異点の性質) で分かる。分類になっていることから、十分性は明らか。 ■

例 10.25 $f(z) := \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ について、0 は f の孤立真性特異点である。一般論から $z \rightarrow 0$ のときの $f(z)$ の極限は存在しないが、実際

$$\lim_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ x \rightarrow 0}} f(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ y \rightarrow 0}} f(iy) = \infty$$

のように近づけ方によって、0 に収束したり、 ∞ に近付いたりする。 ■

実は、Casorati-Weierstrass の定理よりももっと強く、次の定理が成り立つことが知られている。しかし定理 10.24 を得るためには、Casorati-Weierstrass の定理で十分なので、次の定理の証明は省略する (例えば Ahlfors [15] にある)。

命題 10.26 (Picard の大定理) c は f の孤立真性特異点とすると、 $\exists e \in \mathbb{C}, (\forall U: c$ の除外近傍)、 $\forall v \in \mathbb{C} \setminus \{e\}, \exists z \in U$ s.t. $f(z) = v$. — 高々一つの除外値を除き、 c の任意の除外近傍において、その値を取る。

この Picard の定理については、一松 [16] に色々書いてある。

問 58. (教科書 p. 85 の問を変更) 以下の (1), (2), (3) を証明せよ。

(1) $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \forall \varepsilon > 0, \exists z \in A(0; 0, \varepsilon)$ s.t. $\exp \frac{1}{z} = a$.

(2) $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{z_n} = \infty$.

(3) $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{z_n} = 0$.

(略解: $a = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$) とする。 $\exp \frac{1}{z} = a = re^{i\theta}$ は

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と同値である。ゆえに

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$$

と同値である。そこで n を十分大きく取れば…(2), (3) については、 $w_n = 1/z_n$ とおいて、 w_n について考えると、簡単で具体的な例が見つかる。) ■

注意 10.27 (教科書 p. 85) f が a の適当な近傍で収束冪級数に展開できないとき、 a は f の特異点と呼ぶ。

孤立特異点ではない特異点も存在する。一つには孤立特異点が集積している点 ($f(z) := \frac{1}{\sin(1/z)}$ の $z = 0$ がそういう点)。

多価関数 (multifunction, multi-valued function) の分岐点 というのもある。これは代数分岐点、対数分岐点、超越分岐点 (transcendental branch point) の 3 つに分類される。 $f(z) = \text{Log}(1-z)$ の $z = 0$ (特異点は定義域の内点というわけではない。) ■

問 59. (1) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ に対して、0 はどういう種類の孤立特異点か。(2) $f(z) = \frac{\sin(z^3)}{z(1 - \cos z)}$ に対して、0 はどういう種類の孤立特異点か。(3) $r > 0$ がどんなに小さくても、 $A(c; 0; r)$ において f は 0 以外のすべての複素数値を取ることを示せ。

まとめ

記号: $D(c; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < R\}$, $A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$.

c が f の孤立特異点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists R > 0$ s.t. f は $A(c; 0, R)$ で正則であるが、 $D(c; R)$ では正則でない。

c が f の孤立特異点 $\implies \exists R > 0, \exists \{a_n\}$ s.t. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ ($0 < |z-c| < R$)

(実は a_n は一意的に定まり、 $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz$ ($0 < r < R$), また $0 < \forall r_1 < \forall r_2 < R$ に対して、 $\bar{A}(c; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z-c| \leq r_2\}$ で一様かつ絶対に収束する。)

c が f の除去可能特異点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ の c の回りの Laurent 展開の主部 = 0

c が f の除去可能特異点 $\iff$ 有限の $\lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z)$ が存在する

c が f の除去可能特異点 $\implies \tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & (z \in A(c; 0, R)) \\ \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) & (z = c) \end{cases}$ は $D(c; R)$ で正則。

c が f の k 位の極 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ の c の回りの Laurent 展開の主部が $\sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$, $a_{-k} \neq 0$

c が f の極 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists k \in \mathbb{N}$ s.t. c は f の k 位の極

c が f の極 $\iff \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} f(z) = \infty$

c が f の真性特異点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ の c の回りの Laurent 展開の主部は (0 でない) 無限項からなる ($\iff \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_{-n} \neq 0\} = \infty$)

11 補足: 零点と極の位数

授業では要点だけを説明して先に進む (証明は後で時間が余ったら…)。

(正則関数の零点とその位数は、正則関数の冪級数展開可能性を証明したすぐ後に解説するのが良いと思われる。そして命題 11.5 は、前節に放り込んでしまう。今年度はそうしなかったが、来年度以降はやり方を変えようと思う。)

11.1 10行の要点

多項式に対して、根とその重複度というものが定義されているが、正則関数に対してもそれに相当する (一般化になっている) 零点とその位数というものがある。

c が正則関数 f の k 位の零点とは

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0, \quad f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たすことと定義する。それは

$$f(z) = (z - c)^k g(z), \quad g(c) \neq 0$$

を満たす正則関数が存在することと同値である。 k のことを f の零点 c の位数と呼ぶ。

c が f の k 位の極であるためには、 c の近傍で正則な関数 g で

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^k}, \quad g(c) \neq 0$$

を満たすものが存在すること同値である。

(k 位の極というのは $-k$ 位の零点のような…)

11.2 正則関数の零点の位数

多項式 $f(z)$ の根²⁸について、重複度を考えた。次の命題 (証明は省略 — 剰余の定理、因数定理と帰納法くらいで出来る) が成立することを知っているであろう。

命題 11.1 (k 重根の条件) $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の 3 条件は同値である。

- (i) c は $f(z)$ の根で、重複度は k である。
(すなわち、 $f(z)$ を 1 次因数の積に因数分解したとき、 $(z - c)$ はちょうど k 個現れる — $k = 1$ の場合、重根ではないわけだが、重複度 1 の根ということにしておく)
- (ii) $\exists g(z) \in \mathbb{C}[z]$ s.t. $f(z) = (z - c)^k g(z)$ かつ $g(c) \neq 0$.
- (iii) $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

²⁸ $f(z) = a \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j)$ と、 $f(z)$ を 1 次式の積に因数分解したときに現れる、 α_j ($j = 1, 2, \dots, n$) のことを

多項式 $f(z)$ の (または方程式 $f(z) = 0$ の) **根 (root)** と呼ぶ。一方、 α が方程式 $f(z) = 0$ の解であるとは、 $f(\alpha) = 0$ が成り立つことと定義する。有名な因数定理によって、 α が $f(z)$ の根であるためには、 α が $f(z) = 0$ の解であることが必要十分であることが分かる。最近の高校数学では、重解という言葉を使っているが、もともとは重根という言葉を使うのが普通であった。因数分解を使わずに「重なっていること」を表すのは面倒で、重根と呼ぶ方が筋が通っている。

さて、 f を $c \in \mathbb{C}$ の近傍で正則な関数とすると、残念ながら $f(z)$ を一般に因数分解することは出来ないが、上の命題は部分的には拡張可能である。

命題 11.2 (k 位の零点の条件) $c \in \mathbb{C}$, f は c の開近傍 U で正則、 $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

- (i) U で正則な関数 g が存在して、 $f(z) = (z - c)^k g(z)$ ($z \in U$) かつ $g(c) \neq 0$.
- (ii) $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

証明 k に関する帰納法で (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示す、というのも可能である。以下では一気に証明する。

(ii) $\Rightarrow$ (i) の証明。 f は c の近傍で正則なので、 c の回りで Taylor 展開できる。すなわち $\exists R > 0, \exists \{a_n\}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (|z - c| < R).$$

一般に $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ であるから、仮定より、 $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^{n-k} = (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n.$$

ここで

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n$$

とおくと、これは $|z - c| < R$ で正則な関数で、

$$f(z) = (z - c)^k g(z), \quad g(c) = a_k \neq 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) の証明。 $f(z) = (z - c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$ とする。 $h(z) := (z - c)^k$ とおくと、 $f(z) = g(z)h(z)$. $0 \leq m \leq k$ に対して、Leibniz の法則により

$$f^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} h^{(r)}(z) g^{(m-r)}(z).$$

明らかに $r \leq k - 1$ であれば、 $h^{(r)}(c) = 0$ であることに注意すると、 $0 \leq m \leq k - 1$ ならば $h^{(r)}(c) = 0$ ($0 \leq r \leq m$) であること、それと $h^{(k)}(z) \equiv k!$ から、

$$\begin{aligned} f^{(m)}(c) &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \cdot 0 \cdot g^{(m-r)}(c) = 0 \quad (0 \leq m \leq k - 1), \\ f^{(k)}(c) &= \binom{k}{k} k! g(c) = k! g(c) \neq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

(この Prop. の証明は文章が少し粗雑かも。)

$f(c) = 0$ で、 f が恒等的に 0 ではないとき、

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{かつ} \quad f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たす $k \in \mathbb{N}$ が必ず存在する。実際、もし $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad f^{(n)}(c) = 0$ であれば、 c の近傍で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} (x-c)^n = 0$$

となり、 $f \equiv 0$ が導かれるので、その対偶をとれば良い。

定義 11.3 (正則関数の零点, 零点の位数) $c \in \mathbb{C}$, f は c の近傍で正則な関数とする。

(1) c が f の **零点 (zero)** であるとは、 $f(c) = 0$ を満たすことをいう。

(2) c が f の零点で、 f が恒等的には 0 でないとき、(上で一意的に存在することを示した)

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{かつ} \quad f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たす $k \in \mathbb{N}$ を、 f の零点 c の **位数 (order)** と呼ぶ。

多項式 $f(z)$ については、根と零点は一致する。また根の重複度 (単根の時は 1 とする) は零点の位数と一致する。

例 11.4 (a) $f(z) = \sin z$ で、 $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) は 1 位の零点である。実際、

$$f(k\pi) = \sin k\pi = 0, \quad f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$$

であるから、 $k\pi$ は f の 1 位の零点である。あるいは Taylor 展開

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - k\pi) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - k\pi)^{2n+1}$$

を利用して、

$$\sin z = (z - k\pi)g(z), \quad g(z) := (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - k\pi)^{2n}$$

と変形して、 $g(0) = (-1)^k \neq 0$ を確認しても良い。

(b) $f(z) = \cos z - 1$ で、 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) は 2 位の零点である。実際、

$$\begin{aligned} f(2k\pi) &= \cos 2k\pi - 1 = 1 - 1 = 0, \\ f'(z) &= -\sin z, \quad f'(2k\pi) = -\sin 2k\pi = 0, \\ f''(z) &= -\cos z, \quad f''(2k\pi) = -\cos 2k\pi = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) は 2 位の零点である。あるいは、Taylor 展開

$$\cos z = \cos(z - 2k\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - 2k\pi)^{2n}$$

を利用して、

$$\cos z - 1 = (z - k\pi)^2 g(z), \quad g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - 2k\pi)^{2(n-1)}$$

と表し、 $g(2k\pi) = -\frac{1}{2} \neq 0$ を確認しても良い。 ■

11.3 極とその位数の特徴づけ

我々は、極を Laurent 展開を用いて定義したが、Laurent 展開を求めるのはしばしば面倒なので、極であることの、もっと簡単な判定法があると便利である。ここではそれを追求しよう。

次の命題を、零点に関する命題 11.2 と比較してみると良い。この命題の (ii) $\implies$ (i) の証明を見ると、極のまわりの Laurent 展開を求める問題は、Taylor 展開を求める問題に帰着されることが分かる。残念ながら (孤立) 真性特異点のまわりの Laurent 展開については、似たようなことは出来ない。

命題 11.5 (極の特徴づけ) c が f の孤立特異点、 $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) c は f の k 位の極

(ii) c を含むある開集合 U で正則な関数 g が存在して、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - c)^k} \quad (z \in U \setminus \{c\}), \quad g(c) \neq 0.$$

証明 c が f の孤立特異点ということから、 c のまわりで Laurent 展開できる。すなわち $\exists R \in (0, \infty]$, $\exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (0 < |z - c| < R).$$

(i) $\implies$ (ii) の証明。 c が f の k 位の極ならば、

$$a_{-k} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - c)^n \\ &= \frac{a_{-k}}{(z - c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - c} + a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots \quad (0 < |z - c| < R) \end{aligned}$$

であるから、

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-c) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

この右辺は冪級数で、 $(0 < |z-c| < R)$ で収束するのだから、収束半径は R 以上である。そこで

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n \quad (|z-c| < R)$$

とおくと、 g は $D(c; R)$ で正則で、

$$(z-c)^k f(z) = g(z) \quad (0 < |z-c| < R).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R) \quad \text{かつ} \quad g(c) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_{n-k}(c-c)^n = a_{-k} \neq 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) の証明。(ii) を仮定すると、 $\exists R > 0, \exists g: D(c; R) \rightarrow \mathbb{C}$ s.t. g は正則で、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R), \quad g(c) \neq 0.$$

g は $D(c; R)$ で正則だから、Taylor 展開できる。すなわち

$$\exists \{a_n\}_{n \geq 0} \quad \text{s.t.} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots \quad (|z-c| < R).$$

ゆえに $0 < |z-c| < R$ を満たす任意の z に対して、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-c)^k} = \frac{a_0}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z-c} + a_k + a_{k+1}(z-c) + a_{k+2}(z-c)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^k \frac{a_{k-n}}{(z-c)^n}. \end{aligned}$$

そして、 $a_0 = g(c) \neq 0$ であるから、 c は f の k 位の極である。■

注意 11.1 (対比させておく) 命題 11.2 で見たように、 c が f の k 位の零点とは、

$$f(z) = (z-c)^k g(z) \quad (|z-c| < R), \quad g(c) \neq 0$$

を満たす正則関数 $g: D(c; R) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在すること。また命題 11.5 で見たように、 c が f の k 位の極とは、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R), \quad g(c) \neq 0$$

を満たす正則関数 $g: D(c; R) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在すること。良く見比べよう。■

系 11.6 P と Q は c の近傍で正則で、 c は P の k 位の零点、 $Q(c) \neq 0$ であるならば、 c は $f := \frac{Q}{P}$ の k 位の極である。

証明 c が P の k 位の零点であるから、 c の近傍で正則な関数 R が存在して、 $P(z) = (z - c)^k R(z)$, $R(c) \neq 0$. このとき、 $g(z) := \frac{Q(z)}{R(z)}$ とおくと、 g は c の近傍で正則で、 $g(c) = \frac{Q(c)}{R(c)} \neq 0$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ (c のある除外近傍で) が成り立つ。命題 11.5 によって、 c は f の k 位の極である。 ■

問 $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, f は c の近傍で正則とするとき、 c が f の k 位の零点であるためには、 c が $\frac{1}{f}$ の極であることが必要十分であることを示せ。

例 11.1 $f(z) := \frac{\sinh z}{\sin z}$ のすべての極とその位数を求めよ。

(解) $Q(z) := \sinh z$, $P(z) := \sin z$ はともに $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である ($\sinh z = (\exp z - \exp(-z))/2$, $\sin z = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i)$ から分かるし、原点における Taylor 展開の収束半径が ∞ であることを確認しても良い)。 $c \in \mathbb{C}$ が極であるためには、 $P(c) = 0$ であることが必要である。 $\sin c = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } c = n\pi$. $P'(c) = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ であるから、 $c = n\pi$ は P の 1 位の零点である。

(i) $n \neq 0$ のとき、 $Q(n\pi) = \sinh n\pi \neq 0$ ($\sinh n\pi > 0$ に注意) であるから、上の Cor. によって、 $n\pi$ は $f = Q/P$ の 1 位の極である。

(ii) 0 は P の 1 位の零点であるから、 $\exists P_1$ s.t. P_1 は 0 のある近傍 ($\mathbb{C}$ で OK) で正則で、 $P(z) = zP_1(z)$, $P_1(z) \neq 0$ ($0 < |z| < 1$). 同様に 0 は Q の 1 位以上の零点であるから、 $\exists Q_1$ s.t. Q_1 は 0 の近傍 ($\mathbb{C}$ で OK) で正則で、 $Q(z) = zQ_1(z)$. このとき、 0 のある除外近傍 ($0 < |z| < 1$) で

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{zQ_1(z)}{zP_1(z)} = \frac{Q_1(z)}{P_1(z)}.$$

この右辺は $|z| < 1$ で正則であるから、 0 は f の除去可能特異点である。ゆえに 0 は f の極ではない。 ■

12 留数定理 (residue theorem)

12.1 留数の定義

(実はすでに上の方で定義しておいたし、この項は例も含めて不要になったようだが、念のためしばらく残しておく。12/22 の講義では飛ばすつもり。)

定義 12.1 (留数) c が複素関数 f の孤立特異点または正則点とする。 f の c における Laurent 展開を $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ とするとき、 a_{-1} を f の c における ^{りゅうすう}留数 (residue) と呼び、 $\text{Res}(f; c)$ または $\text{Res}_{z=c} f(z) dz$ と表す:

$$\text{Res}(f; c) = \text{Res}_{z=c} f(z) dz := a_{-1}.$$

Laurent 展開をするのはしばしば難しいが、Laurent 展開をしなくて、留数を求められる場合も多く、その方法をマスターすることが重要になる。

例 12.2 $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) とする。この定義式そのものが f の 0 における Laurent 展開となっていて ($a_{-1} = 1$, $a_n = 0$ ($n \neq 0$)) とすると、 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ($0 < |z| < \infty$)、 $\text{Res}(f; 0) = 1$. ■

例 12.3 $f(z) := \exp \frac{1}{z}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) とする。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots$$

ゆえに $\text{Res}(f; 0) = 1$. $\text{Res}(zf(z); 0) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(z^2 f(z); 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$. ■

f が $0 < |z-c| < R$ で正則であるならば、定理 4.16 (円環領域で正則な関数の Laurent 展開) によって

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}, 0 < r < R)$$

であるから、

$$(\heartsuit) \quad \text{Res}(f; c) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-c|=r} f(\zeta) d\zeta \quad (0 < r < R).$$

何で -1 番目の a_{-1} が大事かというのと、 -1 番目が $(f(\zeta)/(\zeta-c)^{n+1})$ とかでなくて f 自身の積分に係わるからである。そうなる理由は

$$\int_{|z-c|=R} (z-c)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}) \end{cases}$$

にある。

f の正則点 (その点の近傍で f が正則であるような点のこと)、除去可能特異点における留数は 0 である。そこで極や真性特異点での留数が問題になる。

問 60. $\text{Res}(f; c) = a_{-1}$ とするとき、次のものを求めよ ($f \mapsto \text{Res}(f; c)$ は線型であることに注意)。

$$(1) \text{Res}(f(z) + \cos z; c) \quad (2) \text{Res}(3f(z); c)$$

12.2 留数定理

定理 12.4 (留数定理 (the residue theorem)) $\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}$ の有界領域で、その境界 $\partial\mathcal{D}$ は区分的に C^1 級の単純閉曲線であるとする。また、 Ω は $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$ を満たす領域、 $\{c_j\}_{j=1}^N$ は $\mathcal{D}$ 内の相異なる点、 $f: \Omega \setminus \{c_1, \dots, c_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とするとき、

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$

ただし $\partial\mathcal{D}$ は正の向きの曲線であるとする ($\partial\mathcal{D}$ の進行方向の左手に $\mathcal{D}$ を見る)。

証明 (授業では、大きくて分かり易い図を描くこと!) 各 j に対して、 c_j を中心とした、十分小さな半径 r_j の円周を正の向きに一周する閉曲線 C_j を取って、

$$C' := C - C_1 - C_2 - \dots - C_N, \quad \mathcal{D}' := \mathcal{D} \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{D}(c_j; r_j)$$

とおくと、 $\partial\mathcal{D}' = C'$ (正の向き)、 $\overline{\mathcal{D}'} \subset \Omega \setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ であるから、定理 3.2 (Cauchy の積分定理) によって、

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^N \int_{C_j} f(z) dz.$$

右辺の各項 (f の C_j に沿う積分) は、(♥) によって

$$\int_{C_j} f(z) dz = \int_{|z-c_j|=r_j} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f; c_j).$$

ゆえに

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j). \blacksquare$$

問 61. 次の用語・記号の定義を述べよ。(1) 区分的に滑らかな曲線 (2) 単純曲線 (3) 閉曲線 (4) 領域 (5) $\mathbb{C}$ の部分集合 D に対する $\overline{D}$ (6) 正の向き

例 12.5 単位円 $|z| = 1$ を反時計まわりに一周する曲線を C とする。 C は滑らかな単純閉曲線である。 C の囲む領域 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ の閉包 $\overline{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ は $\Omega := \mathbb{C}$ に含まれる。また C の向きは正の向きである。 $f(z) := \frac{1}{z}$ は、 $\Omega \setminus \{0\}$ で正則である。 $N = 1$, $c_1 = 0$ として、上の定理の仮定がすべて満たされ、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \text{Res}(f; 0) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i. \blacksquare$$

数式処理系 Mathematica 関数 f の c の周りの n 次の項までの Laurent 展開を求めるには `Series[f[z], {z, c, n}]` とすれば良い。 `Series[1/(z Sin[z]), {z, 0, 10}]` とすると

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7z^2}{360} + \frac{31z^4}{15120} + \frac{127z^6}{604800} + \frac{73z^8}{3421440} + \frac{1414477}{653837184000}z^{10} + O(z^{11})$$

という結果を得る。

12.3 極における留数の求め方

$\text{Res}(f; c) = a_{-1}$ を求めるにはどうすれば良いか。ここでは c が f の極である場合に使える方法を紹介する。

命題 12.6 c が f の高々 1 位の極ならば、

$$(22) \quad \text{Res}(f; c) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z).$$

(c が f の高々 1 位の極というのは、 c が f の 1 位の極か、または f の除去可能特異点であることをいう。)

証明 c が f の高々 1 位の極であれば、 $\exists R > 0, \exists \{a_n\}_{n=-1}^{\infty}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \frac{a_{-1}}{z-c} \quad (0 < |z-c| < R).$$

$(z-c)$ をかけると

$$(z-c)f(z) = a_{-1} + a_0(z-c) + a_1(z-c)^2 + \cdots \quad (0 < |z-c| < R).$$

ゆえに

$$\lim_{z \rightarrow c} (z-c)f(z) = a_{-1} = \text{Res}(f; c). \blacksquare$$

例 12.7 $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ とするとき、 $\text{Res}(f; i)$ を求めよう。 $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ であるから、 i は f の 1 位の極である。ゆえに

$$\text{Res}(f; i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}. \blacksquare$$

実際に計算するには、次の命題が便利である場合が多い。

命題 12.8 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、 c は $P(z)$ の 1 位の零点ならば ($P(c) = 0$ かつ $P'(c) \neq 0$ と言っても良い)、 c は f の高々 1 位の極で

$$(23) \quad \text{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

(仮定に $Q(c) \neq 0$ という条件があれば、 c は f の 1 位の極であるが、留数を求める目的には不要である。)

証明 c が P の 1 位の零点であるから、 $\exists g$ s.t. g は c の近傍で正則かつ $P(z) = (z - c)g(z)$, $g(c) \neq 0$. このとき、

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{Q(z)}{(z - c)g(z)} = \frac{h(z)}{z - c}, \quad h(z) := \frac{Q(z)}{g(z)}.$$

h は c の近傍で正則であるから、 c は f の高々 1 位の極である (もしも $Q(c) \neq 0$ であれば 1 位の極である)。命題 12.6 によって、

$$(24) \quad \text{Res}(f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} (z - c)f(z) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{(z - c)Q(z)}{P(z)} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{Q(z)}{\frac{P(z) - P(c)}{z - c}} = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

ただし $P(c) = 0$ を用いた。■

例 12.9 $f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$ とするとき、 $\text{Res}(f; i)$ を求めよ。

(解) $f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)(z + i)(z - i)}$ であり、 i は分母の 1 位の零点である。ゆえに

$$\text{Res}(f; i) = \frac{1}{(z^4 - 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{1}{4i^3} = \frac{i}{4i^4} = \frac{i}{4}. \blacksquare$$

例 12.10 $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$. 極は $z = \omega^k$ ($\omega := \exp \frac{2\pi i}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$) で、すべて分母 $z^n - 1$ の 1 位の零点である。ゆえに ($(\omega^k)^n = 1$ に注意して)

$$\text{Res}(f; \omega^k) = \frac{1}{(z^n - 1)'} \Big|_{z=\omega^k} = \frac{z}{nz^n} \Big|_{z=\omega^k} = \frac{\omega^k}{n}. \blacksquare$$

f の Taylor 展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ で $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ であることを導くのと同様の方法で、次の定理が得られる。

命題 12.11 c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\text{Res}(f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{1}{(k - 1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} [(z - c)^k f(z)].$$

証明 c が f の高々 k 位の極であることから、 $\exists R > 0$, $\exists \{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ s.t.

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - c)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - c} + a_0 + a_1(z - c) + \dots \quad (0 < |z - c| < R).$$

分母を払って

$$(z - c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-(k-1)}(z - c) + \dots + a_{-1}(z - c)^{k-1} + a_0(z - c)^k + a_1(z - c)^{k+1} + \dots$$

a_{-1} が定数項の係数に現れるまで、つまり $k - 1$ 回微分すると、

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} [(z - c)^k f(z)] = (k - 1)! a_{-1} + \frac{k!}{1!} a_0(z - c) + \frac{(k + 1)!}{2!} a_1(z - c)^2 + \dots.$$

$z \rightarrow c$ としてから両辺を $(k - 1)!$ で割れば良い。■

例 12.12

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

とすると、3 は f の 2 位の極であるから、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; 3) &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{2-1} [(z-3)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 3} \left(\frac{z}{z+1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z+1) \cdot 1 - 1 \cdot z}{(z+1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(3+1)^2} = \frac{1}{16}. \blacksquare \end{aligned}$$

例 12.13 $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$. $z = 0$ は 2 位の極で、0 での Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \cdots$$

ゆえに $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$. f は偶関数だから、留数が 0 であることは明らか。 ■

問 62. f は $0 < |z| < \rho$ で正則で、

$$f(-z) = f(z) \quad (0 < |z| < \rho)$$

を満たすとするとき、 $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$ であることを示せ。

問 63. c は f の極で $\operatorname{Res}(f; c) = a_{-1}$ とする。また φ は c の近傍で正則とする。このとき $\operatorname{Res}(\varphi(z)f(z); c)$ を求めよ。

例 12.14 (工事中) $f(z) = \pi \cot \pi z$ の極と留数をすべて求めよ。

(方法 1) (命題 12.8 を用いる) $P(z) := \sin \pi z$, $Q(z) := \pi \cos \pi z$ とおくと、 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$. 比較的容易に $P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } z = n$. $P'(z) = Q(z)$ である。 $Q(n) = P'(n) = \pi \cos n\pi = \pi(-1)^n \neq 0$. ゆえに n は f の 1 位の極である。そして、

$$\operatorname{Res}(f; n) = \frac{Q(n)}{P'(n)} = 1.$$

(方法 2: 教科書 p.88 — そのうち取り込む) ■

例 12.15 (教科書 pp. 88–89) $f(z) = \frac{1}{8z^2 - 2z - 1}$

余談 12.16 (留数 $\operatorname{Res}(f; c) = a_{-1}$ だけでなく、 a_n を求める) c が f の高々 k 位の極であれば、

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R)$$

と書けるが、 $(a_{-1}$ だけでなく) a_n を求める公式も得られる。

$$(25) \quad a_n = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n+k} [(z-c)^k f(z)].$$

実際、

$$\begin{aligned} (z-c)^k f(z) &= a_{-k} + a_{-(k-1)}(z-c) + a_{-(k-2)}(z-c)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z-c)^m \quad (0 < |z-c| < R) \end{aligned}$$

を $g(z)$ とおくと、 m 次の項の係数 a_{m-k} は

$$a_{m-k} = \frac{g^{(m)}(c)}{m!} = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{1}{m!} \left(\frac{d}{dz} \right)^m [(z-c)^k f(z)].$$

$m-k$ を n とおけば良い。 ■

12.4 締めくくり

解決したのか？ 孤立特異点には、真性特異点というのがあった、その場合は、同じように処理することはできない。ちょっと難しい。つまり、除去可能特異点と極についてだけ、大分理解できた、という状況にある。

数式処理系 Mathematica Mathematica では、`Residue[式, {変数, 孤立特異点}]` で留数が求まり、`Series[式, {変数, 孤立特異点, 次数}]` でローラン展開が求まる。孤立特異点として `Infinity` が指定できる。なお `Apart[式]` で部分分数展開が出来る。

```
Residue[z/((z-2)(z-1)^3), {z, 1}]
Series[z/((z-2)(z-1)^3), {z, 1, 10}]
```

受験数学的まとめ

- c が f の除去可能特異点 or f が c の近傍で正則 (c が f の正則点) $\implies \text{Res}(f; c) = 0$
- c が f の高々 k 位の極 $\implies \text{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} [(z-c)^k f(z)]$.
特別な場合として、 $f = \frac{Q}{P}$, $P(c) = 0$, $P'(c) \neq 0$ ならば、 $\text{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}$
- c が f の真性特異点 $\implies$ このようなウマイ方法はない。

13 定積分計算への留数の応用

(現在、かなり乱雑な状態になっています。整理すべきですが、なかなか時間が取れないので、今年度はこのままになりそうです。)

13.1 はじめに (この問題を取り上げる意義と広義積分についての注意)

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、定積分の計算をなるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったということである。そうして創られた理論は定積分計算という目的を超えて、大発展することになったのであるが、一方でこの節で説明するような(留数計算に基づく)定積分の計算法は、使いこなすために関数論の堅実な理解が必要で、自己の知識に不十分なところがないかのチェックのための良い演習問題を提供してくれる。

(余談: もちろん、これは学生の理解度を計ろうとする側にとっても良い問題ということで、大学院入試のペーパーテストで結構凝った問題が出題されることがある。そういう試験を受験する場合は、事前に十分な準備をしておくこと。)

ここでは特にシンプルで代表的な場合について、なるべくていねいに説明することを目指した。

余談 13.1 (一松信先生の言葉) 一松 [17] の「はしがき」に次のくだりがある。

この本は数学ワンポイント双書の1冊として、元来は定積分の計算技術の解説のために企画された。とくに留数解析の応用という面についてである。

しかしとりかかってみると、この話題は実質的に複素解析学の教科書になりかねないことがわかった。留数の定理を既知として、その使い方だけを解説しようと思っても、あまりにも多くの「常識的な」基礎知識が必要であり、しかも普通の教科書ではそれらが必ずしもきちんとおさえられていない場合が多いのである。

筆者は乏しい関数論の授業経験しか持っていないが、この一松先生の言葉には大いに頷ける。定積分計算とじっくり取り組むことで、幅広い関数論の知識が試されることになる。■

ところで、以下取り上げる積分の多くが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

の形をしていて、いわゆる広義積分である。これについて少し注意しておく。

ここで取り上げる例では、被積分関数 f は連続であるが、積分区間が非有界であるので、

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx$$

で定義される。積分区間の下端と上端を独立に極限移行することが重要で、

$$(27) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (\text{一般には正しくない式})$$

ではないことを理解する必要がある。

(そうでないと、本当は積分が存在しない $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ について、値が 0 という変なことをやってしまう。似た話に $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} \, dx$ がある。 $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} \, dx + \int_{\varepsilon_2}^2 \frac{1}{x} \, dx \right)$ が定義で、「積分が存在しない」が正しいが、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \, dx + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x} \, dx \right)$ と計算すると $\log 2$ という値が出る。)

一方で、ある条件が成り立つ場合は、(27) で計算しても構わない。そのための条件として、次の2つを是非とも覚えなくてはならない。

- (a) f が実数値で、符号が変わらない (つねに 0 以上であるか、またはつねに 0 以下)。
(積分が発散するのは、 $+\infty$ や $-\infty$ になるということで、それは $\lim$ として捉えることが出来る。)
- (b) 広義積分が絶対収束する、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$

が成り立つ。

次項 13.2 で取り上げる有理関数の積分については、実は広義積分が絶対収束することが簡単に分かるため (27) を用いているが、次々項 13.3 で取り上げる有理関数 $\times e^{iax}$ の積分については、一般には広義積分は絶対収束しないため、(26) を用いている。

この講義は、広義積分の理論を説明する講義ではないので、そこを細かく追求する問題は考えないが、留意してもらいたいことである。

13.2 有理関数の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$

命題 13.2 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbb{R} \, P(x) \neq 0$ が成り立つとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

(ここで $\sum_{\operatorname{Im} c > 0}$ は、 f の極 c のうち、上半平面に属するものすべてについての和を意味する。)

余談 13.3 (後になって分かる注意) 後で、 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付加した $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ で関数論を展開する。そのとき、実軸は $\hat{\mathbb{C}}$ における閉曲線で、上半平面を正の向きに囲んでいることが分かるので、この命題は留数定理から明らかになる。 ■

証明 まず広義積分が絶対収束であることを示そう。 $n := \deg P(z)$, $m := \deg Q(z)$ とおく。

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0), \\ Q(z) &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m \quad (b_0 \neq 0) \end{aligned}$$

と書ける。ゆえに (補題 9.13, p. 106 によって)

$$(\exists R^* \in [1, \infty)) (\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad |P(z)| \geq \frac{|a_0|}{2} |z|^n, \quad |Q(z)| \leq \frac{3|b_0|}{2} |z|^m.$$

これから、 $P(z)$ のすべての零点は $|z| < R^*$ に含まれることが分かる。また仮定より、 $n \geq m+2$ であることを用いると、

$$(\star) \quad |f(z)| = \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right| \leq \frac{\frac{3}{2}|b_0||z|^m}{\frac{1}{2}|a_0||z|^n} = \frac{3|b_0|}{|a_0|} \frac{1}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*), \quad M := \frac{3|b_0|}{|a_0|}.$$

この評価と、仮定 $P(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) より f が $\mathbb{R}$ で連続であることを用いると、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ は絶対収束であることが分かる²⁹。ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

さて、

$$\Gamma_R : z = x \quad (x \in [-R, R]), \quad C_R : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]), \quad \gamma_R := \Gamma_R + C_R$$

とおく。まず明らかに

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\Gamma_R} f(z) dz.$$

($\star$) を用いると、 $\forall R > R^*$ に対して、

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \max_{\theta \in [0, \pi]} |f(Re^{i\theta})| \cdot R \cdot \pi \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{M\pi}{R}$$

であるから³⁰、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

$P(z)$ の零点は多項式であるから有限個で、上に述べたように円盤 $|z| < R^*$ に含まれ、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)$ の極または除去可能特異点であり、それらを除いた範囲では f は正則である (ゆえに留数定理に現れるような「除外点 c_j 」のうちで上半平面に属する

²⁹ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-R^*}^{R^*} |f(x)| dx + \int_{|x| \geq R^*} |f(x)| dx \leq \int_{-R^*}^{R^*} |f(x)| dx + 2M \int_{R^*}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty.$

³⁰ この部分は、パラメーターを見せずに $\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_R} |f(z)| \int_{C_R} |dz| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{M\pi}{R}$ と処理することも出来る。

ものは、 γ_R で囲まれた領域内に入っている)。また γ_R は単純閉曲線であるから、留数定理を用いて、

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{c \text{ は } \gamma_R \text{ の内部}} \text{Res}(f; c) = 2\pi i \sum_{\substack{c \text{ は } f \text{ の極} \\ \text{Im } c > 0}} \text{Res}(f; c).$$

以上より

$$2\pi i \sum_{\substack{c \text{ は } f \text{ の極} \\ \text{Im } c > 0}} \text{Res}(f; c) - \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{c \text{ は } f \text{ の極} \\ \text{Im } c > 0}} \text{Res}(f; c). \blacksquare$$

問 64. f が命題 13.2 の仮定を満たすとき、 $2\pi i \sum_{\text{Im } c < 0} \text{Res}(f; c)$ は何になるか？(答は p. 151)

例 13.4 $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$. これが命題 13.2 の仮定を満たすことは明らかである。(一応やっておくと、 $P(z) := z^2 + 1$, $Q(z) := 1$ はともに $\mathbb{C}[z]$ に属し、 $\deg P(z) = 2$, $\deg Q(z) = 0$ であるから $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$. $x \in \mathbb{R}$ のとき $P(x) = x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$.) $f(z) := \frac{1}{z^2 + 1}$ の極は分母 $z^2 + 1$ の零点で、 $c = \pm i$ である。そのうち $\text{Im } c > 0$ を満たすものは i のみであるから、

$$I = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) = 2\pi i \text{Res}(f; i).$$

i は f の 1 位の極であるから、

$$\text{Res}(f; i) = \lim_{\substack{z \neq i \\ z \rightarrow i}} (z - i)f(z) = \lim_{\substack{z \neq i \\ z \rightarrow i}} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i}.$$

あるいは

$$\text{Res}(f; i) = \frac{1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

ゆえに

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \blacksquare$$

余談 13.5 Mathematica ならば `Integrate[1/(x^2+1), {x, -Infinity, Infinity}]` とする。Maple ならば `int(1/(x^2+1), x=-infinity..infinity)` ■

注意 13.1 f が偶関数の場合、 $\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ だから、半無限区間 $(0, \infty)$ における積分もここで示す方法で計算できる。 ■

例 13.6 (Ahlfors [15] p. 173) $I := \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$. 被積分関数は偶関数であるから、

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx.$$

$f(x) := \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6}$, $P(z) := z^4 + 5z^2 + 6$, $Q(z) := z^2$ とおくと、 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $\deg P = \deg Q + 2$, $P(z) = (z^2 + 2)(z^2 + 3) = (z + \sqrt{2}i)(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{3}i)(z - \sqrt{3}i)$, $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \neq 0$ であるから、

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c) = \pi i \left(\operatorname{Res}(f; \sqrt{2}i) + \operatorname{Res}(f; \sqrt{3}i) \right).$$

$$\operatorname{Res}(f; \sqrt{2}i) = \frac{Q(\sqrt{2}i)}{P'(\sqrt{2}i)} = \frac{z^2}{4z^3 + 10z} \Big|_{z=\sqrt{2}i} = \frac{z}{4z^2 + 10} \Big|_{z=\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}i}{-8 + 10} = \frac{\sqrt{2}i}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f; \sqrt{3}i) = \frac{Q(\sqrt{3}i)}{P'(\sqrt{3}i)} = \frac{z^2}{4z^3 + 10z} \Big|_{z=\sqrt{3}i} = \frac{z}{4z^2 + 10} \Big|_{z=\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}i}{-12 + 10} = -\frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

ゆえに

$$I = \pi i \frac{\sqrt{2}i - \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \pi.$$

(なぜか Mathematica では解けない。不定積分は求まるのに。Maple では一応求まった。… と思っていて、久しぶりに試したら、Mathematica が $(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})\pi/2$ という解を返すようになっていた。バージョンの違いか?) ■

例 13.7 (教科書 pp. 89–90 とほぼ同じ)

$$I := \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + x^4}.$$

$f(x) := \frac{1}{1 + x^4}$, $P(z) := z^4 + 1$, $Q(z) := 1$ とおくと、 $f = \frac{Q}{P}$, $\deg P \geq \deg Q + 2$, $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \neq 0$. $P(z) = 0$ の根 $z = c$ は、 $c = \exp\left(\frac{\pi i}{4} + k\frac{2\pi i}{4}\right)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) として³¹、

$$c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

(あるいは $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$ から、 $c = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2}$, $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$, $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ と解く。) そのうち上半平面にあるものは、 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ と $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. $P(z)$ の任意の根 c は $c^4 = -1$ を満たすので、

$$\operatorname{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=c} = \frac{z}{4z^4} \Big|_{z=c} = \frac{c}{4 \cdot (-1)} = -\frac{c}{4}$$

³¹以前は “ $c = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号任意)” と書いていたのだけど、「複号任意」という表現は高校生のときに、問題集の片隅で見たことしかなく、古語だと思われるので、今後は使わないことにした。

に注意して、

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c) = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(f; \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{Res} \left(f; \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacksquare \end{aligned}$$

余談 13.8 Mathematica ならば `Integrate[1/(x^4+1), {x,-Infinity,Infinity}]` とする。
Maple ならば `int(1/(x^4+1), x=-infinity..infinity)` とする。■

例 13.1 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}. \blacksquare$$

余談 13.9 Maple ならば

```
assume(n::integer, n>0)
int(1/(x^(2n)+1), x=-infinity..infinity)
```

Mathematica では

```
Integrate[1/(1+x^(2n)), {x,-Infinity,Infinity}, Assumptions->Element[n,Integers]&& n>0]
```

に対して $\frac{\left(1 + (e^{2in\pi})^{-\frac{1}{2n}}\right) \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}}{2n}$ を返す。FullSimplify[] すると簡単になる。■

例 13.2 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

余談 13.10 (数式処理系で検算) Mathematica で

```
Integrate[1/(1+x^2)^(n+1), {x,-Infinity,Infinity}, Assumptions-> n>0]
```

Maple で、

```
assume(n::integer, n>0)
int(1/(1+x^2)^(n+1), x=-infinity..infinity)
```

とすると、いずれも

$$I = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

という答が返って来る。 $\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$ を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

$$\Gamma(n+1) = n! = \frac{(2n)!!}{2^n}$$

であるから、

$$I = \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2n-1)!! \sqrt{\pi}/2^n}{(2n)!!/2^n} = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}. \blacksquare$$

問 65. 以下の積分を求めよ。

(1) 正数 a に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$. (答: $\frac{\pi}{a}$)

(2) 正数 a に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} dx$. (答: $\frac{\pi}{a^3\sqrt{2}}$)

(3) 正数 a に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$. (答: $\frac{\pi}{2a^3}$)

(4) 正数 a に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + a^6} dx$. (答: $\frac{2\pi}{3a^5}$)

(5) 正数 a に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^4} dx$. (答: $\frac{\pi}{16a^3}$)

(6) 正数 a に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^4 + a^4)^3} dx$. (答: $\frac{5\sqrt{2}\pi}{64a^9}$)

(7) 正数 a , 自然数 n に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$. (答: $\frac{\pi(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n-2)!!}$)

(8) 正数 a , 自然数 n に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n} + a^{2n}}$. (答: $\frac{\pi}{na^{2n-1} \sin \frac{\pi}{2n}}$)

余談 13.11 Maple ならば

```
assume(n::integer, n>0)
assume(a>0)
f:= n-> int(1/(x^2+a^2)^n,x=-infinity..infinity)
f(n)
```

とすると

$$\frac{(a^2)^{-n} a \sqrt{\pi} \Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n-1/2)}{a^{2n-1} (n-1)!} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} (2n-3)!! / 2^{n-1}}{a^{2n-1} (2n-2)!! / 2^{n-1}} = \frac{\pi (2n-3)!!}{a^{2n-1} (2n-2)!!}.$$

$\text{seq}(f(j), j=1..10)$

として、

$$\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{2a^3}, \frac{3\pi}{8a^5}, \frac{5\pi}{16a^7}, \frac{35\pi}{128a^9}, \frac{63\pi}{256a^{11}}, \frac{231\pi}{1024a^{13}}, \frac{429\pi}{2048a^{15}}.$$

同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n} + a^{2n}} = \frac{\pi}{na^{2n-1}} \sin \frac{\pi}{2n}. \blacksquare$$

問 66. (1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ (3) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, a \in \mathbb{R}$

(Ahlfors p. 173)

(答) (1) $\frac{\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2}$ (2) $\frac{5\pi}{12}$ (3) $\frac{\pi}{16|a|^3}$

p. 147 の問 64 の解答 $-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ に等しい。 $\blacksquare$

13.3 有理関数 $\times e^{iax}$ の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$

応用上非常に重要な Fourier 変換、逆 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \quad \hat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy} dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

$$(\mathcal{F}^*) \quad \tilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy} dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる公式を紹介する。例えば Fourier 変換 $(\mathcal{F})$ の場合、 $y < 0$ に対して、 $a = -y$ において以下の命題を用いる。 $y \geq 0$ に関しても少し工夫すれば計算できる。

$f(x)$ が実係数有理式である場合は、 $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax) dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

であることに注意しておこう。

命題 13.12 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1, \forall x \in \mathbb{R} P(x) \neq 0$, $a > 0$ が成り立つとき、

$$(28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(28) の $\sum_{\operatorname{Im} c > 0}$ は、 $f(z)e^{iaz}$ の極 (それは f の極とも一致する) c のうち、上半平面に属するものすべてについての和を意味する。

証明 (以下の積分路を用いるのは、筆者としてはお勧めの方法だが、採用している本が少なめ。) $\exists M \in \mathbb{R}, \exists R^* \in [1, \infty)$ s.t. $f(z)$ の分母 $P(z)$ の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (|z| \geq R^*).$$

(以下は図を描くのが早い) $A, B \in [R^*, \infty)$ に対して、

$$\begin{aligned} C_1 &: z = x \quad (x \in [-A, B]), \\ C_2 &: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]), \\ -C_3 &: z = x + i(A+B) \quad (x \in [-A, B]), \\ -C_4 &: z = -A + iy \quad (y \in [0, A+B]), \\ C_{A,B} &:= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \end{aligned}$$

とおく。

$P(z)$ は多項式であるから、その零点は有限個で、上に述べたように円盤 $|z| < R^*$ に含まれ、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)e^{iaz}$ の極または除去可能特異点であり、それら以外の点では $f(z)e^{iaz}$ は正則である。 $\operatorname{Im} c > 0$ を満たす極 c は単純閉曲線 $C_{A,B}$ の内部に含まれるから、留数定理を用いて、

$$\int_{C_{A,B}} f(z)e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{c \text{ は } C_{A,B} \text{ の内部}} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

曲線 C_1 に沿う線積分については、

$$\int_{C_1} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

以上をまとめて、

$$\begin{aligned} \int_{-A}^B f(z)e^{iaz} dz &= \int_{C_1} f(z)e^{iaz} dz = \int_{C_{A,B}} f(z)e^{iaz} dz - \sum_{j=2}^4 \int_{C_j} f(z)e^{iaz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) - \sum_{j=2}^4 \int_{C_j} f(z)e^{iaz} dz. \end{aligned}$$

曲線 C_2 に沿う線積分については、 z が C_2 上の点であるとき、 $z = z(y) = B + iy$ ($y \in [0, A+B]$) とおけるので、 $dz = i dy$,

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B \geq R^*, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = a \operatorname{Re}(iz) = -a \operatorname{Im} z = -ay, \quad |e^{iaz}| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから、

$$\left| \int_{C_2} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_{C_2} |f(z)| |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{M}{B} \int_0^{A+B} e^{-ay} dy \leq \frac{M}{B} \int_0^\infty e^{-ay} dy = \frac{M}{aB}.$$

曲線 $-C_3$ に沿う線積分については、 $-C_3$ が $z = z(x) = x + (A+B)i$ ($x \in [-A, B]$) とパラメーターづけできることから、 $dz = dx$,

$$|z| = \sqrt{(A+B)^2 + x^2} \geq A+B \geq R^*, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = a \operatorname{Re}(iz) = -a \operatorname{Im} z = -a(A+B), \quad |e^{iaz}| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-a(A+B)}$$

であるから、

$$\left| \int_{-C_3} f(z) dz \right| \leq \int_{-C_3} |f(z)| |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{M}{A+B} e^{-a(A+B)} \int_{-A}^B dx = M e^{-a(A+B)}.$$

曲線 $-C_4$ に沿う線積分については、 $-C_4$ が $z = z(y) = -A + iy$ ($y \in [0, A+B]$) とパラメーターづけできるから、 $dz = i dy$,

$$|z| = \sqrt{A^2 + y^2} \geq A \geq R^*, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = a \operatorname{Re}(iz) = -a \operatorname{Im} z = -ay, \quad |e^{iaz}| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから、

$$\left| \int_{-C_4} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_{-C_4} |f(z)| |e^{iaz}| |dz| \leq \frac{M}{A} \int_0^{A+B} e^{-ay} dy \leq \frac{M}{A} \int_0^\infty e^{-ay} dy = \frac{M}{aA}.$$

ゆえに、 $A, B \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{M}{aB}, e^{-a(A+B)}, \frac{M}{aA} \rightarrow 0$ であるから…、正確に言うと、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して、 $\exists R \in \mathbb{R}$ s.t.

$$A \geq R, \quad B \geq R \implies \left| \int_{C_j} f(z) e^{iaz} dz \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j = 2, 3, 4)$$

が成り立つので、広義積分 $\int_{-\infty}^\infty f(x) e^{iax} dx$ が存在し、(28) が成立することが分かる。■

$a < 0$ の場合は、次のようになる (証明は容易に想像できるであろう)。なお、例 13.14 も見よ。

系 13.13 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R} P(x) \neq 0$, $a < 0$ が成り立つとき、

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(29) の $\sum_{\operatorname{Im} c < 0}$ は、 $f(z)e^{iaz}$ の極 (それは f の極とも一致する) c のうち、下半平面に属するものすべてについての和を意味する。

注意 13.2 なお、 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ において、 $\deg P(x) \geq \deg Q(x) + 2$ である場合は、 $a \geq 0$ に対して (つまり $a = 0$ も OK³²) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、簡単な $\gamma_R = \Gamma_R + C_R$ を採用できる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ($e^{-aR \sin \theta} \leq 1$ より $\int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \pi$ が導かれる)。■

例 13.14 (簡単だが、 a の符号に関する条件について、示唆的な例) $a \geq 0$ とするとき、

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{1+z^2}; i \right) = 2\pi i \lim_{\substack{z \neq i \\ z \rightarrow i}} (z-i) \frac{e^{iaz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{ia \cdot i}}{i+i} = \pi e^{-a}.$$

両辺の実部、虚部を取ると、

$$(31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2} dx = 0.$$

$a < 0$ のときは、 $e^{iax} = \overline{e^{i(-a)x}}$ と考えて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e^{i(-a)x}}}{1+x^2} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(-a)x}}{1+x^2} dx} = \overline{\pi e^{-(-a)}} = \overline{\pi e^a} = \pi e^a.$$

これが分かりにくい場合は、例えば $a = -2$ の場合を書き下して見よう。 $e^{-2ix} = \overline{e^{2ix}}$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e^{2ix}}}{1+x^2} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{1+x^2} dx} = \overline{\pi e^{-2}} = \pi e^{-2}.$$

³²この場合は、前項で示した公式になる。

a が非負の場合、負の場合をまとめて

$$(32) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|a|} \quad (a \in \mathbb{R})$$

とも書ける (脱線になるが、これが a の関数として $a = 0$ で微分可能でないのは面白い…と思って欲しい、これは広義積分の難しさの一面を表している)。

なお、(32) を得るのに、(30) を用いるのではなく、(31) から始めるのが簡単かも知れない。 $a < 0$ であるとき、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(|a|x)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|a|}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2} dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(|a|x)}{1+x^2} dx = 0 \end{aligned}$$

これを1つの複素数にまとめて (32) を得る。この方が簡単という人も多いかな。 ■

余談 13.15 `assume(a>0)`

`int(cos(I*a*x)/(1+x^2),x=-infinity..infinity)`

例 13.3 $\alpha > 0$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha/\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

(誤植があった。きちんと書くまで取扱い注意。) ■

問 67. 以下の積分を求めよ。

(1) 正数 a, α に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2} dx$. (答: $\frac{e^{-a\alpha}}{a}$)

(2) 正数 a, α に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2 + a^2)^2} dx$. (答: $\frac{\pi(1 + a\alpha)e^{-a\alpha}}{2a^3}$)

(3) 正数 a, α に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^4 + a^4} dx$. (答: $\frac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}a^3} \left(\cos \frac{a\alpha}{\sqrt{2}} + \sin \frac{a\alpha}{\sqrt{2}} \right)$)

(4) 正数 a, α に対して、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^4 + a^4} dx$. (答: $\frac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{a^2} \sin \frac{a\alpha}{\sqrt{2}}$)

問 68. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$ ($a \in \mathbb{R}$) (答: $\frac{\pi e^{-|a|}}{2}$)

13.4 三角関数の有理関数の周期積分 $\int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

1変数の微積分で学んだように、 $r(x, y)$ を x, y の有理式とすると、 $\int r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ は初等関数で求まるが、実際の計算はかなり面倒になることが多い。しかし特に重要な $[0, 2\pi]$ 上の積分 (周期積分) については、留数を用いて簡単に計算できる。

命題 13.16 (三角関数の有理関数の積分) $r(x, y)$ を x, y の有理式とすると、

$$\int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \text{Res}(f; c).$$

ただし

$$f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で、 $f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\sum_{|c|<1}$ は、 f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

授業では、この公式は丸暗記するものでないこと、

$$z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

という変数変換で、

$$\cos \theta = (z + 1/z)/2, \quad \sin \theta = (z - 1/z)/(2i), \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \quad \text{より} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

と出来て、単位円盤内の留数の和の計算になることを強調する。

証明 (この証明を見せるよりは、例の紹介に入った方が良くかもしれない。)

$$I := \int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

は、 $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とすることで、

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}, \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz} \end{aligned}$$

であるから、

$$I = \int_{|z|=1} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} f(z) dz.$$

留数定理によって、この積分は $|z| = 1$ 内部の極における f の留数の和で計算できる。

$$I = 2\pi i \sum_{|c| < 1} \text{Res}(f; c). \blacksquare$$

注意 13.3 (試験の採点現場から) 上では、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

と置いているが、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

と置いてみたくもなるところである (実際にテストに出題すると、かなりの数の人がそうした)。しかし

$$f(z) := \frac{1}{iz} r \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$$

で定義した f は (特殊な場合を除いて) 正則関数にならないので、留数定理を使うことが出来なくなる。■

例 13.17 $I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 1]$) とおくと、

$$\begin{aligned} J &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2 + 1)} dz = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)} = i \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \text{Res} \left(\frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; c \right) \\ &= -2\pi \text{Res} \left(\frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; \frac{1}{2} \right) = -2\pi \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)} \\ &= -2\pi \frac{1}{2(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{2\pi}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

例 13.18 $0 < r < R$ とするとき、 $I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$ を求めよ (被積分関数は**ポアソン核**と呼ばれ、ポテンシャル論で重要な関数である)。

(解答) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \frac{z^2 + 1}{2z}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(R^2 + r^2)z - Rr(z^2 + 1)} \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{Rr z^2 - (R^2 + r^2)z + Rr} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(Rz - r)(rz - R)}. \end{aligned}$$

留数定理を用いて

$$\begin{aligned} I &= i \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(Rz-r)(rz-R)}; c \right) = -2\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(Rz-r)(rz-R)}; \frac{r}{R} \right) \\ &= -2\pi \lim_{z \rightarrow r/R} \frac{z-r/R}{(Rz-r)(rz-R)} = -\frac{2\pi}{R} \cdot \frac{1}{r \cdot r/R - R} = \frac{2\pi}{R^2 - r^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

例 13.19 $a > 0$ とするとき、

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|}. \blacksquare$$

例 13.20 $a > 1$ とするとき、

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \blacksquare$$

例 13.21 $0 \leq e < 1$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$

(Mathematica は、`Integrate[1/(1+e Cos[x])^2, {x, 0, 2Pi}, Assumptions->e>0 && e<1]` で計算してくれる。これは Kepler 運動の周期の計算に必要な積分である。) ■

以下の問題の多くは、梶原 [18] pp. 80–81 などから採った。

- 問 69. (1) 自然数 n に対して、 $I = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta$. (2) 自然数 n に対して、 $I = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta d\theta$.
 (3) 正数 a, b に対して、 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$. (4) (立教大) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$.
 (5) (慶応大、早大、立教大、九大) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$ ($0 < r < R$). (6) (東海大) $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} \right) d\theta$ ($0 < r < R$). (7) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^2}$ ($0 < r < R$). (8) (九大、早大) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta}$ ($a > b > 0$). (9) 自然数 m , 正数 r, R ($r < R$) に対して、 $I + iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin m\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} d\theta.$$

(10) 正数 a , 自然数 n に対して、 $I + iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta - n\theta) d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} \sin(a \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

- 解答 (1) $\frac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (2) $\frac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (3) $\frac{2\pi}{ab}$ (4) $\frac{2\pi}{3}$ (5) $\frac{2\pi}{R^2 - r^2}$ (6) 1 (7) $\frac{2\pi(R^2 + r^2)}{(R^2 - r^2)^3}$
 (8) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ (9) $I = \frac{2\pi}{R^2 - r^2} \left(\frac{r}{R} \right)^m, J = 0$ (10) $I = \frac{2\pi a^n}{n!}, J = 0$

問 70. $a^2 > b^2 + c^2$ を満たす実数 a, b, c に対して、

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$$

を求めよ。(答: $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$)

問 71. (Ahlfors [15], p. 173) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + \sin^2 x}, |a| > 1$ (答: $\frac{\pi \operatorname{sign} a}{2\sqrt{a^2 + a}}$)

13.5 その他

(ここはその一部 (例えば例 13.24) を授業で説明するかもしれない、程度の扱い。実際に説明したものを本文に残し、残りは付録に移すかもしれない。)

13.5.1 Cauchy の主値積分

広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

が $I \in \mathbb{C}$ に収束するとは、

$$(\#) \quad \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B f(x) dx = I,$$

すなわち

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists R \in \mathbb{R}) \quad (\forall A \in \mathbb{R} : A \geq R) \quad (\forall B \in \mathbb{R} : B \geq R) \quad \left| I - \int_{-A}^B f(x) dx \right| < \varepsilon$$

を意味する。このとき、

$$(b) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx = I$$

が成り立つが、(b) が成り立つからと言って、(♯) が成り立つとは限らないことに注意しよう。

(b) の左辺を **Cauchy の主値** と呼び、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{あるいはフランス流に} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

で表す。

例 13.22

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & (|x| \geq 1) \\ 0 & (|x| < 1) \end{cases}$$

とすると、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$$

であるが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

は存在しない。■

有理関数 f の分母が実軸上に零点 c を持つと、 c を含む区間 (a, b) において、広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は普通の意味では収束しない。しかし、 c が f の 1 位の零点である場合は、広義積分に (以下に説明する) Cauchy の主値と呼ばれるものが存在し、役に立つことがある。

問 72. f が $[a, b]$ で C^1 級で、 $c \in (a, b)$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right)$$

が存在することを示せ。■

この極限値を

$$\text{p.v.}_c \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx \quad \text{あるいは} \quad \text{p.v.} \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx$$

と表し、やはり **Cauchy の主値** と呼ぶ。

例 13.23 積分範囲である実軸上に 1 位の極がある場合、通常の意味では広義積分は発散するが、主値を取ることにすれば、留数の半分だけを入れれば良いことが分かる。つまり、 $a > 0$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $P(z)$ は実軸上に 2 位以上の零点を持たないとするとき、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} e^{iaz}; c \right) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} e^{iaz}; c \right)$$

のような公式が成立する。これを用いると、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|x| > \delta} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) = \pi i \lim_{\substack{z \neq 0 \\ z \rightarrow 0}} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = \pi i.$$

これから

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \frac{\pi}{2}.$$

以上は乱暴な説明だから、ていねいに計算し直す。■

(次の例だが、外枠の方を四角にすれば、 $\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta$ の評価は避けられる。何で授業前に気が付かなかったのだろう。書き直した。)

例 13.24 (教科書にも採用されている有名な例)

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(収束するが絶対収束はしない広義積分の例として、微積分の教科書の例に取り上げられることも多い積分である。原点での特異性の処理の仕方が、1位の極がある場合の主値積分の処理の仕方と同じ。それは普通の留数定理の証明に近いところがあり、教育的である。)

$$\begin{aligned} f(z) &:= \frac{e^{iz}}{z}, \\ \Gamma_{\varepsilon, R} &: z = x \quad (x \in [\varepsilon, R]), \\ C_R &: z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]), \\ \Gamma_{-R, -\varepsilon} &: z = x \quad (x \in [-R, -\varepsilon]), \\ C_\varepsilon &: z = \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]), \\ \gamma_{\varepsilon, R} &:= \Gamma_{\varepsilon, R} + C_R + \Gamma_{-R, -\varepsilon} + (-C_\varepsilon) \end{aligned}$$

とおく (図を描かないと)。 f は 0 以外で正則であるから、 f の閉曲線 $\gamma_{\varepsilon, R}$ (0 はその外側にある) に沿う線積分は、Cauchy の積分定理によって 0 である。

$$(*) \quad 0 = \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\Gamma_{-R, -\varepsilon}} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz - \int_{C_\varepsilon} f(z) dz.$$

実は

$$(b) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

実際、

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta$$

であるから、(36) を用いて

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}| d\theta = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < 2 \frac{\pi}{2R} = \frac{\pi}{R} \rightarrow 0.$$

一方、

$$\int_{\Gamma_{-R, -\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_R^\varepsilon \frac{e^{-it}}{-t} \cdot (-1) dt = - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t} dt$$

であるから、

$$(\#) \quad \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\Gamma_{-R, -\varepsilon}} f(z) dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t} dt = 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

実は

$$(b) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = i\pi$$

である³³。実際、

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{i(\varepsilon e^{i\theta})} d\theta$$

であるので、 $|i\varepsilon e^{i\theta}| = \varepsilon$ に注意して、

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} f(z) dz - i\pi \right| &= \left| i \int_0^\pi (e^{i(\varepsilon e^{i\theta})} - 1) d\theta \right| \leq \pi \max_{|\zeta|=\varepsilon} |e^\zeta - 1| = \pi \max_{|\zeta|=\varepsilon} \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{\zeta^n}{n!} \right| \\ &\leq \pi \max_{|\zeta|=\varepsilon} \sum_{n=1}^\infty \frac{|\zeta|^n}{n!} = \pi \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon^n}{n!} = \pi (e^\varepsilon - 1) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = i\pi$.

(★), (♯), (b), (♯) より、

$$2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_{C_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz \rightarrow \pi i + 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty).$$

ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

問 73. f は c の近傍で正則とする。 C_ε : $z = c + \varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とするとき、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - c} dz = \pi i f(c).$$

13.5.2 命題 13.12 の別証明

以下に紹介する証明は、多くの本で採用されている証明法であるが、仮定を $\deg P \geq \deg Q + 2$ と強くしている場合が多いようだ(その場合は広義積分が絶対収束して議論が簡単になる)。広義積分の存在証明が面倒だからか？

広義積分が存在すること まず広義積分 $\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{iax} dx$ が存在することを確認する。このことを証明していない本が多い。その場合は、定理が

$$(33) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c)$$

³³これがもし一周の線積分ならば、Cauchy の積分公式または留数定理で $2\pi i$ ということが分かるが、 C_ε は半円周である。

を主張していると読めば良い。

$P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ を仮定して証明する。 $\deg P(x) = n, m := \deg Q(x)$ とおくと、 $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$ ($a_0 \neq 0$), $Q(x) = b_0 x^m + \cdots + a_m$ ($b_0 \neq 0$) と書ける。 $n \geq m + 2$ であれば広義積分が絶対収束することは明らかである ($|P(x)e^{iax}| = |P(x)|$ で、命題 13.2 の証明と同じ証明が出来る)。以下、 $n = m + 1$ とする。 $\exists h(x), \exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \neq 0$

$$f(x) = \frac{b_0}{a_0 x} (1 + h(x)), \quad |h(x)| \leq \frac{M}{x}.$$

広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_0 x} e^{iax} dx$$

が収束することは、実部虚部に分解して、交代級数の議論を用いて確かめられる。一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_0 x} h(x) e^{iax} dx$$

が絶対収束することも容易に確かめられる。ゆえに広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$ が存在し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx.$$

(33) の証明 さて、 $\exists M \in \mathbb{R}, \exists R^* \in [1, \infty)$ s.t. $f(z)$ の分母 $P(z)$ の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (|z| \geq R^*).$$

$R \in [R^*, \infty)$ に対して、 Γ_R を $z = x$ ($x \in [-R, R]$), C_R を $z = Re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) で定め、 $\gamma_R := \Gamma_R + C_R$ とおく。 $P(z)$ の零点は多項式であるから有限個で、円盤 $|z| < R^*$ に含まれ (ゆえに上半平面にあるものは、 γ_R の内部に存在する)、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)e^{iaz}$ の極または除去可能特異点であり、それら以外の点では $f(z)e^{iaz}$ は正則である。また γ_R は単純閉曲線であるから、留数定理を用いて、

$$\int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{c \text{ は } \gamma_R \text{ の内部}} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c) = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c).$$

C_R は $z = Re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とパラメータづけできる。 $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ で、

$$\int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta,$$

$$iaRe^{i\theta} = iaR(\cos \theta + i \sin \theta) = -aR \sin \theta + iaR \cos \theta,$$

$$\text{Re}[iaRe^{i\theta}] = -aR \sin \theta, \quad \left| e^{iaRe^{i\theta}} \right| = e^{\text{Re}[iaRe^{i\theta}]} = e^{-aR \sin \theta}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| |e^{iaRe^{i\theta}}| |iRe^{i\theta}| d\theta \leq \frac{M}{R} \cdot R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \\ &= M \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

実は

$$(34) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 0$$

である。これを認めれば、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{iax} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx = \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &= \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz - \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}; c) - \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \\ &\rightarrow 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}; c) \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

として証明が完了する。(34) については、以下で3通りの証明を与える。■

(34) の証明 これは Lebesgue 積分の有界収束定理を知っているならば、

$$|e^{-aR \sin \theta}| \leq 1, \quad \int_0^\pi 1 d\theta = \pi < \infty, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-aR \sin \theta} = \begin{cases} 0 & (\theta \in (0, \pi)) \\ 1 & (\theta = 0, \pi) \end{cases} = 0 \quad (\text{a.e.})$$

から明らかである。

初等的な方法としては、 $0 < \forall \delta < \pi/2$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2 \left(\int_0^\delta e^{-aR \sin \theta} d\theta + \int_\delta^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta \right) \\ &\leq 2 \left(\delta + e^{-aR \sin \delta} \int_\delta^{\pi/2} d\theta \right) \leq 2\delta + \pi e^{-aR \sin \delta} \end{aligned}$$

が成り立つことから、最初に δ を十分小さく取って右辺第1項を小さくしておいてから、 R を大きくして右辺第2項を小さくする、という方針で証明するのが簡単である。

あるいは、Jordan の不等式³⁴

$$(35) \quad \sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

³⁴ $y = \sin \theta$ と $y = \frac{2\theta}{\pi}$ のグラフを描くと「分かる」。これは微分法の簡単な演習問題である。しかし、この不等式を利用する方法をとつさに発見するのは難しいので、甘く見てみると、院試などであわてることになる(個人的にはこういう証明問題を出題することに反対である)。Jordan の不等式という名は、吉田 [19] (p. 17) で知った。

から導かれる不等式

$$(36) \quad 0 < \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-2R\theta/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R}$$

を使う。 ■

14 この後やること、やれなかったこと

残り 1 コマになってしまったので、全部はやれない。どれにしようかな。

- (やり残し) z^α
- Abel の級数変形法
- Cauchy の積分定理、ホモトピー形

付録

この講義の目標は、標準的な関数論の講義の目標と同じだけれど、必修の微積分で極限に関することは証明抜きで済ませているので、真面目に理解しようとする、時々思いのほか忙しいところがある。

重要なところは本文中 (授業中) に説明するが、そうでないところは付録にまわすことにした。付録に書いてあることは、最初に学ぶときはあまり気にしなくても良いと思う。数学という学問はそういうことが比較的やりやすい。定義自体は比較的短く書けるので、定理の主張は、証明を読まなくても (証明に用いる理論を学ばなくても)、短時間で理解可能である³⁵。

A 数学解析から

2年生春学期の「数学解析」は、微積分に現れる極限の性質について解説する講義科目であり、そこで扱われる内容は今後もしばしば必要となる。

開集合、閉集合の定義と基本的な性質。「閉集合はそれに含まれる数列の極限を必ず含む。」等。

数列の極限の定義と基本的な性質。Bolzano-Weierstrass の定理、「上に有界な単調増加数列は収束する。」等。

B 連結性

(数学解析でやり残したので、少し補足。)

- 位相空間 X が**連結** (connected) であるとは、 X の開集合の組 U_1, U_2 で $X = U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものは $U_1 = X, U_2 = \emptyset$ か、 $U_1 = \emptyset, U_2 = X$ のいずれかに限られることをいう。
- 位相空間 X の部分集合 A が連結であるとは、 A に相対位相を導入したとき、 A が連結な位相空間になることをいう。つまり

$$(\exists V_1, V_2 : X \text{ の開集合}) \quad U_1 = A \cap V_1, \quad U_2 = A \cap V_2,$$

$$A = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

が成り立っているならば、 $U_1 = \emptyset$ または $U_2 = \emptyset$ が成り立つとき、 A は連結であるという。

- 位相空間 X が**弧連結** (弧状連結) であるとは、 X 内の任意の二点が X 内の連続曲線で結べる ($\forall x, y \in X, \exists \varphi: [0, 1] \rightarrow X$ s.t. φ は連続かつ $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$) ことをいう。
- $\mathbb{R}$ の部分集合 I が連結であるためには、 I が区間であることが必要十分である。

³⁵水ももらさないように定義をするのは、外野から見ると理解しづらいかもしれないけれど、そうしておく、すっぱり割り切れて便利なんです。

- (いわゆる中間値の定理の一般化) 連結な位相空間の連続写像による像は連結である。弧連結な位相空間の連続写像による像は弧連結である。
- 弧連結な空間は連結である。
- 連結かつ**局所弧連結**な空間は弧連結である。特に $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合は弧連結である。

本文中で、 $\mathbb{R}^n$ の弧連結な開集合は連結であることを述べて証明した。この逆を次の形で述べておくと、関数論の準備としてはほぼ満足出来る状態になる。

命題 B.1 $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合の任意の二点は区分的に C^1 級の曲線で結べる。

これは上に掲げた「常識」の中に入っていないが(位相空間論の本にも書かれていないことが多い)、「連結かつ局所弧連結ならば弧連結」という定理の証明を眺めれば簡単に解決する。ここではその $\mathbb{R}^n$ の開集合バージョンを述べよう。

命題 B.2 Ω を $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合とすると、 Ω 内の任意の2点 a, b は Ω 内の曲線で結ぶことができる。

証明

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べる} \},$$

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べない} \}$$

とおくと、明らかに

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset, \quad a \in \Omega_0.$$

実は Ω_0 は開集合である。実際、任意の $x \in \Omega_0$ に対して、 $x \in \Omega$ かつ Ω は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x; \varepsilon)$ 内の任意の点 y は x と結べるので、 a とも結ぶことができる (a と x を結ぶ曲線に x と y を結ぶ曲線をつなげばよい)。ゆえに $y \in \Omega_0$ 。すなわち $B(x; \varepsilon) \subset \Omega_0$ であるから、 Ω_0 は開集合である。

同様にして Ω_1 は開集合である。実際、任意の $x \in \Omega_1$ に対して、 $x \in \Omega$ かつ Ω は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x; \varepsilon)$ 内の任意の点 y は x と結べるので、 a とは結ぶことができない (もし y と a が結べれば、その曲線を y と x を結ぶ曲線につないで a と x を結べることになり矛盾する)。ゆえに $y \in \Omega_1$ 。すなわち $B(x; \varepsilon) \subset \Omega_1$ であるから、 Ω_1 は開集合である。

Ω が連結であるから、 $\Omega_0 = \Omega$ かつ $\Omega_1 = \emptyset$ 。ゆえに a は Ω 内の任意の点と結ぶことができる。 ■

この証明で「 Ω 内の曲線」というところを、「 Ω 内の C^1 級の曲線」、「 Ω 内の区分的に C^1 級の曲線」、「 Ω 内の正則な C^1 級の曲線」、「 Ω 内の座標軸に平行な線分からなる折線」などで置き換えても証明はまったくそのまま通用する (開球 $B(x; \varepsilon)$ 内の任意の点はその中心と良い性質を持った曲線で結べることにともづいている)。

C 級数に関する補足

C.1 Cauchy-Hadamard の定理

C.1.1 上極限と下極限

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界であると仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}$ について有限な下限

$$\inf_{k \geq n} a_k = \inf \{a_k \mid k \geq n\}$$

が存在する。一般に

$$\{a_k \mid k \geq 1\} \supset \{a_k \mid k \geq 2\} \supset \{a_k \mid k \geq 3\} \supset \cdots$$

であるから、

$$\inf_{k \geq 1} a_k \leq \inf_{k \geq 2} a_k \leq \inf_{k \geq 3} a_k \leq \cdots$$

すなわち $\left\{ \inf_{k \geq n} a_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加数列である。 ∞ になることも許せば、

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

が確定する。一方、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界でなければ、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\{a_k \mid k \geq n\}$ は下に有界でないので

$$\inf_{k \geq n} a_k = -\infty.$$

この場合は $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k = -\infty$ とする。こうして定まる

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

を $\{a_n\}$ の**上極限**と呼び、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ で表す ($\limsup$ の代わりに $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ という記号を用いることもある)。

同様に、 $\{a_n\}$ の**下極限** $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ を定義するが、説明を省略しても分かるであろう。

—— 手短かに書いておく ——

$\sup, \inf$ として $\infty, -\infty$ を許すことにして

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k.$$

命題 C.1 (1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) $a_n \leq b_n$ であれば $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$.

実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と実数 a に対して、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

であるためには、

(a) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n < a + \varepsilon$

(b) $(\forall \varepsilon > 0) (\forall k \in \mathbb{N}) (\exists n \in \mathbb{N}: n \geq k) a_n > a - \varepsilon$

(言い換えると、任意の正数 ε に対して $a_n > a - \varepsilon$ を満たす n が無限個存在する)

が成り立つことが必要十分である。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

が成り立つことであるが、上の方から抑えられることはそのまま、下の方は少し弱めたわけである。「集積点」という言葉を知っていれば、 $\{a_n\}$ の上極限 a とは $\{a_n\}$ の集積点のうち最大のものである、と言っても良い。

(まあ、でも、集積点 (特に部分集合の集積点) という言葉はあまり使われなくなってきた感じがする…)

定義 C.2 (集積点 — 上極限のことを手短かに知るという目的からは余談に近くなるけど)

A を $\mathbb{R}$ の部分集合、 $a \in \mathbb{R}$ とする。 a が A の**集積点** (an accumulation point) であるとは、 $\forall \varepsilon > 0 (B(a; \varepsilon) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$ が成り立つことをいう。 a が A の**孤立点**であるとは、 a が A の集積点ではなく、かつ $a \in A$ であることをいう。

$\{a_n\}$ を実数列、 $a \in \mathbb{R}$ とするとき、 a が数列 $\{a_n\}$ の集積点 (a cluster point, an accumulation point) であるとは、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して $a_n \in B(a; \varepsilon)$ を満たす n が無限個存在することをいう。

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = a$ とおくとき、 a は数列 $\{a_n\}$ の集積点である。 $\{a_n\}$ の値域 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\{a\}$ であり、 a は $\{a\}$ の集積点ではないので、部分集合の集積点と数列の集積点は混同しないよう区別が必要である。

C.1.2 正項級数に対する Cauchy-Hadamard の定理

補題 C.3 (正項級数に対する Cauchy-Hadamard の定理) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、
 $\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ とおくとき、次が成り立つ。

(1) $0 \leq \lambda < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\lambda > 1$ ($\lambda = \infty$ のときも含めて) ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

($\lambda = 1$ の場合はケース・バイ・ケースである。)

証明

(1) $0 \leq \lambda < 1$ とする。 $\lambda < \mu < 1$ なる μ を任意にとると、 $(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N)$ $\sqrt[n]{a_n} < \mu$. このとき $a_n < \mu^n$. N を 1 つ固定して、

$$b_n := \begin{cases} a_n & (1 \leq n \leq N-1) \\ \mu^n & (N \leq n \leq \infty) \end{cases}$$

とおくと、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ で、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \frac{\mu^N}{1-\mu}.$$

優級数の定理により、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\lambda > 1$ とする。 $\sqrt[n]{a_n} > 1$ を満たす n が無限にたくさん存在する。そういう n に対して $a_n > 1$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ とはならない。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。■

正項級数に対する d'Alembert の定理というものもある。

命題 C.4 (正項級数に対する d'Alembert の定理) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は正項級数で、 $a_n \neq 0$ を満たすとする。

$$\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \mu := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

とおくとき、次が成り立つ。

(1) $0 \leq \lambda < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\mu > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

証明 (証明は上と同様に出来るので省略する。) ■

実は一般に

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が成り立つので、($\limsup$, $\liminf$ が具体的に計算できる限り) Cauchy-Hadamard の定理の方が d'Alembert の定理よりも強いが、 $\left\{ \begin{array}{c} \limsup \\ \liminf \end{array} \right\} \sqrt[n]{a_n}$ の計算は $\left\{ \begin{array}{c} \limsup \\ \liminf \end{array} \right\} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の計算より難しいことが多く、応用上は d'Alembert の定理は便利である。

C.1.3 冪級数に対する Cauchy-Hadamard の定理

定理 C.5 (冪級数に対する Cauchy-Hadamard の定理) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

証明 $c = 0$ の場合に証明すれば十分である。任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(|z| \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \frac{|z|}{\rho}.$$

補題 C.3 によって、 $|z|/\rho < 1$ のとき収束、 $|z|/\rho > 1$ のとき発散する。ゆえに ρ が収束半径である。 ■

C.1.4 $\limsup \sqrt[n]{a_n}$ の計算に便利な補題

例えば冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を項別微分して得られる $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ の収束半径が元の冪級数の収束半径と同じであることを証明するには、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ があると役に立つ。

補題 C.6 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$.

一般に証明する前に $k = 1$ の場合を書いてみよう。 $\sqrt[n]{n} > 1$ であるから、 $\delta_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とおくと、 $\delta_n > 0$. $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ であるから $n = (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \cdots \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$. $0 < \delta_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$. これから $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n^2 \rightarrow 0$. ゆえに $\delta_n \rightarrow 0$. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を意味している。

証明 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{n^k} > 1$ であるので、 $\delta_n := \sqrt[n]{n^k} - 1$ とおくと、 $\delta_n > 0$. $\sqrt[n]{n^k} = 1 + \delta_n$. ゆえに $n \geq k+1$ なる任意の n に対して、

$$n^k = (1 + \delta_n)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \delta_n^r \geq \binom{n}{k+1} \delta_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} \delta_n^{k+1}.$$

これから

$$0 < \delta_n^{k+1} \leq \frac{1}{n} \frac{(k+1)!}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

$n \rightarrow \infty$ とするとき、右辺は 0 に収束するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. ■

命題 C.7 $\{A_n\}, \{k_n\}$ は正項級数で $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k (> 0)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ とするとき、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} k_n A_n = kA$.

証明 (省略) ■

他にもあったはずだけど、すぐに思い出せない…

C.2 絶対収束に関する命題

(工事中 — 書きかけ。出来てから公開。)

C.3 冪級数の項別微分可能性定理の別証明

普通のテキストに載っている証明がすぐには思い浮かばなかった (思い出せなかった) ので、自力で考えてみた³⁶。以下の証明は、学生にはかえって分かりにくい気もするので、授業に採用するかどうか、現時点では不明である。

実関数列の項別微分に関する定理は、 f_n が f に各点収束し、 f'_n が g に一様収束するとし、微分積分学の基本定理

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt$$

³⁶後で何冊かテキストを見てみたら、細部は著者により色々違っていて、面白いものだなと思いました — 多分、少し難しいということだと思います。

の両辺の極限を取って

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt$$

を導き、これから $f'(x) = g(x)$ と証明するのが普通である (分かりやすくして良いと思う)。複素関数の場合にこういう議論をしているのを見たことはないのだが、以下に示すように、同様に成立する (実関数と違い、積分路が1つではないので注意を要するが、導関数の積分なので、いわゆる原始関数が存在するケースに相当し、実関数の場合の微分積分学の基本定理と同じ等式が成立する。だから大丈夫である)。

補題 C.8 Ω は $\mathbb{C}$ の領域、 f_n ($n \in \mathbb{N}$), f, g は Ω から $\mathbb{C}$ への関数であり、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 f_n は正則で f'_n は連続、 Ω で $\{f_n\}$ は f に各点収束、 Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して、 $\{f'_n\}$ は K 上で g に一様収束するならば、 f は Ω で正則で $f' = g$.

証明 最初に g は (局所的には連続関数列の一様収束極限であるから) 連続であることを注意しておく。 $c \in \Omega$ を任意に固定する。 $z \in \Omega$ に対して、 c を始点、 z を終点とする任意の区分的に C^1 級の曲線 C_z を取るとき

$$\int_{C_z} f'_n(\zeta) d\zeta = f_n(z) - f_n(c).$$

実際、 C_z のパラメーター付け $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ を用いると

$$\int_{C_z} f'_n(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha}^{\beta} f'_n(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} f_n(\gamma(t)) dt = [f_n(\gamma(t))]_{\alpha}^{\beta} = f_n(z) - f_n(c).$$

(本当は曲線が滑らかな範囲に積分を分割して計算し、途中が上手くキャンセルすることを確認かめるわけだが、本質的なところは上で大丈夫である。) C_z の像はコンパクトなので、その上で一様に $f'_n \rightarrow g$ となる。極限移行して

$$\int_{C_z} g(\zeta) d\zeta = f(z) - f(c).$$

さて、任意の $z \in \Omega$ を固定する。 Ω は開集合であるから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\overline{D}(z; \varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つ。 $0 < |h| < \varepsilon$ なる h に対して、 $f(z+h) - f(z)$ を計算するのだが、 C_{z+h} として $C_z + [z, z+h]$ が取れる。

$$f(z+h) - f(z) = \left(f(c) + \int_{C_{z+h}} g(\zeta) d\zeta \right) - \left(f(c) + \int_{C_z} g(\zeta) d\zeta \right) = \int_{[z, z+h]} g(\zeta) d\zeta.$$

これと、 $\int_{[z, z+h]} d\zeta = h$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \frac{1}{h} \left(\int_{[z, z+h]} g(\zeta) d\zeta - g(z) \int_{[z, z+h]} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (g(\zeta) - g(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} (f(z+h) - f(z)) - g(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \sup_{\zeta \in [z, z+h]} |g(\zeta) - g(z)| \int_{[z, z+h]} |d\zeta| \\ &\leq \sup_{\zeta \in [z, z+h]} |g(\zeta) - g(z)|. \end{aligned}$$

g の連続性より、 $h \rightarrow 0$ のとき、右辺は 0 に収束するので、

$$f'(z) = g(z). \blacksquare$$

系 C.9 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を $\rho > 0$ とするとき、 $D(c; \rho)$ で冪級数は正則で、

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^n.$$

(右辺の冪級数の収束半径も ρ である。)

証明 右辺の冪級数の収束半径は $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^n$ の収束半径と同じである。後者の収束半径の逆数は Cauchy-Hadamard の定理から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

(ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を用いた。) ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^n$ の収束半径は、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ のそれに等しい。

$\Omega = D(c; \rho)$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z-c)^k$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^n$ とおく。仮定から f_n は f に各点収束する。 f_n は正則で、

$$f'_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k(z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}(z-c)^k$$

となり、これはもちろん連続である。 Ω の任意のコンパクト集合 K は適当な $0 < \rho' < \rho$ に対して、 $\overline{D}(c; \rho')$ に含まれることに注意すると、 f'_n は K 上一様に g に収束することが判る。補題から f は正則で $f' = g$. すなわち

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^n. \blacksquare$$

C.4 Abel の級数変形法

以前のノートからコピペする。もし講義することになったら、もう少しかみ砕く (その結果出来たものを本文に持って行く)。

Abel の級数変形法 (Abel summation, Abel's transformation, Abel's partial summation) とは、

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k \text{ とおくと、 } \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

という式変形のことをいう。部分積分の級数バージョンに相当する。実際

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = A_1 b_1 + \sum_{k=2}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \end{aligned}$$

次はシュヴァルツ [20] の定理 75 を簡略化したものである。

定理 C.10 (Abel の級数変形法 (Abel's transformation)) $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}, \{\beta_n\}_{n \geq 0}$ は複素数列で、

$$(37) \quad (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \right| \leq M,$$

$$(38) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n - \beta_{n+1}| < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

を満たすならば、 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。また

$$|S| \leq A_0 B_0, \quad \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \right| \leq A_{m+1} B_{m+1}$$

が成り立つ。ただし

$$A_m := \sup_{n \geq m} \left| \sum_{k=m}^n \alpha_k \right|, \quad B_m := \sum_{k=m}^{\infty} |\beta_k - \beta_{k+1}|.$$

記憶用に言葉で説明すると、 $\{\alpha_n\}$ は部分和が有界な数列、 $\{\beta_n\}$ は 0 に収束する有界変分列ならば、両者の積の和は収束する。 $\{\beta_n\}$ の仮定として、より簡単な「単調減少して 0 に収束する」を採用してある本が多い。

なお、(37) から、 $A_m \leq 2M < \infty$ が導かれる。実際、

$$\left| \sum_{k=m}^n \alpha_k \right| = \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \right| \leq M + M = 2M$$

であるから、 $A_m \leq 2M$.

証明 $S_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k$, $\sigma_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ とおく。 S_n に Abel の級数変形法を適用すると

$$\begin{aligned} S_n &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \sigma_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \beta_k \\ &= \sigma_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^n \sigma_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \beta_{k+1} = \sum_{k=0}^n \sigma_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \beta_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + \sigma_n \beta_n. \end{aligned}$$

ここで

$$|\sigma_n \beta_n| = |\sigma_n| |\beta_n| \leq A_0 |\beta_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

また

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\sigma_k| |\beta_k - \beta_{k+1}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} A_0 |\beta_k - \beta_{k+1}| \leq A_0 B_0 < \infty.$$

ゆえに $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は存在する。そして、 $|S| \leq A_0 B_0$.

和を取る添字の範囲を $k = m + 1$ からにすれば、 $\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \right| \leq A_{m+1} B_{m+1}$ が得られる。

一応やってみますか？

$$S_{m+1,n} := \sum_{k=m+1}^n \alpha_k \beta_k, \quad \sigma_{m+1,n} := \sum_{k=m+1}^n \alpha_k$$

とおくと、 $k \geq m + 2$ のとき $\alpha_k = \sigma_{m+1,k} - \sigma_{m+1,k-1}$, $\alpha_{m+1} = \sigma_{m+1,m+1}$. ゆえに

$$\begin{aligned} S_{m+1,n} &= \sigma_{m+1,m+1} \beta_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n (\sigma_{m+1,k} - \sigma_{m+1,k-1}) \beta_k \\ &= \sigma_{m+1,m+1} \beta_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n \sigma_{m+1,k} \beta_k - \sum_{k=m+1}^{n-1} \sigma_{m+1,k} \beta_{k+1} \\ &= \sum_{k=m+1}^n \sigma_{m+1,k} \beta_k - \sum_{k=m+1}^{n-1} \sigma_{m+1,k} \beta_{k+1} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n-1} \sigma_{m+1,k} (\beta_k - \beta_{k+1}) + \sigma_{m+1,n} \beta_n. \end{aligned}$$

ここで

$$|\sigma_{m+1,n}\beta_n| \leq A_{m+1} |\beta_n| \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{n-1} |\sigma_{m+1,k}(\beta_k - \beta_{k-1})| &\leq \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{m+1} |\beta_k - \beta_{k-1}| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{m+1} |\beta_k - \beta_{k-1}| = A_{m+1} B_{m+1} \end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m+1,n}$ は収束して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{m+1,n}| \leq A_{m+1} B_{m+1}. \blacksquare$$

例 C.11 $\{\beta_n\}$ が単調減少して 0 に収束する数列であるとき、 $\alpha_n = (-1)^n$ とすると、有名な交代級数の収束定理が得られる。

$\alpha_n = e^{in\theta}$ ($\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) もしばしば現れる。 ■

冪級数 $f(z)$ が収束円の周上の点 b で収束するとき、その点を含む半径に沿って収束円の内部から $z \rightarrow b$ と近づけたとき、 $f(z) \rightarrow f(b)$ となる。これを **Abel の連続性定理** といいますが、ここでは次の形で与える。

定理 C.12 (Abel の連続性定理 (Abel's continuity theorem)) 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ ($R > 0$) で収束したとする。任意の正数 K に対して、

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \leq K \right\}$$

とおくとき、 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。特に f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。さらに特に

$$\lim_{\substack{x \in [0, R) \\ x \rightarrow R}} f(x) = f(R).$$

証明 目標は

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

とおくとき、

$$\sup_{z \in \Omega_K \cup \{R\}} |f(z) - f_n(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を示すことである。級数が $z = R$ で収束するという仮定から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(R) = f(R)$ が成り立つ。

任意の $z \in \Omega_K$ に対して、 $\alpha_n := a_n R^n$, $\beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n$ とおくと、

$$\left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \right| = \left| \sum_{k=0}^n a_k R^k \right| = |f_n(R)| \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

は有界であり、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n - \beta_{n+1}| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R}\right)^n \left|1 - \frac{z}{R}\right| = \frac{\left|1 - \frac{z}{R}\right|}{1 - \frac{|z|}{R}} \leq K.$$

したがって Abel の定理が適用できる。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|f(z) - f_n(z)| \leq A_{n+1} B_{n+1} \leq A_{n+1} B_0 \leq K A_{n+1} \quad (z \in \Omega_K).$$

$$A_{n+1} = \sup_{m \geq n+1} \left| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k \right| = \sup_{m \geq n+1} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k R^k \right| = \sup_{m \geq n+1} |f_m(R) - f_n(R)|$$

であるから、

$$|f(z) - f_n(z)| \leq K \sup_{m \geq n+1} |f_m(R) - f_n(R)| \quad (z \in \Omega_K, n \in \mathbb{N}).$$

ゆえに

$$\sup_{z \in \Omega_K \cup \{R\}} |f(z) - f_n(z)| \leq \max \left\{ K \sup_{m \geq n+1} |f_m(R) - f_n(R)|, |f(R) - f_n(R)| \right\}.$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $f_n(R) \rightarrow f(R)$ であるから、 $\{f_n(R)\}_{n \geq 0}$ は Cauchy 列であるので、上の不等式の右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。ゆえに $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は、 $\Omega_K \cup \{R\}$ で f に一様収束する。■

注意 C.13 (Abel の定理 (定理 C.10) の部分積分バージョン) 広義積分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

の収束と評価

$$\left| \int_a^\infty f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, \infty)} \left| \int_a^x f(t) dt \right| \int_a^\infty |g'(x)| dx$$

を示そう。

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, \infty))$$

とおくと、 $F'(x) = f(x)$ である。もしも F が有界、すなわち

$$M := \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| < \infty$$

で、かつ

$$\int_a^\infty |g'(x)| dx < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

が成り立つならば、部分積分を用いて、 $F(a) = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \int_a^R f(x)g(x) dx &= \int_a^R F'(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^R - \int_a^R F(x)g'(x) dx \\ &= F(R)g(R) - \int_a^R F(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} |F(R)g(R)| &\leq M |g(R)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty), \\ |F(x)g'(x)| &\leq M |g'(x)|, \quad \int_a^R |g'(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

であるから、 $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ は存在し、

$$\left| \int_a^\infty f(x)g(x) dx \right| \leq M \int_a^\infty |g'(x)| dx = \sup_{x \in [a, \infty)} \left| \int_a^x f(t) dt \right| \int_a^\infty |g'(x)| dx.$$

あるいは、少し一般化して、任意の $c \in [a, \infty)$ に対して、

$$\left| \int_c^\infty f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [c, \infty)} \left| \int_c^x f(t) dt \right| \int_c^\infty |g'(x)| dx. \blacksquare$$

C.5 級数の研究の歴史に関するメモ

昔、「基礎数学 IV」という授業をした時のノート「級数」³⁷に、色々書いておいた。少しコピーする。

2003 年度の授業で級数を終えてしばらくしてから、久しぶりに遠山 [21] を手にした。ばらめくっているうちに第 X 章「無限の算術 — 極限」という章を目にした。

ヤコブ・ベルヌーイ (1654–1705) の『無限級数論』に載っている六行詩の引用がある。

無限の級数が、たとえ限りなく見えようとも、
有限の和をもち、限界の前に身をかがめるように、
いやしい物体のなかに、無限の神の影が宿り、
かくも狭く限られながら、しかも限りなく増加する。
何という歓喜、測り知られぬもののなかに微小なるものを、
また微小なるもののなかに、かの無限の神を観る。

無限の逆説について紹介があり、「その混乱は 1821 年になってコーシーがとどめをさすまで続いた。」

遠山先生の分析では、コーシーが無限級数の正しい理論をつくり上げられたのは、それ以前の数学者が見逃していた次の二つの点を見つけたからであるという。

³⁷<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kiso4/kiso4series.pdf>

1. 有限個の数を加えるときは、加える順序をいくら変えても答は変わらないが、この法則は無限個のたし算の場合には成り立たない。だから無限級数ははじめに並べたとおりに加えると定める。
2. 無限級数にいつでも和があるというのは迷信である (それまで和がないものに無理やり和を考えようとして混乱を生じていた)。数列の収束と発散という考えを持ち込んだ (例の ε - N 論法は Cauchy の発明らしい)。

なるほど。今勉強するときはまず真っ先に

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

と天下りに書き下してしまうが、歴史的にはここに至るまでが大変だったわけだ。

遠山先生の本はお勧めです。アーベルとか、古い時代の数学者の話は、小堀 [22] なんてどうでしょう。

1. (参考まで) Sir Isaac Newton (1643–1727, 英国の Woolsthorpe に生まれ、ロンドンに没する)
2. (参考まで) Brook Taylor (1685–1731, 英国の Middlesex に生まれ、ロンドンにて没する)
3. (理論というよりも、とにかく結果を出しまくったという人だが、参考まで) Leonhard Euler (1707–1783, スイスの Basel に生まれ、ロシアの St Petersburg にて没する)
4. Augustin Louis Cauchy (1789–1859, フランスのパリに生まれ、パリ近郊の Sceaux にて没する)
1821 年 “Cours d’analyse” (エコール・ポリテクニクの教科書)
級数の和の定義, 数列の収束・発散の定義
5. Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー)
べき級数の収束円, Abel の級数変形法, Abel の連続定理
6. (べき級数とは関係ないが参考まで) Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768–1830)
7. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897, Westphalia (now Germany) の Ostfelden に生まれ、ベルリンにて没する)
『連続関数の一様収束極限は連続』, Weierstrass の M test

D 初等関数についてのメモ

(工事中)

E 定積分計算のガラクタ箱

授業で説明するタイプ以外にも、院試などに出題される定積分がある。

E.1 $x^\alpha \times$ 有理関数の積分 $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$

有理関数 f と x^α ($0 < \alpha < 1$) との積の $[0, \infty)$ 上での積分

$$I = \int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$$

を求めよう。要点を一言にまとめると、 z^α の多価性を利用して計算する、となる。

関数 z^α は多価関数である

α を任意の実数とする。実関数 x^α は、 $x < 0$ では普通定義されないことを思い出そう。「複素関数」としての z^α は、

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$$

で定義することになるが^a、これは普通関数ではなくて、($\log z$ の多価性によって) 多価関数であることに注意する (だから上の等式は、本当は集合に関する等式である)。

$z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$) とするとき、

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

であった (この右辺の $\log r$ は実関数としての $\log$ の値)。ゆえに

$$z^\alpha = \exp(\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{i2\alpha n\pi}.$$

もし $\alpha \in \mathbb{Z}$ であれば、 $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\alpha \in \mathbb{Z}$ であるから、 $e^{i2\alpha n\pi} = 1$ であって、上の式は n によらない 1 つの複素数を定める。しかし $\alpha \notin \mathbb{Z}$ の場合は、複素数 (しばしば無限個) の値を取る。絶対値については、

$$|z^\alpha| = r^\alpha = |z|^\alpha.$$

(右辺の $|z|^\alpha$ は実関数としての α 乗である。) ■

^a実関数として、 $x = \exp(\log x)$, $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$ であるから、式の形は自然に感じられるであろう。

$\Omega := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における対数関数 $\log z$ を、虚部 $\in (0, 2\pi)$ となるような分枝を選ぶことで定義する。すなわち、 z を $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in (0, 2\pi)$) と極形式で表示したとき、 $\log z = \log r + i\theta$. これを用いて、

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z) = \exp(\alpha(\log r + i\theta)) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$

(自然に感じられるかも知れないが、全然当たり前ではなく、上に書いた約束に基づいていることに注意!)

この項で用いる z^α (ただし $\alpha \in (0, 1)$)

$z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in (0, 2\pi)$) とするとき、 $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$, $|z^\alpha| = |z|^\alpha$.

$z \in (0, \infty)$ の場合

$$(\heartsuit) \quad (z^\alpha)_{\text{下半平面からの極限}} = (z^\alpha)_{\text{上半平面からの極限}} \times e^{2\pi\alpha i}$$

である (授業では図を描いて説明)。

命題 E.1 (有理関数のメリン変換) $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in (0, \infty) P(x) \neq 0$, 0 は f の正則点または高々1位の極とし、 $0 < \alpha < 1$ とする。このとき、

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{c \neq 0} \text{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

証明 $0 < \varepsilon < R$, $0 < \delta < \pi$ なる ε, R, δ を取る (以下で $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ とする)。
 $C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, C_1 は $z = te^{i\delta}$ ($t \in [\varepsilon, R]$), C_2 は $z = Re^{i\theta}$ ($\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$), $-C_3$ は $z = te^{i(2\pi - \delta)}$ ($t \in [\varepsilon, R]$), $-C_4$ は $z = \varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$), とする。

留数定理から、十分小さい任意の ε, δ , 十分大きい任意の R に対して、

$$(b) \quad \int_{C_1} z^\alpha f(z) dz + \int_{C_2} z^\alpha f(z) dz + \int_{C_3} z^\alpha f(z) dz + \int_{C_4} z^\alpha f(z) dz = 2\pi i \sum_{c \neq 0} \text{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

C_1 に沿う線積分は、

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z) dz = \int_\varepsilon^R (te^{i\delta})^\alpha f(te^{i\delta}) dt = e^{i\alpha\delta} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{i\delta}) dt.$$

$\delta \rightarrow 0$ のとき、 $t \in [\varepsilon, R]$ について一様に $t^\alpha f(te^{i\delta}) \rightarrow t^\alpha f(t)$, また $e^{i\alpha\delta} \rightarrow 1$ であるから、

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z) dz \rightarrow \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t) dt.$$

C_2 に沿う線積分は、

$$\int_{C_2} z^\alpha f(z) dz = \int_\delta^{2\pi - \delta} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta \rightarrow \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta \quad (\delta \rightarrow 0).$$

ただし $\theta = 0$ のとき $(Re^{i\theta})^\alpha = R^\alpha$, $\theta = 2\pi$ のとき $(Re^{i\theta})^\alpha = R^\alpha e^{2\pi\alpha i}$ とみなす (そうすると被積分関数は $[0, 2\pi]$ 上の連続関数になり、積分の収束が容易に分かる)。

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq R^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq R^{\alpha+1} \cdot 2\pi \frac{M}{R^2} \\ &= \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$-C_3$ に沿う線積分は、

$$\begin{aligned}\int_{-C_3} z^\alpha f(z) dz &= \int_\varepsilon^R (te^{(2\pi-\delta)i})^\alpha f(te^{(2\pi-\delta)i}) \cdot e^{(2\pi-\delta)i} dt \\ &= e^{(2\pi-\delta)\alpha i} e^{(2\pi-\delta)i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{(2\pi-\delta)i}) dt = e^{2\pi\alpha i} e^{-(1+\alpha)\delta i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{-\delta i}) dt.\end{aligned}$$

$\delta \rightarrow 0$ のとき、 $t \in [\varepsilon, R]$ について一様に $t^\alpha f(te^{-\delta i}) \rightarrow t^\alpha f(t)$ であるから、

$$\int_{-C_3} z^\alpha f(z) dz \rightarrow e^{2\pi\alpha i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t) dt.$$

$-C_4$ に沿う線積分は

$$\int_{-C_4} z^\alpha f(z) dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \rightarrow \int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \quad (\delta \rightarrow 0).$$

ただし $\theta = 0$ のとき $(\varepsilon e^{i\theta})^\alpha = \varepsilon^\alpha$, $\theta = 2\pi$ のとき $(\varepsilon e^{i\theta})^\alpha = \varepsilon^\alpha e^{2\pi\alpha i}$ とみなす (そうすると被積分関数は $[0, 2\pi]$ 上の連続関数になり、積分の収束が容易に分かる)。

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \varepsilon^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} |f(\varepsilon e^{i\theta})| d\theta \leq \varepsilon^{\alpha+1} \cdot 2\pi \frac{M'}{\varepsilon} \\ &= 2\pi M' \varepsilon^\alpha \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).\end{aligned}$$

まず、(b) で $\delta \rightarrow 0$ としてから、 $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ として、

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t) dt - e^{2\pi\alpha i} \int_0^\infty t^\alpha f(t) dt = 2\pi i \sum_{c \neq 0} \text{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

ゆえに

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t) dt = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{c \neq 0} \text{Res}(z^\alpha f(z); c). \blacksquare$$

反省 上の証明を振り返ると、 $\delta \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z^\alpha f(z) dz &\rightarrow \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t) dt, \\ \int_{-C_3} z^\alpha f(z) dz &\rightarrow e^{2\pi\alpha i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t) dt\end{aligned}$$

となり、どちらも図形としては同じ線分 $[\varepsilon, R]$ 上の積分であるにもかかわらず、値が食い違い、引いても打ち消し合わないところがミソである。

全体の話が見える式を掲げると、

$$2\pi i \sum_c \text{Res}(f(z) \log z; c) = \int_{C_{\varepsilon, R}} f(z) \log z dz = (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_0^R f(x) dx + \text{剰余項}.$$

(積分路 $C_{\varepsilon, R}$ は図で描くのが簡単。)

例 E.1 $0 < \alpha < 1$ のとき、

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

例 E.1 (条件を書いていなかったけれど、 $0 < \alpha < 1$ と仮定するのかな?)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; i \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; -i \right) \right) \\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \left(\frac{e^{\pi\alpha i/2}}{2i} - \frac{e^{3\pi\alpha i/2}}{2i} \right) \\ &= \frac{\pi (e^{\pi\alpha i/2} - e^{3\pi\alpha i/2})}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \blacksquare \end{aligned}$$

この例については、Mathematica, Maple 等でも問題なく計算できる (それぞれ `Integrate[x^a/(1+x^2), {x,-Infinity,Infinity}]`, `integrate(x^a/(1+x^2), x == -infinity..infinity)` と入力する)。 ■

問 74. (Ahlfors p.174) $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx$ (答: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$)

E.2 有理関数の半直線上の積分 $\int_0^\infty f(x) dx$

ここで紹介する公式は載っていない本が多い。多くの本にあるのは、 f が偶関数であるとき (これは強い条件であるため、適用範囲はかなり狭くなってしまう)、

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c) = \pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c)$$

とするものだが、実は偶関数でない f に対しても、留数を用いて積分を求めることが出来る。

手短に証明の要点の式を掲げると、 $z \in (0, \infty)$ の場合の

$$(\log z)_{\text{下半平面からの極限}} = (\log z)_{\text{上半平面からの極限}} + 2\pi i$$

という不連続性に起因して得られる

$$2\pi i \sum_c \operatorname{Res}(f(z) \log z; c) = \int_{C_{\varepsilon, R}} f(z) \log z dz = -2\pi i \int_0^R f(x) dx + \text{剰余項}.$$

(積分路 $C_{\varepsilon, R}$ は図で描くのが簡単。)

命題 E.2 (有理関数の半直線上の積分) $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in [0, \infty) P(x) \neq 0$ ならば、

$$\int_0^\infty f(x) dx = - \sum_{c \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)} \operatorname{Res}(f(z) \log z; c).$$

ただし $\log$ は $\operatorname{Im} \log \in (0, 2\pi)$ であるような分枝を取る。

証明 $f(z) \log z$ を命題 E.1 と同じ積分路に沿って積分する。 ε, δ が十分小さく、 R が十分大きければ

$$\sum_{j=1}^4 \int_{C_j} f(z) \log z dz = 2\pi i \sum_{c \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)} \operatorname{Res}(f(z) \log z; c).$$

$\delta \rightarrow 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) \log z dz &\rightarrow \int_\varepsilon^R f(t) \log t dt, \\ - \int_{C_3} f(z) \log z dz &\rightarrow \int_\varepsilon^R f(t) [\log t + 2\pi i] dt. \end{aligned}$$

ゆえに $\delta \rightarrow 0$ のとき、

$$\int_{C_1+C_3} f(z) \log z dz \rightarrow -2\pi i \int_\varepsilon^R f(t) dt.$$

また $\delta \rightarrow 0$ のとき、

$$\int_{C_2} f(z) \log z dz \rightarrow \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(\log R + i\theta) \cdot iRe^{i\theta} d\theta,$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(\log R + i\theta) \cdot iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq R(\log R + 2\pi) \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq R(\log R + 2\pi) \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

同様に C_4 上の積分も $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき 0 に収束することが分かる。ゆえに

$$-2\pi i \int_0^\infty f(t) dt = 2\pi i \sum_{c \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)} \operatorname{Res}(f(z) \log z; c).$$

両辺を $-2\pi i$ で割って結果を得る。■

森・杉原 [23] pp. 160–163 には、

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \operatorname{Log}(-z) dz = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f(z) \operatorname{Log}(-z); c).$$

と書いてある。ここで C は実軸の正の部分を実軸の正の向きに囲む単純閉曲線で、 C およびその内部 (実軸の正の部分の開近傍) で正則となるように取る。

分枝の取り方をいちいち説明しなくて済むように (?), 主値 (principal value) Log を用いている (その代わり $\text{Log}(-z)$ のような少し分かりづらいものを使うことになる — コンピューターを使う時は便利なのか?)。

特にすべてが単純極であれば、

$$\int_0^\infty f(x) dx = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \text{Res}(f(z); c) \text{Log}(-c).$$

例 E.2

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}. \blacksquare$$

E.3 偶関数 $\times (\log x)^n$ の積分 $\int_0^\infty g(x)(\log x)^n dx$

(推敲が必要。)

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$, g は $\overline{\Omega}$ のある開近傍において、有限個の点を除いて正則、実軸上に特異点はなく、 $\forall x \in \mathbb{R} \ g(-x) = g(x)$ を満たす。 $R \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \in [0, \pi]$ について一様に、 $g(Re^{i\theta})R \log R \rightarrow 0$. このとき

$$2 \int_0^\infty g(x) \log x dx + i\pi \int_0^\infty g(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(g(z) \text{Log } z; c).$$

$\text{Log } z$ はいわゆる主値、すなわち $\text{Im}(\text{Log } z) \in (0, 2\pi)$.

例 E.3 $a > 0$ に対して、 $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \log a}{2a}$. 実際、

$$2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{\text{Log } z}{z^2 + a^2}; ia \right) = \frac{\pi}{a} \left(\log a + \frac{\pi}{2}i \right)$$

より、

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \log a}{2a}. \blacksquare$$

例 E.4 $a > 0$ に対して、 $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi(\log a - 1)}{4a^3}$. 実際、

$$2 \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + a^2)^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{\text{Log } z}{(z^2 + a^2)^2}; ia \right) = 2\pi i \frac{d}{dz} \left((z - ia)^2 \frac{\text{Log } z}{(z^2 + a^2)^2} \right) \Big|_{z=ia}$$

より。 $\blacksquare$

例 E.5 $a > 0$ に対して、 $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^4 + a^4} dx = \frac{\pi(2 \log a - \pi/2)}{4\sqrt{2}a^3}$. 実際、

$$2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^4 + a^4} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^4 + a^4} dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{Log} z}{z^4 + a^4}; ae^{\pi i/4} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{Log} z}{z^4 + a^4}; ae^{3\pi i/4} \right) \right) \\ = \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3} \left[(2 \log a - \frac{\pi}{2}) + i\pi \right]$$

より。■

例 E.6 $a > 0$ に対して、 $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^6 + a^6} dx = \frac{\pi(\log a - 2\pi/\sqrt{3})}{3a^5}$. 実際、

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}() = \frac{\pi}{3a^5} \left(2 \log a - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + i\pi \right)$$

となるので??? ■

問 75. (Ahlfors p. 174) $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$ (答: 0)

E.4 有理関数 $\times (\log x)^n$ の積分 $\int_0^\infty f(x)(\log x)^n dx$

(使うときは推敲が必要。)

偶関数とは限らない有理関数 f に対して、

$$\int_0^\infty f(x) (\log x)^n dx$$

を求める ($n = 0$ の場合が E.2)。

x^α も実は $\log$ を使って表されるので、このタイプである。

E.5 有理関数の有限区間の積分

(使うときは推敲が必要。)

$a < b$ とするとき、

$$\operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b}$$

は $z = a, b$ を分岐点とする。主値の性質から、 $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ で連続である。 $x \in (a, b)$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1} \Big|_{z=x+i\varepsilon} - \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1} \Big|_{z=x-i\varepsilon} \right) = -2\pi i$$

である。

f が $[a, b]$ の $(\mathbb{C}$ における) 開近傍 D で正則であるとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b} dz.$$

ただし C は、 $[a, b]$ を正の向きに囲む D 内の単純閉曲線で、 C の内部と C の周上では f は正則であるとする。

例 E.7

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} (1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

E.6 その他 有名な積分

この節では、 a を始点、 b を終点とする線分を $\Gamma_{a,b}$ と表す。

例 E.8 (Fresnel (フレネル) の積分) $f(z) := \exp(-z^2/2)$ の $C := C_1 + C_2 + C_3$, $C_1 := \Gamma_{0,X}$, $C_2 := \Gamma_{X,(1+i)X}$, $C_3 := \Gamma_{(1+i)X,0}$ ($X \in (0, \infty)$) に沿った積分を考えることで、

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

を示せ³⁸。

(解) f は整関数であるから、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。

$$0 = \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz.$$

ゆえに

$$\int_{-C_3} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

C_1 は $z = x$ ($x \in [0, X]$) とパラメーターづけできるから、

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^X e^{-x^2/2} dx.$$

$x/\sqrt{2} = t$ と置換すると、 $dx = \sqrt{2}dt$ であるから、

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^{X/\sqrt{2}} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} dt \rightarrow \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C_2 は $z = X + iy$ ($y \in [0, X]$) とパラメーターづけできる。

$$-\frac{z^2}{2} = -\frac{X^2 - y^2 + 2iXy}{2}, \quad dz = i dy$$

³⁸Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) の名を冠された Fresnel 積分 $C(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt$, $S(x) := \int_0^x \sin(t^2) dt$ の $x \rightarrow \infty$ での極限である。Fresnel は光の回折の研究に用いた。

であるから、

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^X e^{-(X^2-y^2+2iXy)/2} \cdot i dy.$$

$\left| e^{-(X^2-y^2+2iXy)/2} \right| = e^{-(X^2-y^2)/2}$, $-(X^2-y^2) = -(X+y)(X-y) \leq -X(X-y)$ であるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| &\leq \int_0^X e^{-(X^2-y^2)/2} dy \leq \int_0^X e^{-X(X-y)/2} dy \\ &= \int_X^0 e^{-Xt/2} \cdot (-1) dt = \int_0^X e^{-Xt/2} dt = \left[-\frac{2}{X} \cdot e^{-Xt/2} \right]_0^X \\ &= -\frac{2}{X} (e^{-X^2/2} - 1) \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$-C_3$ は $z = (1+i)t$ ($t \in [0, X]$) とパラメータづけできる。 $z^2 = (1+i)^2 t^2 = 2it^2$, $dz = (1+i)dt$ に注意して

$$\int_{-C_3} f(z) dz = \int_0^X e^{-it^2} \cdot (1+i) dt = (1+i) \int_0^X (\cos(t^2) - i \sin(t^2)) dt.$$

以上まとめて、

$$(1+i) \left(\int_0^X \cos(t^2) dt - i \int_0^X \sin(t^2) dt \right) = \sqrt{2} \int_0^{X/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt + \int_{C_2} f(z) dz \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (X \rightarrow \infty).$$

ゆえに左辺の二つの積分の $X \rightarrow \infty$ のときの極限も存在して、

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt - i \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{1}{1+i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

実部、虚部を取って

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \blacksquare$$

例 E.9 $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2+i2ax} dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}.$$

実部、虚部を取って、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(2ax) dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \sin(2ax) dx = 0.$$

以上を示せ。

(解答) $a = 0$ のときは良く知られた結果である (微分積分学の教科書に載っている)。広義積分の存在そのものは明らかである ($\left| e^{-x^2+i2ax} \right| = e^{-x^2}$, $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx < \infty$ であるから、絶対収束する)。 $a > 0$ の場合に証明すれば十分であることも容易に分かる ($a < 0$ のとき、 a の代わりに $|a|$ について考えれば良い)。

$f(z) := \exp(-z^2)$ とおく。 $a > 0$, $X > 0$ に対して、 $C_1 := \Gamma_{-X, X}$, $C_2 := \Gamma_{X, X+ia}$, $C_3 := \Gamma_{X+ia, -X+ia}$, $C_4 := \Gamma_{-X+ia, -X}$, $C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とおく。 f は整関数で、 C は閉曲線であるから、

$$0 = \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz.$$

ゆえに

$$\int_{-C_3} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz.$$

C_1 は $z = x$ ($x \in [-X, X]$) とパラメーターづけできるので、

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{-X}^X e^{-x^2} dx.$$

C_2 は $z = X + iy$ ($y \in [0, a]$) とパラメーターづけでき、 $-(X + iy)^2 = -(X^2 - y^2 + 2iXy)$ であるから、

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^a \exp[-(X^2 - y^2 + 2iXy)] \cdot i dy.$$

$X > a$ と仮定すると、 $y \in [0, a]$ に対して、

$$\operatorname{Re}[-(X^2 - y^2 + 2iXy)] = -(X^2 - y^2) = -(X + y)(X - y) \leq -X(X - y) \leq -X(X - a)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| &\leq \int_0^a |\exp[-(X^2 - y^2 + 2iXy)]| dy = \int_0^a e^{-(X^2 - y^2)} dy \\ &\leq \int_0^a e^{-X(X-a)} dy = ae^{-X(X-a)} \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

同様にして、

$$\left| \int_{C_4} f(z) dz \right| \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \infty).$$

$-C_3$ は $z = x + ia$ ($x \in [-X, X]$) とパラメーターづけできて、

$$\exp(-z^2) = \exp[-(x + ia)^2] = \exp[-x^2 + a^2 - 2iax] = e^{a^2} e^{-x^2} (\cos(2ax) - i \sin(2ax))$$

であるから、

$$\int_{-C_3} f(z) dz = e^{a^2} \left(\int_{-X}^X e^{-x^2} \cos(2ax) dx - i \int_{-X}^X e^{-x^2} \sin(2ax) dx \right).$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} e^{a^2} \left(\int_{-X}^X e^{-x^2} \cos(2ax) dx - i \int_{-X}^X e^{-x^2} \sin(2ax) dx \right) &= \int_{-X}^X e^{-x^2} dx + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz \\ &\rightarrow \sqrt{\pi} \quad (X \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}.$$

なお、この広義積分の存在そのものは明らかであり、また被積分関数が奇関数であることから明らかに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin(2ax) dx = 0.$$

あるいは一つにまとめて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{i2ax} dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

例 E.10 $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$ に対して、

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(m\pi/n)}.$$

特殊な形の積分であるが (以下の議論で、積分路の取り方が n に依存しているので、分母を変更するのは難しい)、意外な応用があり、多くのテキストに載っている例である。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2}, & \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, & \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5} &= \frac{4\pi}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, & \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= \frac{\pi}{3}, & \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} &= \frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}} &= \frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{10}, & \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{12}} &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\pi}{12}. \end{aligned}$$

なお、有理数 $r \in (0, 1)$ に対して³⁹、

$$\int_0^{\infty} \frac{x^r}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(r\pi)}$$

を証明するのに利用できる ($r = m/n$ として、 $x^n = u$ という置換積分をする)。

(解答) $f(z) := \frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ とおく。これは、 $\exp \frac{(1+2k)\pi i}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) を極として持ち、それ以外の範囲では正則である。 $\omega := \exp \frac{\pi i}{n}$ とおくと、 f の極は ω^{2k+1} ($k = 0, 1, \dots, n-1$) と表せる。 $\omega^n = -1$, $\omega^{2n} = 1$ が成り立つ。

$R \in (1, \infty)$ に対して、

$$C_1 := \Gamma_{0,R}, \quad C_2 : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi/n]), \quad C_3 := \Gamma_{R\omega^2,0}, \quad C := C_1 + C_2 + C_3$$

とおくと、 C は閉曲線で (C_2 の終点が $R\omega^2$ であることに注意)、その上に f の極はなく、内部にある f の極は ω だけである。留数定理から

$$(\#) \quad \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; \omega).$$

³⁹有理数でなくても成立する。後で別の方法で示す。

まず ω は f の 1 位の極であるから、

$$\operatorname{Res}(f; \omega) = \frac{z^{m-1}}{(1+z^n)'} \Big|_{z=\omega} = \frac{z^{m-1}}{nz^{n-1}} \Big|_{z=\omega} = \frac{\omega^{m-1}}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega^m}{n\omega^n} = -\frac{\omega^m}{n}.$$

C_1 は $z = x$ ($x \in [0, R]$) とパラメーター付けできるから、

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^R f(x) dx = \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx.$$

C_2 に沿う線積分は

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^{2\pi/n} f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta$$

である。ある正数 M, R^* が存在して、 $|f(z)| \leq M/|z|^2$ ($|z| \geq R^*$) という評価が成り立つので、 $R > R^*$ に対して、

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi/n} |f(Re^{i\theta})| \cdot R d\theta \leq \frac{M}{R^2} \cdot R \int_0^{2\pi/n} d\theta = \frac{2\pi M}{nR} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

$-C_3$ は $z = t\omega^2$ ($t \in [0, R]$) とパラメーター付け出来るから、

$$\int_{-C_3} f(z) dz = \int_0^R f(t\omega^2) \cdot \omega^2 dt = \int_0^R \frac{t^{m-1}\omega^{2(m-1)}}{1+t^n\omega^{2n}} \cdot \omega^2 dt = \omega^{2m} \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx.$$

(#) に代入して、

$$(1 - \omega^{2m}) \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx + \int_{C_2} f(z) dz = -2\pi i \frac{\omega^m}{n}.$$

$R \rightarrow \infty$ とすると、左辺第 2 項が 0 に収束するので、左辺第 1 項の極限が存在して

$$(1 - \omega^{2m}) \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = -2\pi i \frac{\omega^m}{n}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{-2\pi i \omega^m}{n(1 - \omega^{2m})} = \frac{\pi \cdot 2i}{n(\omega^m - \omega^{-m})} = \frac{\pi}{n \sin(m\pi/n)}. \blacksquare$$

例 E.11

$$\Gamma\left(\frac{q}{p}\right) \Gamma\left(1 - \frac{q}{p}\right) = B\left(\frac{q}{p}, 1 - \frac{q}{p}\right) = p \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi q/p)}.$$

最初の等号は有名な $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$ と $\Gamma(1) = 1$ による。また最後の等号は、上の例による。以下、真ん中の等号を示す。

まず $x^p = u$ という置換を用いて、

$$(39) \quad \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p} dx = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{u^{q/p-1}}{1+u} du.$$

一方、ベータ関数の定義式

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

において、 $x = t/(1+t)$ と変数変換すると

$$(40) \quad B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$$

が得られる。これから

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p} dx = \frac{1}{p} B\left(\frac{q}{p}, 1 - \frac{q}{p}\right)$$

が得られる。

稠密性の議論によって、 $\forall x \in (0, 1)$ に対して

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

解析接続によって $\mathbb{C}$ 全体で成立する。

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1+z/k} \quad (\gamma \text{ は Euler の定数})$$

より、

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{e^{-\gamma z}e^{\gamma z}}{z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1+z/k} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-z/k}}{1-z/k} = -\frac{1}{z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-(z/k)^2}.$$

ゆえに

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\pi z^2 \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (z/k)^2) = -\pi z \prod_{k=0}^{\infty} (1 - (z/k)^2).$$

例 E.12

$$I = \int_0^\pi \log \sin \theta \, d\theta = \pi \log 2.$$

問 76. (Ahlfors p. 174) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}} dx \quad (0 < \alpha < 2) \quad \left(\text{答 } \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}\right)$

F 楽屋裏

F.1 一松 [1] (1957) の VI 章 §4 から引用

数学は一度吸収してから、自分の言葉で書き直すことが出来るのだけど、歴史的事実に関してはそういうことがやりづらく (細かい表現の中に大事な事実が潜んでいたりします)、「写経」をすることになっています (こういうのはスキャンでなくて、キーボードからタイプ入れます)。一松 [1] から少し長めの引用をしたのですが、WWW に置くのは良くないと思うので、ここでは見せません。[1] は現在入手が難しいので、何とかならないかな、と思っているのですが。

G 参考書案内

関数論は良い本がたくさんあります。

今回教科書に選んだ神保 [24] も当然良い本です。難しくならないように注意を払いつつ、なかなか洒落た結果にまで言及してある、楽しい本です。一部に注意すべきところもありますが (Laurent 展開の定義が、中心が原点の場合で説明されているなど)、現在入手が容易な本の中で教科書としてベストだと考えています。

「大学では数学科に入ります」と高校の数学の先生 (年配者限定?) に言うとい紹介されることのある“ザ・古典”高木貞治『解析概論』 [8] は、微積分入門用参考書として勧めようというつもりはあまりないのですが、関数論に関しては素敵な本だと思います。既に出てあって積読しているような人は、この機会にもう一度ページをめくってみることを勧めます。ちょうど「複素関数」で講義しようと考えている内容がコンパクトかつ華麗にまとめられています。それを読んで理解出来るなら (読みにくいという感想は時々聞かないでもない)、じっくりと取り組んでみて下さい。

何かひっかかった時に、頼りになるセカンド・オピニオン本としては、杉浦 [10] を勧めます。書名に関数論、複素解析という語が入っていないし (これは解析概論と同じですね)、二巻本の末尾にあるので見通されがちですが、複素関数論の範囲について、特に充実した内容です。回転数を用いた、一般的な Cauchy の積分定理を書いてあるのは、和書ではこの本と高橋 [9] (これは少し高級) くらいではないかと思います。

問題演習がしたいという人は、梶原 [18] をチェックしてみてください。計算練習用の問題から、理論的な問題 (大学院入試の問題から選んだようなもの) まで、豊富な問題が揃っていて、親切な解説がついています。

関数論について、どういうことが成り立つか、辞書的な情報を求めている場合は、演習書の体裁を取っているけれど辻・小松 [25], あるいは辻 [26] を見ると良いかもしれません。

関数論の深化に関わった楕円関数の発達の歴史については、高木 [2] が有名ですが、それを読んで何かすごそうと思っても良く分からないですね。今となっては色々な本がありますが、有名な古典である (今ではパブリック・ドメインに置かれている) 竹内 [27] を読んでみるのも面白いかもしれません。あるいは関数論からは離れてしまうけれど、それを使って微分方程式の問題に挑戦する四ッ谷・村井 [28] は別の面白さのある本です。

後半部分に相当する内容の授業を担当したときの講義ノートが、桂田 [29] です。この講義の後半部分は、それに近いものになるでしょう。

最近出版された本から

藤本 [30] は、教科書に採用した神保 [24] と同じくらいのボリュームであるが、記述は簡潔で、内容はとても多い (つまり [24] は噛み砕いて書いてあるということだ)。実は関数論は、今でも古い教科書が出版されていて、

授業の準備で参考になる面が多かった。

プリンストンの解析学講義のシリーズとして出版されたスタイン&シャカルチ [31] は、複素解析の数学の他分野との関連が色々見えるように配慮された本で、参考になる。

多変数関数論は、昔は一松 [32] くらいしか和書がなく (ヘルマンダー [33] は東京図書で絶版状態だし)、登るのが困難な山のように思えたが、段々色々な本が出て来た。半分は数学読み物である大沢 [34] や、入門書シリーズに投入された若林 [35] を注目している。

いわゆる工学的な応用のためにはどういうところを勉強するかについては、東京大学工学教程というシリーズの藤原 [36], [37] が参考になる。数学用語の定義などの記述にツッコミを入れたくなる面もあるが⁴⁰、色々なことがコンパクトに記述されているのは得難い長所だと思う。

私はどのように関数論を学んだか

ここでは、自分がどういう本を読んで勉強したかを書いておく。

はじめて関数論に触れたのは、高木 [8] の通読にチャレンジしていたときである。この本はもともと東大数学科の学生に、1年間、週3回実質 $30 \times 3 = 90$ 分⁴¹の講義で、微積分、関数論、Fourier 級数の初歩を解説する講義の内容をまとめたもので、関数論にあてられたページ数はわずかであるが、要領よくまとめられていると思う。読んでいても面白かった。ここに書いてあることをきちんと身に付けていたら、この段階での関数論の知識はそれで十分と言えるが、それは平均的な学生には案外難しいような気がする。

というわけで、実質的には、吉田 [19] を読んで勉強した (吉田先生は「零の発見」 ([39]) の著者としても有名である)。これは評判の良い本で、日本語で数学を書くときの良い手本とまで評した人もいたりする。版型が小さかったので、散歩に行くにも持ち歩くことが容易で、しばらく肌身離さず読む生活をした。細かいセクションに分かれているので、少しずつ丹念に読んで行くのに便利であった。

数学科に進学が内定して、いよいよ授業で関数論を学ぶことになった際に、教科書に指定されたのが有名な Ahlfors [15] であった。英語であったので読めるか心配したが、もともと数学の本は1行1行意味を考えながら読むしかないので、案外苦にはならなかった。しかし、後になって「あれはどこに書いてあるのか？」パラパラめくって探すのは、日本語の本に比べてかなり難しかった気がする。この本は高木 [8] と比べると、行間があまり空いていなくて、かなりの正確さできちんと書かれていると思うが、その分、重要なところに到達するまでのページ数が多く (著者の方針が、読者が最初に初等関数の性質によく慣れてから、Cauchy の積分定理に進む、というものであったせいも多少はあるかな)、この本を読み切ることは当時の自分には難しかった。猫に小判だったのかもしれない。

関数論を学ぶ際は、計算テクニックの習得も重要である。そのために吉田 [19] は案外と使いにくかった。そもそも留数計算により定積分の値を求めるという定番の問題に対する解説に乏しい。Ahlfors などはかなりページ数を割いているのだが。結局、その手の計算練習には小堀 [40] を用いた。これは割と使い易かった。本屋で色々な本を手にとった末に選んだと記憶しているが、良い選択だった。最近これをめくってみて、あまり今風の書き方ではないけれ

⁴⁰ こういうことを書くと、数学者の嫌味ととられそうだけれど、寺澤 [38] (有名な古典!) などは、工学者が書いた本であるけれど、その手の文句のつけようがない。そのあたり、現代の方が甘くなっている (後退している) ような面がある。

⁴¹ 何でも、1コマ90分で、正規の時間より15分は遅れていくものだという“アカデミック・クォーター”を二重に適用して、定刻より30分遅れて講義を始め、そのうちの半分は前回の後半部分の内容と一緒にというやり方で講義したと言う伝説がある (だから学生は1回おきに出席して60分の話を聴けば、すべての内容を聴くことが出来たとか)。

ど、大事なことがちゃんと身に付くような内容であり、改めて良い本であると思った。各科目にこういう本がそろっていると良いんだけどね。

しかし、関数論の授業の演習にはいわゆる証明問題が多く、そういう計算問題はほとんどなかった。これはとても辛かった。当時のプリントを見ると、いわゆる有名な定理が並んでいて、こういうのを自力で解けなかったことは無理もなかったと思う。その定理を関数論の参考書 (例えば辻・小松 [25]) で探して、そこに書いてある証明を理解し、その授業の流れの中で無理のないように書き換えるようにすべきであった、と現在の自分は分かるが、当時はそういうことは思いもよらなかった。まあ、要するに苦戦していたわけだ。

辻・小松 [25] は今となっては書き方が古くて、そのままではまずいと思うが、もちろん大事なところはちゃんとしている。色々な結果が1冊にまとめられている問題解答辞典 (というよりは定理辞典) で、非常に便利な本である。ただし、載っている問題を端から順に解いていて、ドリルに使う本ではない。そういうことは高校を出てからそれほど時間がたっていない自分は、まだ良く分かっていなかった (ちなみにアマゾンの読者評では、ひどい点をつけられている—それは目的を間違えた使い方であって、ちょっと不当な評だ)。

そういうわけで消化不良を起こしていたが、計算だけでも出来れば単位はくれるもので、とりあえず前進。

3年生になって関数論の続きが必修であった。3時間の講義と2時間の演習付き。内容はRiemannの写像定理とか、モノドロミーとか。前者はともかく (色々な本に載っている…何を読んだっけ?)、後者は授業の内容に沿った本が見つけられなかった。少し脱線して、久賀 [41] などを読んだりしたのは懐かしい。この時期はルベーグ積分や微分幾何、ガロア理論など自分にとって重量級の授業が並んでいて、関数論の勉強に十分な時間がさけなかったことが惜しまれる。

大学院の入試準備を始めることになり、高橋 [9] を読み始め、梶原 [18], [42] を用いて演習問題を解いた。大学院の入試では、線形代数と関数論の準備が肝であると感じていた。後から振り返って、関数論でかなりの得点をかせぐことが出来たと思う。

高橋 [9] は短いページ数の中に多くの内容が書かれていて、濃密な感じがする。最初に読むのは難しいと思われるが、一度勉強した者が知識の再整理をするために読むのに適切な感じがする。数学的にきちんとしているが、冗長さが無く、簡潔性が保たれているのは気持ちが良いし、何より読んでいて楽しい本であった。

梶原 [18], [42] も関数論の復習のために大変役立った。大学院の入試問題等から問題を集めて、一通りの学習が出来るようにする、というのは面白いアイデアであり、成功していると思う。入試対策として今でも適切であるかどうかは知らないが、勉強のやり方としては今でも通用すると思う。

研究者としての道を歩み始めて、役に立ちそうなものは何でも目を通して見る、という考え方をするようになった。読みにくかろうが、書き方が現代的でなかろうが、知っていれば自分の問題が解決できるはずの知識を知らないでいるのは馬鹿馬鹿しい。となると、標準的な内容をカッコよく説明してある本よりは、色々なことが載ってある本が有益で面白い。既に紹介した辻・小松 [25] はそういう面でも良い本であるが、本屋で、辻 [26] を発見して購入できたのは良かったと思う。

参考文献

- [1] 一松信：函数論入門, 培風館 (1957).
- [2] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [3] 岡本久, 長岡亮介：関数とは何か — 近代数学史からのアプローチ, 近代科学社 (2014/7/28).
- [4] 高瀬正仁：楕円関数論形成史叙述の試み, 数理解析研究所講究録, 第 1787 巻, pp. 221–232 (2012).
- [5] 桂田祐史：数学解析, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).
- [6] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843> でアクセスできる。この eBook まともな目次を付けてほしい。
- [7] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).
- [8] 高木貞治^{ていじ}：解析概論 改訂第 3 版, 岩波書店 (1961), <https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/zouteikaisekigairon/> に『増訂解析概論』の現代仮名遣い版があります。
- [9] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された。丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441> でアクセスできる。
- [10] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), 丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844> でアクセスできる。
- [11] 堀川穎二^{えいじ}：複素関数論の要諦, 日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).
- [12] 小平邦彦：複素解析, 岩波書店 (1978).
- [13] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/pde/pde2013.pdf> (1997 年～).
- [14] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).
- [15] 一松信：微分積分学入門第四課, 近代科学社 (1991).
- [16] 一松信^{ひとつまつしん}：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。

- [17] 梶原壤二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).
- [18] 吉田洋一：函数論 第2版, 岩波書店 (1965).
- [19] L. シュヴァルツ：シュヴァルツ解析学1 集合・位相, 東京図書 (1970).
- [20] 遠山^{ひらく}啓：数学入門 (下), 岩波新書 G5, 岩波書店 (1960).
- [21] 小堀憲：大数学者, 筑摩書房 (2010), 1966 年に出版されたものの文庫化.
- [22] 森正武, 杉原正顯：複素関数論, 岩波書店 (2003).
- [23] 神保^{じんぼう}道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.
- [24] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、^{ゆうじょうぼうずいまん}祐乗坊瑞満、水本久夫.
- [25] 辻正次：複素函数論, 槇書店 (1968).
- [26] 竹内^{たけのうちたんぞう}端三：楕圓函数論, 岩波書店 (1936), 著者は 1945 年没。パブリック・ドメインにおかれている。国立国会図書館の <http://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/1063357> とか (全コマ ダウンロード可能)。組版し直した <http://yx4.life.coocan.jp/books/oldbooks.html> もあるけれど、ミスプリが散見される箇所もある。現代仮名遣い版 <https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/daenkansuron/> もある.
- [27] 四ッ谷晶二, 村井^{みのる}実：楕円関数と仲良くなろう: 微分方程式の解の全体像を求めて, 日本評論社 (2013).
- [28] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/complex-function.pdf> (2008~).
- [29] 藤本^{ひろたか}孝坦：複素解析, 岩波書店 (2006/5/10).
- [30] エリアス・M. スタイン, ラミシャカルチ：複素解析, 日本評論社 (2009).
- [31] 一^{ひとつまつしん}松信：多変数解析函数論, 培風館 (1960).
- [32] ヘルマンダー多変数複素解析：多変数複素解析学入門, 東京図書 (1973), 笠原乾吉訳.
- [33] 大沢健夫：岡潔／多変数関数論の建設, 現代数学社 (2014).
- [34] 若林功：多変数関数論, 数学のかんどころ, 共立出版 (2013).
- [35] 藤原毅夫：東京大学工学教程 基礎系 数学 複素関数論 I, 丸善出版 (2013).

- [36] 藤原毅夫：東京大学工学教程 基礎系 数学 複素関数論 II, 丸善出版 (2014).
- [37] 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論 増訂版改版, 岩波書店 (1983), 初版はいつ出たのやら….
- [38] 吉田洋一：零の発見 — 数学の生い立ち, 岩波書店 (1986), 1938 年に出版された。
- [39] 小堀憲：複素解析学入門, 朝倉書店 (1966).
- [40] 久賀道郎：ガロアの夢 — 群論と微分方程式, 日本評論社 (1968/7/1).
- [41] 梶原壤二：新修解析学, 現代数学社 (1980, 2005).

索引

Abel's continuity theorem, 62, 177

analytic function, 91

annulus, 114

closed curve, 74

connected, 166

contour integral, 94

entire function, 106

holomorphic, 31

isolated singularity, 121

Laurent series, 118

Liouville's theorem, 106

multifunction, 131

pole, 124

principal part, 123

regular, 31

removable singularity, 124

residue, 123, 138

star-shaped, 84

maximum principle, 105

maximum-modulus principle, 105

mean value property, 104

Abel の級数変形法, 175

Abel の連続性定理, 62, 177

位数, 124, 134

一様収束, 50

一価関数, 66

一致の定理, 101

円環領域, 114

開円盤, 28

開集合, 28

解析関数, 91

解析的, 31

下極限, 168

各点収束, 49

関数関係不変の原理, 103

完備, 39

球面平均の定理, 105

共役調和関数, 36

共役複素数, 12

極, 124

極形式, 17

局所弧連結, 167

虚軸, 16

虚数, 9

項別積分, 50

Cauchy の積分定理 (三角形の周に沿う線積分),
79

Cauchy の積分公式 (円盤領域における), 90

Cauchy の積分定理 (円盤領域に対する), 87

Cauchy の積分定理 (星型領域における), 86

Cauchy の評価式, 106

Cauchy-Riemann の方程式, 33

Cauchy 列, 38

孤立真性特異点, 124

孤立点, 169

孤立特異点, 121

弧連結, 35, 166

最大値原理, 105

実軸, 16

周回積分, 94

集積点, 169

主値, 18

主部 (ローラン展開の), 123

主要部 (ローラン展開の) (principal part of
Laurent expansion), 123

上極限, 168

条件収束, 41
 除去可能特異点, 124
 Joran 曲線定理, 74

 整関数, 106
 整級数, 37
 整型, 31
 正項級数, 42
 正則, 31
 正則曲線, 74
 跡 (曲線の), 74
 絶対収束, 40
 絶対値, 14

 像 (曲線の), 74

 代数学の基本定理, 107
 多価関数, 66
 単純曲線, 74

 超幾何関数, 58
 調和関数, 36

 導関数, 31
 特殊関数, 58

 2 項方程式, 22

 微分可能, 31
 微分係数, 31

 複素関数, 27
 複素数, 9
 複素数体, 10
 複素平面, 16

 閉曲線, 74
 平均値の性質, 104
 閉包, 28
 平方根, 11
 冪級数 (ベキ級数), 37
 Bessel 関数, 58
 ベルヌーイ数, 110
 偏角, 18

 星型, 84

 Morera の定理, 82

 Laplace 方程式, 36

 リウヴィユの定理, 106
 留数, 123, 138
 領域, 35

 零点, 134
 連結, 102, 166

 Laurent 級数, 114
 Laurent 級数 (関数の), 118
 Laurent 級数展開 (Laurent series expansion),
 118
 Laurent 展開 (Laurent expansion), 118