

2014 年度 複素関数, 複素関数同演習 期末試験問題

2015 年 1 月 30 日 (金) 9:00~11:00 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

1. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ とするとき、 $\frac{1}{z}$, z^2 , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\bar{z}$, $\arg z$, z の極形式, z^{10} を求めよ (極形式以外は $a+bi$ あるいは a あるいは bi ($a, b \in \mathbb{R}$), いずれかの形に表せ)。結果のみで良い。

2. 次の各用語を説明せよ (定義を述べ、実例をあげよ)。

(1) 正則関数 (2) 孤立特異点 (3) 孤立特異点のまわりの Laurent 展開と留数

3. (1) 方程式 $\sin z = 2$ を解け。(2) $f(z) = \sin z$ の実部・虚部を求め、それらが Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを実際に偏微分することで確認せよ。

4. (1) 冪級数の収束半径と収束円の定義を述べよ。(2) $f(z) = \frac{2z}{z^2+5}$ に対して、以下の問に答えよ。(a) f の 0 の周りの Taylor 展開 (冪級数展開) と、その収束半径を求めよ。(b) f の i の周りの Taylor 展開の収束半径を求めよ。

5. $f(z) = \frac{1}{z(z-4)}$ について、以下のものを求めよ。(1) 0 のまわりの Laurent 展開とその主部と留数 $\operatorname{Res}(f; 0)$ (2) 4 のまわりの Laurent 展開とその主部と留数 $\operatorname{Res}(f; 4)$ (3) $A(0; 4, \infty)$ における Laurent 展開
ただし $A(c; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-c| < R_2\}$.

6. 次の定積分を求めよ。何か公式 (定理) を用いる場合は、その公式を説明すること。

(1) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ (2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\sin \theta)^2}$

7. 以下の命題から 1 つ以上選んで証明せよ。

(a) f が正則関数ならば、 f の実部と虚部をそれぞれ u, v とするとき、 u, v は Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(b) f が領域で定義された正則関数で、 $|f|$ が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。

(c) c が f の k 位の極であるとき、 $\operatorname{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} [(z-c)^k f(z)]$.

(d) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. (適当な正則関数と積分路を選び、複素線積分の収束などを示すことで証明せよ。)

(e) 授業で説明した命題のうち、きちんと (仮定の条件をもらさずに) 書けるものを自由に 1 つ選んで良い。

(2016 年 1 月 29 日版, 色々省略しているけれど、段々書き足す。)

- 正則関数の定義が「微分可能な複素関数」であることは頭に叩き込む。
- 冪級数とは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数であり、任意の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、

「 $|z-c| < \rho$ で収束、 $|z-c| > \rho$ で発散」を満たす ρ が一意的に存在する

ので、その ρ を収束半径、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を収束円と呼ぶ。

注 円の内部であるから、円盤 (または円板) と呼ぶのがふさわしそうだが、収束円 (英語では the circle of convergence) と呼ぶ習慣である。

- 昔から学生に多い間違い: 収束半径とは、 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ で求まる ρ のことである。そもそもこの $\lim$ が存在しない場合がとて多い。 $\lim$ が存在するのは特殊な場合に過ぎない。一方で、上に書いたこと ($|z-c| < \rho$ で収束、 $|z-c| > \rho$ で発散) を満たす ρ が一意的に存在する) は常に成り立つので、それを使って定義しているわけである。

d'Alembert の公式は使用上の注意を守ってお使い下さい
(収束半径の定義には使えない)

- 何故か間違えたり忘れる人が多いのが、虚数部分と絶対値

$$\operatorname{Im}(1+2i) = 2 \quad (\operatorname{Im}(1+2i) = 2i \text{ ではない})$$

- 間違えずに使えて、求められたら証明も出来るべき公式 2 つ

- 複素数 c と自然数 n に対して、方程式 $z^n = c$ の解は、 c の極形式を $\rho e^{i\varphi}$ として、 $z = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) (c の極形式は無限個あるが、どれでも 1 個選べば良い)。
- 複素数 z ($\neq 0$) に対して、方程式 $e^w = z$ の解は、 z の極形式を $re^{i\theta}$ として、 $w = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$) (z の極形式は無限個あるが、どれでも 1 個選べば良い)。

これから、複素関数としての対数関数の定義 $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$)

注意 複素関数としての対数関数は無限多価関数で、写像ではない!

注意 複素関数としての対数関数は実関数の対数関数の拡張ではない! (実関数の値を含んでいるが、それ以外の値も含んでいて、取り扱い注意が必要である。異なる記号で表した方が良くらい。指数関数とは事情が異なる。)

- いわゆる「初等関数」は、指数関数とその逆関数である対数関数を使って表される。

- (i) Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と、それから導かれる $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ は、 θ が複素数でも (つまり指数関数、 $\cos$, $\sin$ を複素関数に拡張しても) 成り立つ。特に

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(ii) $\alpha \neq 0$ に対して、 $z^\alpha := e^{z \log \alpha}$

注意 $w = \log z$ が多価関数だから、大抵の場合は $w = z^\alpha$ も多価関数だが、 $\alpha \in \mathbb{Z}$ ならば 1 価、 $\alpha \in \mathbb{Q}$ ならば $\alpha = \frac{n}{m}$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$ として n 価である。

(解説)

1. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ であるから

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}+i} = \frac{2(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{2(\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{2},$$
$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{3}i+i^2}{4} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}.$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

$$\arg z = \frac{\pi}{6}.$$

$$z = e^{i\pi/6}.$$

$z = e^{i\pi/6}$ であるから、

$$z^{10} = e^{i10\pi/6} = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}. \blacksquare$$

偏角を間違える人が多い。 $\pi/3$ としてしまうとか。高校数学を忘れている？

2.

(1) 複素関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であるとは、 $\forall c \in \Omega$ で微分出来ること、すなわち極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。

(2) c が f の孤立特異点とは、ある正数 R が存在して $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < R\}$ で f が (定義されていて) 正則で、 f が c では微分可能でないことをいう。

(3) c が f の孤立特異点であるとき、ある正数 R とある数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が存在して

$$(\sharp) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R)$$

が成り立つ。(♯) を f の c のまわりの Laurent 展開と呼び、 a_{-1} を f の c における留数と呼ぶ。

- 大雑把に言って、正則とは微分可能な複素関数ということ。正確に言うと、「定義域である開集合の上で」微分可能ということ。それが分かっていない人には単位出したくない…
- Laurent 級数の形が書けないのは困った。
- 留数は a_{-n} なんてのもいた。

3.

(1) (宿題 No. 6 (5) そのもの) $w = e^{iz}$ とおくと

$$\begin{aligned} \sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 4i \Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow w = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 1} = 2i \pm \sqrt{3}i = (2 \pm \sqrt{3})i \\ &\Leftrightarrow iz = \log \left[(2 \pm \sqrt{3})i \right] = \log(2 \pm \sqrt{3}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

(注: 実は $\log(2 - \sqrt{3}) = -\log(2 + \sqrt{3})$ なので $z = \pm i \log(2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ と書いても良いし、 $z = i \log(2 \pm \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ と書いても良い。)

(2) 宿題 No. 3 (1-c) で $\cos z$ の実部・虚部を求める問題があり、その類題である。

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2i} ((e^{-y} - e^y) \cos x + i(e^{-y} + e^y) \sin x) \\ &= \frac{1}{2} ((e^{-y} + e^y) \sin x + i(e^y - e^{-y}) \cos x) \\ &= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x. \end{aligned}$$

(Mathematica で `ComplexExpand[Sin[x+I y]]` とすると検算できる。) $u(x, y) = \cosh y \sin x$, $v(x, y) = \sinh y \cos x$ であるから、

$$u_x = \cos x \cosh y, \quad u_y = \sinh y \sin x, \quad v_x = -\sin x \sinh y, \quad v_y = \cosh y \cos x.$$

確かに $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。■

宿題の時はそれなりに解けていた (1) がぼろぼろ。

4.

- (1) 任意の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、 $|z-c| < \rho$ ならば収束、 $|z-c| > \rho$ ならば発散という条件を満たす $\rho \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ がただ1つ存在する。その ρ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径と呼ぶ。このとき $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を収束円と呼ぶ。
- (2) (a) 等比級数の和の公式から

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 5} = \frac{2z}{5 \left(1 - \frac{-z^2}{5}\right)} = \frac{2z}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{5}\right)^n = \frac{2z}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{5^{n+1}} z^{2n+1}.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ |公比| $< 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z^2}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{5}$ であるから、収束半径は $\sqrt{5}$.

(別解)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z + i\sqrt{5}} + \frac{1}{z - i\sqrt{5}} = \frac{1}{i\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 + z/i\sqrt{5}} - \frac{1}{1 - z/i\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{iz}{\sqrt{5}}\right)^n - \left(\frac{iz}{\sqrt{5}}\right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}((-1)^n - 1)}{5^{(n+1)/2}} z^n. \end{aligned}$$

ここから d'Alembert をしても難しい。結局は、 n が偶数のときと奇数のときで場合分けすることになるだろう。そうすると上の式に戻る。

(b) f は分母の零点である $\pm\sqrt{5}i$ を除いた $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$ で正則である。 $i \in \Omega$ であるから、 f は i のまわりで冪級数展開できるが、その収束半径は、中心 i とこれら特異点との距離で、 $\sqrt{5} - 1$. ■

- 収束半径の定義が書けない人が多い。何となく予想したとおり、d'Alembert の公式を書いている人が結構いた。喩え話をすると、簡単な方程式は解けるけれど、方程式の解とは何か分かっていないような、そんな感じ。(計算問題の解を出すだけならば、Mathematicaの方が優秀だよなあ。)
- (2) で収束半径を 5 と書く人が出ると予想していたけれど、予想していたよりも大勢いた。
- d'Alembert の公式なんて教えない方が良くのかもしれない、と思わせるような、惨憺たる結果。

5. 宿題 No. 11 そのものです。

$$f(z) = \frac{1}{z(z-4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z} \right).$$

- (1) 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4(1-z/4)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} \quad (|z| < 4).$$

であるから、

$$f(z) = \frac{1}{4} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} - \frac{1}{z} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < 4).$$

この Laurent 展開の主部は $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z}$ である。0 における留数は $1/z$ の係数であるから

$$\text{Res}(f; 0) = -\frac{1}{4}.$$

(2) 等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-4)+4} = \frac{1}{4(1+(z-4)/4)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-4}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-4)^n \quad (|z-4| < 4)$$

であるから、

$$f(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-4)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}} (z-4)^n + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z-4} \quad (0 < |z-4| < 4).$$

この Laurent 展開の主部は $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z-4}$ である。4 における留数は $1/(z-4)$ の係数であるから

$$\text{Res}(f; 4) = \frac{1}{4}.$$

(3) $|z| > 4$ のとき $|4/z| < 1$ であるから、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z(1-4/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{z^n} \quad (4 < |z| < \infty).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{z} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-2}}{z^n} \quad (4 < |z| < \infty). \blacksquare$$

6.

(1) 「 $f(x) = \frac{Q(z)}{P(x)}$, $P(z)$, $Q(z)$ が多項式で $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ が成り立つ

とき、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{c \text{ は } f \text{ の極} \\ \text{Im } c > 0}} \text{Res}(f; c).$ 」という定理を使う。 $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, $P(z) = z^4+1$,

$Q(z) = 1$ とおくと、 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $\deg P(x) = 4 \geq 0 + 2 = \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $P(x) = x^4+1 \geq 1$ より $P(x) \neq 0$. ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{c \text{ は } f \text{ の極} \\ \text{Im } c > 0}} \text{Res}(f; c).$$

f の極 c は P の零点で、 P の零点は $z^4 + 1 = 0$ の解であるから

$$c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

このうち $\operatorname{Im} c > 0$ であるものは $\frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$. c は P の 1 位の零点であるので、

$$\operatorname{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \frac{1}{4c^3} = \frac{c}{4c^4} = \frac{c}{4 \cdot (-1)} = -\frac{c}{4}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f; \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(f; \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \right) = 2\pi i \cdot \frac{-1}{4} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{2i}{\sqrt{2}} = \frac{-i^2 \pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

f は偶関数であるから

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(2) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ より $d\theta = \frac{dz}{iz}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$ であるから、

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \sin \theta)^2} = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2 + \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2^2 i^2 z^2}{(z^2 + 4iz - 1)^2} \frac{dz}{iz} = 4i \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4iz - 1)^2} dz$$

$z^2 + 4iz - 1 = 0$ の解は

$$-2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 1} = -2i \pm \sqrt{3}i = (-2 \pm \sqrt{3})i.$$

$f(z) := \frac{z}{(z^2 + 4iz - 1)^2}$ とおくと、留数定理により

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \sin \theta)^2} = 4i \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2 + 4iz - 1)^2}; c\right) = -8\pi \operatorname{Res}\left(f; (\sqrt{3} - 2)i\right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; \alpha) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \left(\frac{d}{dz} \right)^{2-1} \left((z - \alpha)^2 \frac{z}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z - \beta)^2 \cdot 1 - 2(z - \beta) \cdot z}{(z - \beta)^4} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z - \beta) - 2z}{(z - \beta)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{-(z + \beta)}{(z - \beta)^3} = \frac{-(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^3}. \end{aligned}$$

$\alpha = (-2 + \sqrt{3})i$, $\beta = (-2 + \sqrt{3})i$ とするとき、 $\alpha + \beta = -4i$, $\alpha - \beta = 2\sqrt{3}i$ であるから、

$$\operatorname{Res}(f; \alpha) = -\frac{-4i}{(2\sqrt{3}i)^3} = \frac{4i}{-8 \cdot 3\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \sin \theta)^2} = -8\pi \cdot \left(-\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}. \blacksquare$$

(2) で

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \sin \theta)^2} = 4i \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4iz - 1)^2} dz$$

まで書いてくれれば中間点の出しようがあるのだけど(ここから後は留数計算で、それはそれでウェイトが大きいけれど、複素線積分に直すまでで、半分の点をあげても良い)。そういう式を書かずに留数計算の準備をして、結局何の主張も書いていない答案を見ると、悲しくなる。記述式の試験に慣れていないということなのかなあ。全部分からなくても、最後まで行き着かなくても、分かったことは明記する、ということで、そんなに難しいことではないのだけど。

7. (略)