複素関数練習問題 No. 7

桂田 祐史

2015 年 1 月 19 日

留数定理の定積分計算への応用 (1)

公式を使う練習をするために全部解こう、などと考えないように (それぞれのパターンにつき、簡単そうなものを 1 つ, 2 つ解けば十分)。

94. a を正数, n を自然数とする。以下の積分を求めよ。
(1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$ (2) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$ (3) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ (4) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+a^6}$
(5) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+a^2)^4}\,dx$ (6) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+a^4)^3}\,dx$ (7) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$
(8) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}+a^{2n}}$

解答 (1) $\dfrac{\pi}{a}$ (2) $\dfrac{\pi}{a^3\sqrt{2}}$ (3) $\dfrac{\pi}{2a^3}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3a^5}$ (5) $\dfrac{\pi}{16a^3}$ (6) $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{64a^9}$ (7) $\dfrac{\pi(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n-2)!!}$
(注: $n!!=n(n-2)\cdots 2$ (n : 偶数), $n!!=n(n-2)\cdots 5\cdot 3$ (n: 奇数)) (8) $\dfrac{\pi}{na^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2n}}$

95. (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx$ (Ahlfors, P. 173) (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$, $a>0$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$ (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx$

解答 (1) $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$ (2) $\dfrac{5\pi}{12}$ (3) $\dfrac{\pi}{16\,|a|^3}$ (4) $\dfrac{\pi}{4}$ (5) $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$

96. $P(z)$, $Q(z)$ を互いに素な m, n 次の実係数の多項式で、$m\ge n+1$ とし、α を正数とする。$P(z)=0$ が実根をもたず、上半平面では、単根 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ のみをもてば、

(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{P(x)}\cos\alpha x\,dx=-2\pi\,\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{Q(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}e^{i\alpha a_j}\right)$$

(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{P(x)}\sin\alpha x\,dx=2\pi\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{Q(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}e^{i\alpha a_j}\right)$$

が成立することを示せ。— 授業で説明する予定だけど自分で証明してみよ、という問題。

97. $P(z),\, Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \neq 0$, $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)} e^{iaz}; c\right)$$

が成り立つ、という定理を授業で紹介するはずだが、$a < 0$ のときはどうすればよいか。

98. 正数 a, α に対して以下の積分を求めよ。
(1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + a^2}\, dx$ (3) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$ (4) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^4 + a^4}\, dx$
(5) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^4 + a^4}\, dx$

解答 (1) $\dfrac{\pi e^{-a\alpha}}{a}$ (2) $\pi e^{-a\alpha}/2$ (3) $\dfrac{\pi(1 + a\alpha)e^{-a\alpha}}{2a^3}$ (4) $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}a^3}\left(\cos \dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}} + \sin \dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}\right)$
(5) $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{a^2} \sin \dfrac{ab}{\sqrt{2}}$

以下の問題の多くは、梶原 [1] pp. 80–81 などから採った。

99. n は自然数, a と b は正数, $0 < r < R$ とする。以下の積分を求めよ。
(1) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta\, d\theta$ (2) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta\, d\theta$ (3) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$
(4) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$ (5) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}$ (6) $I = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}}\right) d\theta$
(7) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$ (8) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^2}$ (9) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$ $(a > b)$
(10) $I + iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta} d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta} d\theta.$$

(11) $I + iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta - n\theta)\, d\theta, \quad J = \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \sin(a\sin\theta - n\theta)\, d\theta.$$

解答 (1) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (2) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (3) $\dfrac{2\pi}{ab}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3}$ (5) $\dfrac{2\pi}{R^2 - r^2}$ (6) 1 (7) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ (8) $\dfrac{2\pi(R^2 + r^2)}{(R^2 - r^2)^3}$
(9) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ (10) $I = \dfrac{2\pi}{R^2 - r^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^m$, $J = 0$ (11) $I = \dfrac{2\pi a^n}{n!}$, $J = 0$

参考文献

[1] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).