

複素関数練習問題 No. 6

桂田 祐史

2014 年 12 月 22 日, 訂正 2015 年 1 月 18 日

念のため: $D(c; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$, $A(c; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$

Cauchy の積分定理・積分公式

63. $\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z}$ と $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z}$ を求めよ。(たくさんのやり方がある。)

64. (1) 星形領域の定義を述べよ。(2) $\mathbb{C}$, 円盤領域, の内部以外の星形領域の例をあげよ。

65. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) Ω が星形領域であることを示せ。(2) Ω で積分を用いて“対数関数” L を定義せよ。きちんと定義できること、正則関数であることを示せ。(3) (2) で定義した関数 L について (a) $x \in \mathbb{R}$ ならば $L(x) = \log x$ ($\log$ は高校数学の対数), (b) $L(z_1 z_2) = L(z_1) + L(z_2)$ ($z_1, z_2 \in \Omega$) が成り立つことを示せ。

66. 円盤領域における Cauchy の積分公式を用いて、以下の等式を証明せよ。

$$a, c \in \mathbb{C}, r > 0, |a - c| < r \text{ とするとき, } \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

(Cauchy の積分公式を知っていると、この等式はほとんど明らかに見える、ということを是非理解してもらいたい。この授業では、円盤領域における Cauchy の積分公式の証明にこの等式を用いたので、循環論法になってしまうが、この等式を用いずに Cauchy の積分公式を導くことも出来る。)

Cauchy の積分公式から導かれる正則関数の性質

積分公式やそれから導かれるべき級数展開可能性から、一致の定理、最大値原理、Liouville の定理、収束半径の評価などが得られる。一致の定理と収束半径は必修。

67. U は $\mathbb{C}$ の開集合, $c \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とするとき、次の 2 条件は同値であることを示せ。

(i) U で正則な関数 g が存在して、 $f(z) = (z - c)^k g(z)$ ($z \in U$), $g(c) \neq 0$.

(ii) $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$, $f^{(k)}(c) \neq 0$.

(この条件が成り立つときに、 c は f の k 位の零点という。この命題の証明は講義ノート §11 にある。

(i) $\Rightarrow$ (ii) は、多項式の場合と同じ論法で証明できる。(ii) $\Rightarrow$ (i) は、冪級数展開を用いる。)

68. Ω は $\mathbb{C}$ の領域、 $c \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $f(c) = 0$, $f \not\equiv 0$ ならば、

$$\exists \varepsilon > 0 \ (\forall z : 0 < |z - c| < \varepsilon) \quad f(z) \neq 0$$

が成り立つこと (定数関数 0 でない正則関数の零点は孤立している) を示せ。
(これから、正則関数の一致の定理 (identity theorem) が導かれるのであった。)

69. 加法定理 $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ ($z, w \in \mathbb{C}$) を、実三角関数の加法定理と、一致の定理を用いて証明せよ。

70. 関数 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ の、実数 a のまわりの冪級数展開 (Taylor 展開) の収束半径を求めよ。ただし冪級数展開そのものは実行しないで求めること。

(宿題に出したわけだが、大勢の人が 1 と間違えた。再度問います。)

71. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3}$ の 0 のまわりの Taylor 展開は $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^{n+1}}$ であるが、収束半径をなるべくたくさんの方で求めよ。

72. Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $\forall z \in \Omega \ f(z) \neq 0$, さらに f は定数関数ではないとすると、 $\min_{z \in \Omega} |f(z)|$ は存在しないことを示せ。

73. $f(z)$ が $|z| \leq 1$ の開近傍 (それを含むある開集合という意味) で正則であって、 $|f(z)|$ が $|z| = 1$ で定数 m で、しかも $|z| < 1$ で零点を持たなければ、 $f(z)$ は定数であることを示せ。

74. 次の命題 (Schwarz の Lemma と呼ばれる有名な定理) を証明せよ。

$f: D(0; 1) \rightarrow \mathbb{C}$ は正則で、 $|f(z)| \leq 1$ ($z \in D(0; 1)$), $f(0) = 0$ とするとき、 $|f(z)| \leq |z|$ かつ $|f'(0)| \leq 1$ が成り立つ。さらに、 $f(z) = cz$, $|c| = 1$ となる c が存在する場合を除くと

$$|f(z)| < |z| \quad (0 < |z| < 1), \quad |f'(0)| < 1.$$

孤立特異点と Laurent 展開

75. 次の用語の定義を述べよ。(1) 孤立特異点 (2) 除去可能特異点 (3) 極 (4) 孤立真性特異点 (5) 留数

76. 複素関数 f の孤立特異点 c が、 f の k 位の極であるとはどういうことか、定義を述べよ。

77. 複素関数が Laurent 展開可能であることを結論とする定理 (授業で紹介した) を一つ書け。(展開が成り立つ変数の範囲、Laurent 展開の係数などについて言及すること。)

78. c が f の孤立特異点、 $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の 2 条件は互いに同値であることを示せ。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) c を含むある開集合 U で正則な関数 g が存在して、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (z \in U \setminus \{c\}), \quad g(c) \neq 0.$$

(この命題の証明は講義ノート §11 にある。(i) $\Rightarrow$ (ii) にしても、(ii) $\Rightarrow$ (i) にしても、関数を展開してしまえば、後は簡単である。)

79. 以下の (1),(2),(3) を証明せよ (Casorati-Weierstrass の定理を使わずに証明せよ)。

(1) $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists z \in A(0; 0, \varepsilon)) \exp \frac{1}{z} = a.$

(2) $(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{z_n} = 0.$

(3) $(\exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{z_n} = \infty.$

これを解くために孤立特異点の知識は必要なく、 $e^z = \exp z$, $\log$ の性質の話である。(1) は $a = re^{i\theta}$ とするとき、 z を r, θ で具体的に表せば良い。

80. $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$ について、以下のものを求めよ。(a) 0 のまわりの Laurent 展開 (b) 2 のまわりの Laurent 展開 (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$ における Laurent 展開

81. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ について、以下のものを求めよ。(a) $D(0; 1)$ における Taylor 展開 (b) $A(0; 1, 2)$ における Laurent 展開 (c) $A(0; 2, \infty)$ における Laurent 展開

82. $f(z) = \frac{1-e^{z^2}}{z^4}$ を 0 のまわりで Laurent 展開せよ。

83. $f(z) := \frac{z^2+1}{(z+1)(2z-1)}$ について、以下の問に答えよ。

(1) 0 のまわりの Taylor 展開を求めよ。 (2) $1/2 < |z| < 1$ における Laurent 展開を求めよ。 (3) $1 < |z| < \infty$ における Laurent 展開を求めよ。

留数

84. 次の用語・記号の定義を述べよ。(1) 区分的に滑らかな曲線 (2) 単純曲線 (3) 閉曲線 (4) 領域 (5) $\mathbb{C}$ の部分集合 D に対する $\bar{D}$ (6) 正の向き

85. 留数定理を書き、例を 1 つあげよ。

86. $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $\Omega := D(c; R)$, $P: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ と $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とするととき、以下の問に答えよ。

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}) P^{(n)}(c) = 0$ ならば P は定数関数であることを示せ。

(2) $(\exists k \in \mathbb{N}) P(c) = P'(c) = \cdots = P^{(k-1)}(c) = 0$, $P^{(k)}(c) \neq 0$ が成り立つならば、 Ω で正則な関数 P_1 で、 $P(z) = (z - c)^k P_1(z)$ ($z \in \Omega$) を満たすものが存在することを示せ。また、このとき $P_1(c)$ の値を P, k, c で表わせ。

(3) P が (2) の仮定を満たすとき、 $f := \frac{Q}{P}$ は c を高々 k 位の極とすること (特に $Q(c) \neq 0$ であれば k 位の極) とすることを示せ (c が高々 k 位の極とは、 k 以下の自然数 k' が存在して c は k' 位の極であるか、または c は f の除去可能特異点であることをいう)。

(1), (2) は正則関数の冪級数展開可能性からすぐ分かる。(3) は (2) を用いる。(1), (2), (3) の順に難しくなる? この (3) をきちんと覚えて使えるようになることがとても重要。

87. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^3}$ のとき、 $\text{Res}(f; 0)$, $\text{Res}(f; 1)$, $\text{Res}(f; 2)$ を求めよ。

88. 次の各関数の極とその位数、その点における留数を求めよ。

(1) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ (2) $f(z) = \frac{1+z}{(z^2 + a^2)^2}$ (a は複素数の定数) (3) $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$

89. c が f の高々 k 位の極であれば、 $n \geq -k$ を満たす任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$a_n = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n+k} \left[(z-c)^k f(z) \right]$$

が成り立つことを示せ。ただし a_n は Laurent 展開の係数: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ ($0 < |z-c| < \varepsilon$)。

90. $\text{Res}(f; c) = a_{-1}$ とするとき、次のものを求めよ ($\text{Res}(f; c)$ は f について線型であることに注意)。

(1) $\text{Res}(f(z) + \cos z; c)$ (2) $\text{Res}(3f(z); c)$

91. f は $0 < |z| < R$ で正則で、

$$f(-z) = f(z) \quad (0 < |z| < R)$$

を満たすとするとき、 $\text{Res}(f; 0) = 0$ であることを示せ。

92. c は f の **1 位の極** で $\text{Res}(f; c) = a_{-1}$ とする。また φ は c の近傍で正則とする。このとき $\text{Res}(\varphi(z)f(z); c)$ を求めよ。

93. (1) $\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ の極とその位数、留数を求めよ。 (2) $c \in \mathbb{C}$ が複素関数 f の 1 位の極、 g は c の近傍で正則とするとき、 $\text{Res}(fg; c) = g(c) \text{Res}(f; c)$ を示せ。 (3) $\int_{|z|=5/2} z^2 \pi \cot \pi z \, dz$ を求めよ。