複素関数練習問題 No.5

桂田 祐史

2014年11月25日

このところ理論的な話が多かったので、問題が出しづらかったけれど、もうすぐたくさん問題が出せるようになるはずです。

初等関数

56. (宿題にしたもの) 以下の方程式を ($\mathbb{C}$ 内で) 解け (解を書くのは簡単なものが多いが、漏れがないことが分かるように解くこと)。
(1) $e^z=1$ (2) $e^z=-1$ (3) $e^z=1+\sqrt{3}i$ (4) $\sin z=0$ (5) $\sin z=2$

ヒント: (1),(2),(3) は複素関数の log を使っても良いし、$\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$ を用いて、実関数 e^x, $\cos y$, $\sin y$ の話に持ち込んでも良い。(後者の方が後々忘れにくいとは思うけれど、どちらでもよい。) (4) と (5) は e^{iz} の話に持ち込む。

57. (逆三角関数、逆双曲線関数は、$\sqrt{\ }$ や log を使って表せることを理解するための問題)

(1) $w\in\mathbb{C}$ が与えられたとき、$w=\sinh z$ を満たす z を求めよ (w で表せ)。ただし $\sinh z:=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ とする。(arcsinh という記号は用いず、四則と $\sqrt{\ }$ で表すこと。)

(2) $w\in\mathbb{C}$ が与えられたとき、$w=\sin z$ を満たす z を求めよ。(arcsin や $\sin^{-1}$ という記号は用いず…)

(3) $w\in\mathbb{C}$ が与えられたとき、$w=\tan z$ を満たす z を求めよ。(arctan や $\tan^{-1}$ という記号は用いず…)

線積分

(実際には、正則関数の線積分が良く出て来るけれど、それらは Cauchy の積分定理や、それに基づく積分路の変形、Cauchy の積分公式、さらには留数定理を使って計算することが多い。ここでは、線積分の定義に基づいて計算できる問題と、線積分の性質を理解するための問題 (つまり基本的なもの) を並べてみた。)

58.

(1) $r>0$, $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}$ (n で場合分けが必要)。

(2) $C\colon z=e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,\pi]$) とするとき、$\displaystyle\int_C\frac{1}{\overline{z}^2}dz$

(3) $C\colon z=(1+i)t$ ($t\in[0,1]$) とするとき、$I=\displaystyle\int_C\left(x-y+ix^2\right)dz$. ただし, $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ である。

(4) $-i$ から i に向かう線分を C とするとき、$\displaystyle\int_C |z|\,dz$

(5) 0, 1, $1+i$, i を頂点とする正方形の周を正の向きに 1 回まわる曲線を C とするとき、$\displaystyle\int_C |z|^2\ dz$ $\displaystyle\int_C\left(3z^2+iz-4\right)\ dz$

(宿題なので解答は発表済み。(3) は梶原 [1] に載っていた公務員試験の問題から。(4), (5) は小堀 [2] から。)

59. $f(z)=\overline{z}$ とするとき、次の曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ。

(1) 4 点 0, a, ib, $a+ib$ を頂点とする長方形の辺　(2) 原点中心、半径 r の円周

(教科書 p. 62 の例題である。a, b, r は正数のつもりだろうか？)

60. $\left|\displaystyle\int_C f(z)\ dz\right|\leq\displaystyle\int_C|f(z)|\,|dz|$ をこの講義の線積分の定義に基づき証明せよ。

(教科書に書いてある。)

61. f は円周 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ の近傍で連続な関数、$C\colon z=e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,\pi]$), $\Gamma\colon z=t+i\sqrt{1-t^2}$ ($t\in[-1,1]$) とするとき、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ と $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ の関係を述べよ。

(変数変換できれいに対応が付けられる。この問題が出来ると、線積分が向きを変えないパラメーター付けの変更によらないことが何となく分かる。)

62. $a,c\in\mathbb{C}$, $0<|a-c|<r$ とするとき、関数 $\dfrac{1}{z-a}$ は、円周 $|z-c|=r$ 上で

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}$$

と展開できることを示し (これは後で学ぶ Laurent 展開というものに相当するが、この場合は等比級数なので素朴にチェックできる)、それを利用して次の線積分の値を計算せよ。

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}.$$

($a=c$ ならば簡単だけど、そうでないならば、c のまわりに展開してしまえば何とかなりそう、という発想。講義ノートに書いておいた。「一様収束」というのが必要。)

参考文献

[1] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).

[2] 小堀憲：複素解析学入門, 朝倉書店 (1966).