複素関数練習問題 No.5

桂田 祐史

2014 年 11 月 25 日

このところ理論的な話が多かったので、問題が出しづらかったけれど、もうすぐたくさん問題が出せるようになるはずです。

初等関数

56. (宿題にしたもの) 以下の方程式を ($\mathbb{C}$ 内で) 解け (解を書くのは簡単なものが多いが、漏れがないことが分かるように解くこと)。
(1) $e^z = 1$　(2) $e^z = -1$　(3) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$　(4) $\sin z = 0$　(5) $\sin z = 2$

ヒント: (1),(2),(3) は複素関数の log を使っても良いし、$\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y)$ を用いて、実関数 e^x, $\cos y$, $\sin y$ の話に持ち込んでも良い。(後者の方が後々忘れにくいとは思うけれど、どちらでもよい。) (4) と (5) は e^{iz} の話に持ち込む。

57. (逆三角関数、逆双曲線関数は、$\sqrt{\ }$ や log を使って表せることを理解するための問題)

(1) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sinh z$ を満たす z を求めよ (w で表せ)。ただし $\sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ とする。(arcsinh という記号は用いず、四則と $\sqrt{\ }$ で表すこと。)

(2) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sin z$ を満たす z を求めよ。(arcsin や $\sin^{-1}$ という記号は用いず…)

(3) $w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \tan z$ を満たす z を求めよ。(arctan や $\tan^{-1}$ という記号は用いず…)

線積分

(実際には、正則関数の線積分が良く出て来るけれど、それらは Cauchy の積分定理や、それに基づく積分路の変形、Cauchy の積分公式、さらには留数定理を使って計算することが多い。ここでは、線積分の定義に基づいて計算できる問題と、線積分の性質を理解するための問題 (つまり基本的なもの) を並べてみた。)

58.

(1) $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n}$ (n で場合分けが必要)。

(2) $C\colon z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とするとき、$\displaystyle\int_C \frac{1}{\bar{z}^2} dz$

(3) $C\colon z=(1+i)t$ ($t\in[0,1]$) とするとき、$I=\displaystyle\int_C \left(x-y+ix^2\right)dz$. ただし, $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ である。

(4) $-i$ から i に向かう線分を C とするとき、$\displaystyle\int_C |z|\,dz$

(5) 0, 1, $1+i$, i を頂点とする正方形の周を正の向きに 1 回まわる曲線を C とするとき、$\displaystyle\int_C |z|^2\ dz$
$\displaystyle\int_C \left(3z^2+iz-4\right)\ dz$

(宿題なので解答は発表済み。(3) は梶原 [1] に載っていた公務員試験の問題から。(4), (5) は小堀 [2] から。)

59. $f(z)=\overline{z}$ とするとき、次の曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ。
(1) 4 点 0, a, ib, $a+ib$ を頂点とする長方形の辺　(2) 原点中心、半径 r の円周
(教科書 p. 62 の例題である。a, b, r は正数のつもりだろうか？)

60. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C |f(z)|\,|dz|$ をこの講義の線積分の定義に基づき証明せよ。
(教科書に書いてある。)

61. f は円周 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ の近傍で連続な関数、$C\colon z=e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,\pi]$), $\Gamma\colon z=t+i\sqrt{1-t^2}$ ($t\in[-1,1]$) とするとき、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ と $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ の関係を述べよ。
(変数変換できれいに対応が付けられる。この問題が出来ると、線積分が向きを変えないパラメーター付けの変更によらないことが何となく分かる。)

62. $a,c\in\mathbb{C}$, $0<|a-c|<r$ とするとき、関数 $\dfrac{1}{z-a}$ は、円周 $|z-c|=r$ 上で

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}$$

と展開できることを示し (これは後で学ぶ Laurent 展開というものに相当するが、この場合は等比級数なので素朴にチェックできる)、それを利用して次の線積分の値を計算せよ。

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}.$$

($a=c$ ならば簡単だけど、そうでないならば、c のまわりに展開してしまえば何とかなりそう、という発想。講義ノートに書いておいた。「一様収束」というのが必要。)

(一つ残っているけれど、そろそろ年末の家事が忙しいので、とりあえず)

56 の解答　(実関数としての指数関数と、複素関数としての指数関数を区別するため、前者を e^x, 後者を $\exp z$ と表す約束で書いてみる。 — ここだけのローカル・ルール)

(1) (log がどういうものかまだ知らない場合の解答) z の実部と虚部をそれぞれ x, y と表す。$\exp z = \exp(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$ で、$|\exp z| = e^x$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\exp z = 1 &\Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = 1\\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y + i \sin y = 1\\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y = 1 \quad \text{and} \quad \sin y = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{and} \quad (\exists n \in \mathbf{Z}) \quad y = 2n\pi\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbf{Z}) \quad z = 2n\pi i.\end{aligned}$$

(log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log 1$ は何か、という問題である。$1 = 1e^{i0}$ が 1 の極形式であるから

$$\log 1 = \log 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

(2) (log がどういうものかまだ知らない場合の解答) $\exp \pi i = -1$ であるから、

$$\begin{aligned}\exp z = -1 &\Leftrightarrow \exp z \exp \pi i = 1\\ &\Leftrightarrow \exp(z + \pi i) = 1\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbf{Z}) \quad z + \pi i = 2n\pi i\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbf{Z}) \quad z = (2n-1)\pi i.\end{aligned}$$

(log がどういうものか知っている場合の解答) 複素多価関数としての $\log(-1)$ は何か、という問題である。$-1 = 1e^{i\pi}$ が -1 の極形式であるから

$$\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

(3) この問題は **47** でやった。

(4) この問題も **47** でやった。

57 の解答

(1) $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ であるから、$Z := e^z$ とおくと、$w = \dfrac{Z - 1/Z}{2}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2wZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = w \pm \sqrt{w^2+1}.$$

(そういえば、まだ $\sqrt{\ }$ の多価性の取り扱いの話をしていなかった、1 月に説明できるかなあ…) $z = 0$ のとき、$Z = e^z = 1$, $w = \sinh z = 0$ であるので、$w = 0$ の十分小さな近傍に対して $Z = 1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1} = 1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合は $Z = w - \sqrt{w^2+1}$ は不適で、$Z = w + \sqrt{w^2+1}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = w + \sqrt{w^2+1}.$$

これから

$$z = \log Z = \log\left(w + \sqrt{w^2+1}\right).$$

(log は多価だから、1 つの w に複数の w が対応することが分かる。)

(2) (上とほぼ同様で) $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ であるから、$Z := e^{iz}$ とおくと、$w = \dfrac{Z-1/Z}{2i}$. これから 2 次方程式 $Z^2 - 2iwZ - 1 = 0$ を得る。ゆえに

$$Z = iw \pm \sqrt{1-w^2}.$$

$z=0$ のとき、$Z = e^{iz} = 1$, $w = \sin z = 0$ であるので、$w=0$ の十分小さな近傍に対して $Z=1$ の近傍が対応する。1 の十分近くでは $\sqrt{1}=1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合は $Z = iw - \sqrt{1-w^2}$ は不適で、$Z = iw + \sqrt{1-w^2}$ を採用しなければならない。(今のところ青字は読み飛ばしても良い。) ゆえに

$$Z = iw + \sqrt{1-w^2}.$$

これから

$$iz = \log Z = \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

ゆえに

$$z = -i\log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

(3) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\dfrac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = -i\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$ であるから、$Z := e^{iz}$ とおくと、

$$w = -i\frac{Z-1/Z}{Z+1/Z} = -i\frac{Z^2-1}{Z^2+1}.$$

これは Z^2 についての 1 次方程式で、解は $Z^2 = \dfrac{1+iw}{1-iw}$. これから

$$Z = \sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}}.$$

上と同様に、$w=0$ の十分小さな近傍に $Z=1$ の近傍が対応するようにするには、$\sqrt{1}=1$ となるように $\sqrt{\ }$ の分枝を定めた場合、$Z = -\sqrt{\dfrac{1+iw}{1-iw}}$ は不適である。

$$iz = \operatorname{Log} Z = \log\sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}} = \frac{1}{2}\left(\log(1+iw) - \log(1-ix)\right).$$

ゆえに

$$z = \frac{i}{2}\left(\log(1-iw) - \log(1+iw)\right).\blacksquare$$

少しもやもやしたところは残るが、現時点で分かったことを整理してみると、

- 指数関数、三角関数、双曲線関数は、実関数を自然に複素関数に拡張できる。それら間に成り立つ関係式などは、複素関数でもそのまま成り立つ。

- おそらく

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} w &= \log\left(w+\sqrt{w^2+1}\right),\\
\arcsin w &= -i\log\left(iw+\sqrt{1-w^2}\right),\\
\arctan w &= \frac{i}{2}\left(\log(1-iw)-\log(1+iw)\right)
\end{aligned}$$

  と定義することになるのだろう。

- 指数関数、三角関数、双曲線関数の逆関数も複素関数に拡張できるが、多価性を持つ (のが普通であるらしい)。

- 対数関数は既に一定のレベルで解決している。

- 逆三角関数、逆双曲線関数は、対数関数と (補助的に) $\sqrt{\ }$ を用いて表示できる (らしい、全部確かめたわけではないが)。

- — ということは、対数関数の多価性 (これは既にはっきりわかっている) と $\sqrt{\ }$ の多価性が良く分かれば、逆三角関数と逆双曲線関数の多価性も理解できそうだ。

58 の解答

(1) $|z-a|=r$ (正の向きに一周) は、$z=a+rr^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とパラメーター付けできる (始点=終点がどこか、指定していないが、閉曲線の場合は、それも線積分には影響しない)。

$\dfrac{dz}{d\theta}=ire^{i\theta}$ であるから、

$$I:=\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^n}\cdot ire^{i\theta}d\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d\theta.$$

$n\neq 1$ のとき、

$$I=\frac{i}{r^{n-1}}\left[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\right]_0^{2\pi}=0.$$

($e^{(1-n)i\theta}$ は θ につき周期 2π なので、値を求める必要もなく、$\theta=0,2\pi$ で同じ値であることから $I=0$ と分かる。)

$n=1$ のとき、

$$I=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

注意: $n\neq 1$ ならば、$\dfrac{1}{(z-a)^n}=(z-a)^{-n}$ は $\dfrac{1}{1-n}(z-a)^{1-n}$ という原始関数を持つので、閉曲線に沿う積分は 0 と分かる。$n=1$ のときは、真面目に計算するので良いかも。

(2) $z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とすると、$\overline{z}^2=\left(e^{-i\theta}\right)^2=e^{-2i\theta}$, $\dfrac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$.

$$\int_C\frac{1}{\overline{z}^2}dz=\int_0^{\pi}\frac{1}{e^{-2i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}d\theta=\frac{i}{3i}\left[e^{3i\theta}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\left(e^{3i\theta}-e^0\right)=\frac{-1-1}{3}=-\frac{2}{3}.$$

(別解) C 上では $\overline{z}=e^{-i\theta}=\dfrac{1}{z}$ であるから、$\dfrac{1}{\overline{z}^2}=z^2$. これは原始関数を持つので簡単に積分が計算できる。

$$\int_C \frac{1}{\overline{z}^2}dz=\int_C z^2\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1}=-\frac{2}{3}.$$

(3) $z=(1+i)t=t+it$ ($t\in[0,1]$) とするとき、$x=\operatorname{Re}z=t$, $y=\operatorname{Im}z=t$, $\dfrac{dz}{dt}=1+i$ であるから、

$$\int_C\left(x-y+ix^2\right)dz=\int_0^1\left(t-t+it^2\right)\cdot(1+i)dt=(i-1)\int_0^1 t^2\,dt=\frac{i-1}{3}.$$

(この問題は工夫のしようが思い付かない。)

(4) $-i$ から i に向かう線分は $z=-i+t(i-(-i))=-i+2it$ ($t\in[0,1]$) とパラメーター付けできる。$|z|=|2t-1|$, $\dfrac{dz}{dt}=2i$. (積分は区間を $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ に分割して計算しても良いし、$t\mapsto|2t-1|$ のグラフを描いて、$\displaystyle\int_0^1|2t-1|\,dt=\frac{1}{2}$ と読んでも良い。)

$$\int_C|z|\,dz=\int_0^1|2t-1|\cdot 2i\,dt=2i\int_0^1|2t-1|\,dt=2i\cdot\frac{1}{2}=i.$$

(5) 図は黒板に描いたもので (今自宅でスキャンできないので面倒くさい)。正方形の各辺を Γ と同じ向きに進む曲線を Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 とすると、

$$I:=\int_\Gamma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^4\int_{\Gamma_j}f(z)\,dz.$$

- Γ_1: $z=t$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=1$, $|z|=t$.
- Γ_2: $z=1+it$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=i$, $|z|=\sqrt{1+t^2}$.
- Γ_3: $z=(1+i)-t=(1-t)+i$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=-1$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2+1}$.
- Γ_4: $z=i-it=i(1-t)$ ($t\in[0,1]$). $\dfrac{dz}{dt}=-i$, $|z|=\sqrt{(1-t)^2}=1-t$.

ゆえに

$$\begin{aligned}I&=\int_\Gamma|z|^2\,dz=\int_0^1\left(t^2\cdot 1+(1+t^2)\cdot i+\left[(1-t)^2+1\right]\cdot(-1)+(1-t)^2\cdot(-i)\right)dt\\&=\int_0^1\left[2(1+i)t-2\right]dt=2(1+i)\frac{1}{2}-2\cdot 1=i-1.\end{aligned}$$

$3z^2+iz-4$ は多項式で ($z^3+\dfrac{i}{2}z^2-4z$ という) 原始関数を持つので、閉曲線に沿う積分は 0 である。

$$\int_\Gamma\left(3z^2+iz-4\right)dz=0.$$

Mathematica でいいかげんな検算

(1) は r とか入っているし ($r=1$ とかしてみる手はある)、場合分けもあるし ($n=1$ みたいなのは (わざと) 無視するという Mathematica 流のズボラをやってくれる)、そのままでは簡単に計算してくれないが、(2),(3),(4),(5) はすぐ計算してくれる。
$\int_C f(z)dz$, $C\colon z=\varphi(t)$ ($t\in[a,b]$) を計算する 1 行関数 `li[]` を定義して、放り込んでみる。

```
li[fz_,phit_,a_,b_]:=Integrate[(fz/. z->phit)D[phit,t],{t,a,b}]

fz=Re[z]-Im[z]+I Re[z]^2
li[fz,t+I t,0,1]

fz=1/Conjugate[z]^2
li[fz,Exp[I t],0,Pi]

fz=Abs[z]
li[fz,-I+2I t,0,1]

fz=Abs[z]^2
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1] +
 li[fz, (1 - t) + I, 0, 1] +
 li[fz, I (1 - t), 0, 1]

fz=3z^2+I z-4
li[fz, t, 0, 1] + li[fz, 1 + I t, 0, 1] +
 li[fz, (1 - t) + I, 0, 1] +
 li[fz, I (1 - t), 0, 1]
```

一応、上の手計算の結果と一致したので、多分大丈夫。

59 の解答　教科書 p. 62 を見て下さい。

60 の解答　(この命題の証明は、式変形だけを追えば短く書けるが、個々の式変形が出来る理由は慎重に考えないと理解しづらいと思われるので、以下ではゆっくり説明する。)

$\int_C f(z)\,dz=0$ ならば、証明すべき不等式の左辺が 0, 右辺が 0 以上であるから、不等式は成り立つ。以下では $\int_C f(z)\,dz\neq 0$ とする。$\theta:=\operatorname{Arg}\int_C f(z)\,dz$ とおくと [1]

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz.$$

この右辺は実数であるから、それ自身の実部に等しい:

$$e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz=\operatorname{Re}e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz.$$

[1] 一般に $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して、θ を z の偏角とすると、$z=|z|r^{i\theta}$ であるから、$|z|=ze^{-i\theta}$.

積分の線形性により $e^{-i\theta}$ は $\int$ の内側に入れられる。

$$\operatorname{Re} e^{-i\theta}\int_C f(z)\,dz = \operatorname{Re}\int_C e^{-i\theta} f(z)\,dz.$$

C のパラメーター付けを $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると、

$$\operatorname{Re}\int_C e^{-i\theta} f(z)\,dz = \operatorname{Re}\int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

複素数値関数 $F\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ の積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(t)\,dt$ の定義から、積分の実部は、非積分関数の実部の積分である。

$$\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)\,dt.$$

任意の複素数 c に対して、$\operatorname{Re} c\le |c|$ であるから、

$$\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)\,dt \le \int_\alpha^\beta \left|e^{-i\theta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\right|\,dt = \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\left|\varphi'(t)\right|\,dt = \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

(最後の等号は、$\int_C |f(z)|\,|dz|$ の定義である。) 以上まとめて

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$$

を得る。 ■

この証明は結構技巧的で、すんなり思いつく人は少ないと思います (今回、久しぶりで思い出せなかった…)。証明が書いてあるテキストには、だいたいどれも同じような証明が載っているようです。今回は Ahlfors [3] を参考にしました。もっと簡単な証明があれば知りたいものです。

61 の解答　(60 でちょっとくたびれたので後回し。)

62 の解答　z が $|z-c|=r$ を満たすとき、$\left|\dfrac{a-c}{z-c}\right| = \dfrac{|a-c|}{r} < 1$ であるから、

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-c)-(a-c)} = \frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{a-c}{z-c}} = \frac{1}{z-c}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{a-c}{z-c}\right)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

さらにこの収束は円周 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|=r\}$ 上で一様である。実際、$M_n := \dfrac{|a-c|^n}{r^{n+1}}$ とおくと、

- $\left|\dfrac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}\right| \le M_n.$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty M_n = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-|a-c|/r}$ (収束).

であるから、Weierstrass の M-test により一様収束する。従って項別積分できるので

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a} = \int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^\infty\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz = \sum_{n=0}^\infty\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz = \sum_{n=0}^\infty (a-c)^n\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}.$$

既に見たように (**58** (1))

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{(z-c)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

であるから、

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \blacksquare$$

参考文献

[1] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).

[2] 小堀憲：複素解析学入門, 朝倉書店 (1966).

[3] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).