

複素関数練習問題 No.4

桂田 祐史

2014 年 10 月 28 日

冪級数 (2)

38. (宿題にしたもの) 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (z-1)^n$$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ は冪級数である (そうみなせる) が、収束半径が 1 であることを示せ。

(d'Alembert の公式は使えないが、素朴に考えれば案外やさしい (今の場合、収束半径 = 1 が提示されているので考えやすい)。もちろん Cauchy-Hadamard の公式 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$ を使っても良い。その場合、上極限をきちんと理解した上で、値を計算すること。)

40. (教科書の演習問題 p. 46) 以下の冪級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} z^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 z^n$ の収束半径を求めよ。

42. (1) 任意の自然数 k に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ を示せ。 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ を示せ。

(Cauchy-Hadamard の公式の利用は特に推奨しないが、用いるためには、いくつか準備をしておくが良い。)

43. 次の冪級数はいずれも収束半径が 1 であるが、収束円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上の点での収束・発散を調べよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

((2) が解けるようになって欲しい。この問題を解く場合に限らず「 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束 $\Leftrightarrow \alpha > 1$ 」は忘れないこと (解析学の常識)。(3) は Abel の級数変形法を使う。)

44. 収束冪級数について“係数比較”が可能なこと、つまり $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ と $\{b_n\}_{n \geq 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (|z-c| < r)$$

が成り立てば、 $a_n = b_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であることを示せ。

45. e^z , $\cos z$, $\sin z$ を冪級数で定義するとき、 $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ を確かめよ。

46. $z \in \mathbb{C}$ に対して $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

47. (1) $\sin z = 0$ を解け。 (2) $\sin z = 2$ を解け。

48. $\cos z$, $\sin z$ の加法定理を証明せよ。

49. 次の冪級数の和を求めよ ($\sum_{n=0}^{\infty}$ を用いずに表せ)。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ (結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ が求まる。)

50. (1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\frac{1}{z+4}$ (b) $\frac{1}{(z-i)^2}$ (c) $\frac{1}{z^2+1}$ (d) $\frac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$

((b) は微分 or 積分を考えてみる。(d) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\frac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

51. $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ($|z| < 1$), $f(0) = 0$ を満たす f を冪級数を用いて求めよ。

次は冪級数の問題ではないが、その次の問題で用いるので、ここに入れておく (もっと前にやっておくべきだった — でも関数論のテキストで、あまり見ない問題のような気がする)。実関数の場合、平均値の定理を用いて証明するのが普通であるが、複素関数では平均値の定理は成り立たない。

52. Ω は $\mathbb{C}$ の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則で、任意の $z \in \Omega$ に対して、 $f'(z) = 0$ が成り立つならば、 f は定数関数であることを示せ。

53. (1) $f(z) = e^z$ が $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ を満たすことを用いて、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、 $f(z)f(c-z) = f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $e^a e^b = e^{a+b}$ であることを示せ。

(式変形による (2) の証明も知られているが、(1) から導ける。)

一様収束

収束の問題は、あまりうるさく言わないことにするが (定理の証明はきちんと講義し、それを理解するよう努力してもらうが、試験でそういう問題の比重は高くしない)、理解の手助けのために。

54. $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x < -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 1 & (x > \frac{1}{n}) \end{cases}$$

で $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定めるとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。 $\{f_n\}$ は一様収束するかどうか (根拠をつけて) 答えよ。

55. $K = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in K$) とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x \in K$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。(2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は K では一様収束しないが、 $0 < R < 1$ なる任意の R に対して、 $[0, R]$ では一様収束することを示せ。