複素関数練習問題 No.4

桂田 祐史

2014 年 10 月 28 日, 解答の訂正 2015 年 1 月 21 日

冪級数 (2)

38. (宿題にしたもの) 次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(z-1)^n$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ は冪級数である (そうみなせる) が、収束半径が 1 であることを示せ。
(d'Alembert の公式は使えないが、素朴に考えれば案外やさしい (今の場合、収束半径 $=1$ が提示されているので考えやすい)。もちろん Cauchy-Hadamard の公式 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\rho}$ を使っても良い。その場合、上極限をきちんと理解した上で、値を計算すること。)

40. (教科書の演習問題 p. 46) 以下の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}z^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 z^n$ の収束半径を求めよ。

42. (1) 任意の自然数 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$ を示せ。 (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ を示せ。
(Cauchy-Hadamard の公式の利用は特に推奨しないが、用いるためには、いくつか準備をしておくと良い。)

43. 次の冪級数はいずれも収束半径が 1 であるが、収束円周 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ 上の点での収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

((2) が解けるようになって欲しい。この問題を解く場合に限らず「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$」は忘れないこと (解析学の常識)。(3) は Abel の級数変形法を使う。)

44. 収束冪級数について "係数比較" が可能なこと、つまり $c\in\mathbb{C}$, $r>0$, 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と $\{b_n\}_{n\geq 0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n \quad (|z-c|<r)$$

が成り立てば、$a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ であることを示せ。

45. e^z, $\cos z$, $\sin z$ を冪級数で定義するとき、$(e^z)'=e^z$, $(\cos z)'=-\sin z$, $(\sin z)'=\cos z$ を確かめよ。

46. $z \in \mathbb{C}$ に対して $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。

47. (1) $\sin z = 0$ を解け。　(2) $\sin z = 2$ を解け。

48. $\cos z$, $\sin z$ の加法定理を証明せよ。

49. 次の冪級数の和を求めよ ($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ を用いずに表せ)。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$　(結局、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ が求まる。)

50. (1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\dfrac{1}{z+4}$　(b) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$　(c) $\dfrac{1}{z^2+1}$　(d) $\dfrac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z + 6}$

((b) は微分 or 積分を考えてみる。(d) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

51. $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$　$(|z| < 1)$, $f(0) = 0$ を満たす f を冪級数を用いて求めよ。

次は冪級数の問題ではないが、その次の問題で用いるので、ここに入れておく (もっと前にやっておくべきだった — でも関数論のテキストで、あまり見ない問題のような気がする)。実関数の場合、平均値の定理を用いて証明するのが普通であるが、複素関数では平均値の定理は成り立たない。

52. Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則で、任意の $z \in \Omega$ に対して、$f'(z) = 0$ が成り立つならば、f は定数関数であることを示せ。

53. (1) $f(z) = e^z$ が $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ を満たすことを用いて、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、$f(z)f(c-z) = f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $e^a e^b = e^{a+b}$ であることを示せ。

(式変形による (2) の証明も知られているが、(1) から導ける。)

一様収束

収束の問題は、あまりうるさく言わないことにするが (定理の証明はきちんと講義し、それを理解するよう努力してもらうが、試験でそういう問題の比重は高くしない)、理解の手助けのために。

54. $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x < -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}) \\ 1 & (x > \frac{1}{n}) \end{cases}$$

で $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定めるとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。$\{f_n\}$ は一様収束するかどうか (根拠をつけて) 答えよ。

55. $K = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$, $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, x \in K)$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x \in K$ とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K では一様収束しないが、$0 < R < 1$ なる任意の R に対して、$[0, R]$ では一様収束することを示せ。

38 解答

(1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

これが収束半径である。収束円は $D(0;1)$.

(2) $a_n = n!$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

これが収束半径である。収束円は $\emptyset$.

(3) これは宿題にして、そちらで解説したので後回し。結果だけ書いておくと、収束半径は ∞ で、収束円は $\mathbb{C}$.

(4) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{2}$. 収束円は $D(1;1/2)$.

39 の解答　この冪級数を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と書くと、

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = k! \text{ となる } k\in\mathbb{N} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。($k = 1,2,3,4,5,6,\cdots$ とするとき、$k! = 1,2,6,24,120,720,\cdots$ であるから、$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = a_8 = \cdots = a_{23} = 0$, $a_{24} = 1$, $\ldots$.)

任意の自然数 n に対して、$a_{n!} = 1$ であるから、

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists m\in\mathbb{N}: m\ge n)\quad a_m = 1$$

が成り立つ ($m = n!$ とすれば良い)。特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ではない。ゆえにこの冪級数は $z = 1$ で収束しない (実際、一般項 $a_n z^n = a_n$ は 0 に収束しないから)。

一方、$|z| < 1$ とするとき、

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n \le 1\cdot|z|^n = |z|^n.$$

$b_n := |z|^n$ とおくと、$\{b_n\}$ は $\{a_n z^n\}$ の優級数で、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

以上から、収束半径は 1 である。■

Cauchy-Hadamard の公式を使う証明は、次の (2) の解答を参考にしよう。

40 の解答

(1) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1))!}{[(n+1)!]^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)^2} = 4.$$

収束半径は 4.

(2) これは **39** と同様にして解ける (そのあらすじ: $z=1$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$ は成り立たないので、$z=1$ で収束しないが、$|z|<1$ を満たす任意の z に対して $|a_n z^n| \le n|z|^n$ $(n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ で、$\sum_{n=0}^{\infty} n|z|^n$ は収束するので、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する。以上から収束半径は 1.)。ここでは Cauchy-Hadamard の公式を使って解答してみる。

この冪級数の n 次の係数を a_n とする (すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が成り立つとする) と、

$$a_n = \begin{cases} n & (\exists k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ゆえに

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & (\exists k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ s.t. } n = 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これから $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (証明: $\sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{n}$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 一方 $\forall\varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、$n := 2^k$ とおくと $n \ge k$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} > 1-\varepsilon$ であるから、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$.) ゆえに収束半径は $1/1 = 1$.

(3) $a_n := \dfrac{\log n}{n}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}\frac{n+1}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log n}{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1+\dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}} = 1\cdot\frac{1}{1+0/\infty} = 1. \end{aligned}$$

(4) おっと、これは **39** と同じだ (笑)。■

41 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ は $\zeta = z^2$ とおくと、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$ となるので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$|\zeta| < \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n \text{ 収束}, \qquad |\zeta| > \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n \text{ 発散}.$$

ゆえに

$$|z^2| < \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束}, \qquad |z^2| > \rho \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

すなわち

$$|z| < \sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 収束}, \qquad |z| > \sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n} \text{ 発散}.$$

したがって $\sqrt{\rho}$ が収束半径である。

後半は Cauchy-Hadamard 使わないとちょっと難しいかな。使わせてもらう。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が ρ であることから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

正数 r に対して、$\sqrt[n]{r^2} = \left(r^2\right)^{1/n} = \left(r^{1/n}\right)^2$ であるから、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^2|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

従って収束半径 ρ' は $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{1}{\rho'}$ より $\rho' = \rho^2$. ■

42 の解答

(1) 講義ノートの §C.1.4 に書いてある。

(2) 階乗 (より一般にはガンマ関数) を近似するスターリングの公式 (Stirling's approximation, Stirling's formula)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

(この意味は、$n \to \infty$ のとき $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \to 1$ ということ) を知っていれば直接証明するのは簡単だけど、微積分で習ったかな…

というわけで、スターリングの公式を使わないでやってみよう。冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

を考える。この冪級数の収束半径は、$a_n := n!$ とおくとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

であることから 0 である。Cauchy-Hadamard の公式から

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ は単調増加数列である。実際

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{n(n+1)} = \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n\cdot(n!)^n}{n!\cdot(n!)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdots\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{1} > 1$$

であるから、$\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} > \sqrt[n]{|a_n|}$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty. \blacksquare$$

43 解答

(1) 一般に、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを思い出そう。$a_n = z^n$ についてこれを用いる。

$|z| = 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z^n| = 1$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ は成り立たない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は収束しない。

(2) $M_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

- $|z| = 1$ を満たす任意の z と、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2} \le M_n$. (等号が成り立つけれど、定理にあてはめるため、不等号で書いてみた。どちらで書いても間違いではない。)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する (これは常識、和が $\pi^2/6$ であることは忘れても、収束することは忘れてはいけない)。

Weierstrass の M-test (という定理) により、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は $|z|=1$ で一様に絶対収束する。

(3) 結果だけ先に書いておくと、$z=1$ では発散、$|z|=1$ かつ $z \neq 1$ では収束する。

$|z|=1$ とするとき、$\left|\dfrac{z^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は絶対収束しない。だから微妙なケースである。$z=1$ では ($\dfrac{z^n}{n} = \dfrac{1}{n}$ なので) 収束しないが、$z=-1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

はいわゆる交代級数に関する Leibniz の定理により収束することが分かる (実は和は $-\log 2$)。2014/12 の時点ではまだ講義していないが、Abel の級数変形法を用いると、$|z|=1$, $z \neq 1$ を満たす任意の z に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束することを示せる。講義ノートにはもう書いてある。1 月に時間的余裕が残っていれば、Abel の級数変形法について講義する予定である。■

44 の解答　$|z-c|<r$ を満たす z に対して、$f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$ とおくと、$f\colon D(c;r) \to \mathbb{C}$ は正則で、冪級数の項別微分定理から、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

が得られる。これは $\{b_n\}$ についても同じで

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

ゆえに任意の n に対して $a_n = b_n$. ■

45 の解答 (1/3 だけ)　どれでも同じだから、一つだけやっておく。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

である。$n \in \mathbb{N}$ のとき $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n=0$ のとき $(z^n)' = (1)' = 0$ であるので

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z.■$$

46 の解答　冪級数展開

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

を使って証明する。(こういう問題は何を使ってよいかで解答の仕方が異なるので、本当は問題文にそれを書かないといけない。一致の定理を使って証明せよ、という問題もあり得る。)

k を整数とするとき、

$$i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

であるから

$$i^n+(-i)^n=[1+(-1)^n]\,i^n=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ 2\cdot i^n & (n\text{ が偶数})\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ (-1)^k 2 & (n\text{ が偶数}, n=2k),\end{cases}$$

$$i^n-(-i)^n=[1-(-1)^n]\,i^n=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ 2\cdot i^n & (n\text{ が奇数})\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ (-1)^k 2i & (n\text{ が奇数}, n=2k+1).\end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n+(-i)^n}{2}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cos z,$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n-(-i)^n}{2i}\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin z.\blacksquare$$

47 の解答 $\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ (前の問題に出て来た $\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ の兄弟) を導き、それを使って解く方法もあるけれど、前問の関係式を使うのが簡単だろう。$e^z=1$ の解が $z=2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$ であることは (授業で説明したし) 使ってよいが、それを導けと言われたら出来るようにしておくこと。

(1) $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin z=0 \quad&\Leftrightarrow\quad e^{iz}=e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow\quad e^{2iz}=1\\ &\Leftrightarrow\quad (\exists n\in\mathbb{Z})\quad 2iz=2n\pi i\\ &\Leftrightarrow\quad (\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=n\pi.\end{aligned}$$

ゆえに解は $z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(あるいは $w:=e^{iz}$ について $w-\frac{1}{w}=0$ から、$w^2-1=0$. これから $w=1$ または $w=-1$. 前者から $z=2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$, 後者から $z=(2m-1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$. まとめて $z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.)

(2) 途中で $w:=e^{iz}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\sin z=2 \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\\ &\Leftrightarrow\quad e^{iz}-e^{-iz}=4i\\ &\Leftrightarrow\quad w-\frac{1}{w}=4i\\ &\Leftrightarrow\quad w^2-4iw-1=0\\ &\Leftrightarrow\quad w=2i\pm\sqrt{(2i)^2-(-1)}=(2\pm\sqrt{3})i=(2\pm\sqrt{3})e^{\pi i/2}.\end{aligned}$$

ただし、2 次方程式の解の公式 ($a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ とするとき、$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が成り立つこと) を用いた。

$r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ とするとき、

$$e^z=re^{i\theta}\quad\Leftrightarrow\quad(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\log r+i(\theta+2n\pi)$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned}\sin z=2&\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad iz=\log\left(2\pm\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\\ &\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\quad z=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi-i\log\left(2\pm\sqrt{3}\right).\blacksquare\end{aligned}$$

48 の解答　任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して (途中で $w_1 := e^{z_1}$, $w_2 := e^{z_2}$ とおいて)

$$
\begin{aligned}
&\cos(z_1+z_2) - (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\
&\quad = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} - \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[w_1w_2 + \frac{1}{w_1}\frac{1}{w_2}\right] - \frac{1}{4}\left[\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right) + \left(w_1-\frac{1}{w_1}\right)\left(w_2-\frac{1}{w_2}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{4w_1w_2}\left(2w_1^2w_2^2 - (w_1^2+1)(w_2^2+1) - (w_1^2-1)(w_2^2-1)\right) \\
&\quad = \frac{1}{4w_1w_2}\left(2w_1^2w_2^2 - (w_1^2w_2^2+w_1^2+w_2^1+1) - (w_1^2w_2^2-w_1^2-w_2^2+1)\right) = 0
\end{aligned}
$$

より $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$. sin についても同様に出来る。■

49 の解答

(1) 公比が z の等比級数であるから、収束の条件は $|z| < 1$ で、そのとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

収束円は $D(0;1)$.

(2) (1) の冪級数を項別に微分したものであるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(-(z-1)^{-1}\right)' = (z-1)^{-2} = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

収束円は (1) と同じで $D(0;1)$.

(3) (2) の冪級数に z をかけたものになっている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

収束円は (2) と同じで $D(0;1)$.

(4) (3) の級数を項別微分して z をかけたものである。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n = z \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\right)' = z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = z\frac{(z-1)^2\cdot 1 - 2(z-1)\cdot z}{(z-1)^4} = z\frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3} = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

収束円は (3) と同じで $D(0;1)$. ■

(ちなみに Mathematica はこういう級数の和を計算してくれる。収束条件は表示してくれないが、簡略の検算にはなる。`Sum[n^2 z^n,{n,1,Infinity}]`) とすると $-\dfrac{z(1+z)}{(-1+z)^3}$ という結果を返す。

50 の解答　これは宿題 (問 5) を載せたもので、授業中に解説済みである。

51 の解答 $\dfrac{1}{1+z^2}$ は公比 $-z^2$ の等比級数の和の形をしているので

$$f'(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\quad(|z|<1).$$

項別微分してこれに等しくなる冪級数として (項別積分して得られる)

$$F(z):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

がある。この冪級数の収束半径は 1 である (項別微分で収束半径は変わらないので 1 としても良いし、ratio test をしても良い)。

$$f'(z)=F'(z),\quad f(0)=F(0)=0$$

であるから、$f=F$. すなわち

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}.\blacksquare$$

(上の議論は、導関数が恒等的に 0 ならば定数関数である、という事実を用いている。授業でその事実を説明するのに適当な場所で、うっかり説明し忘れて、後から説明をしたということがあった。念のため、というのが次の問題である。)

52 の解答 (1 変数の実関数の場合、平均値の定理を使って証明することが多いが、ベクトル値関数と同様、複素関数では平均値の定理は成り立たないので、少し慎重にやる必要がある。ここでは Cauchy-Riemann の方程式を用いて解く。)

f の実部、虚部をそれぞれ u, v とおくと、

$$f'(x+iy)=u_x(x,y)+iv_x(x,y),\quad u_x(x,y)=v_y(x,y),\quad u_y(x,y)=-v_x(x,y)$$
$$\left((x,y)\in\widetilde{\Omega}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+iy\in\Omega\right\}\right)$$

が成り立つ。$f'=0$ in Ω より

$$u_x=u_y=v_x=v_y=0\quad(\text{in }\widetilde{\Omega}).$$

ゆえに u,v は Ω で定数関数である。ゆえに $f=u+iv$ は定数関数である。 $\blacksquare$

53 の解答

(1) $F(z):=f(z)f(c-z)$ とおく。積の微分法と合成関数の微分法と仮定 $f'=f$ により

$$\begin{aligned}F'(z)&=(f(z)f(c-z))'=(f(z))'\cdot f(c-z)+f(z)\cdot(f(c-z))'=f'(z)f(c-z)+f(z)(-f'(c-z))\\&=f(z)f(c-z)-f(z)f(c-z)=0.\end{aligned}$$

ゆえに F は定数関数である。$F(0)=f(0)f(c)=1\cdot f(c)=f(c)$. ゆえに $F(z)\equiv f(c)$. すなわち $f(z)f(c-z)\equiv f(c)$.

(2) ((1) で言っているのは、$(\forall c\in\mathbb{C})$ $(\forall z\in\mathbb{C})$ $f(z)f(c-z)=f(c)$ ということである。)

任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して、$c=a+b$, $z=a$ とおくと、$c-z=b$ であるから、$f(a)f(b)=f(a+b)$. すなわち $e^a e^b=e^{a+b}$. $\blacksquare$

54 の解答　まず極限が何であるか述べる。$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

で定めると、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

(証明) $x > 0$ の場合、任意の正数 ε に対して、$Nx > 1$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する (アルキメデスの公理)。このとき $x > \dfrac{1}{N}$. $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x > \dfrac{1}{N} \geq \dfrac{1}{n}$ となるので、$f_n(x) = 1$. ゆえに $|f_n(x) - 1| = 0 < \varepsilon$. まとめると

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |f_n(x) - 1| < \varepsilon$$

が示せた。すなわち $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x)$.

同様にして $x < 0$ の場合に、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1 = f(x)$ であることが示せる。

$x = 0$ の場合、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = 0$ であるから、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

この収束は一様収束ではない。(証明) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

である。実際、

- 任意の $x > 0$ に対して、$0 < f_n(x) \leq 1 = f(x)$ であるから $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 1$. ゆえに $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$.
- 任意の正数 ε に対して、$\varepsilon' := \min\{\varepsilon, 1\}$, $x := \dfrac{\varepsilon'}{n}$ とおくと、$0 < x \leq \dfrac{1}{n}$ であるから $f_n(x) = nx = \varepsilon' \leq 1$, $f(x) = 1$ であるから、$|f_n(x) - f(x)| = 1 - \varepsilon'$. ゆえに $1 - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon' = |f_n(x) - f(x)| < 1$.

であるから $\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = 1$. ゆえに $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1$. ■

(この問題は数学解析を受講した人向けの参考問題です。)

55 の解答

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [0,1)) \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$.

(2) ($\{f_n\}$ が K 上で一様収束しないこと) もしも $\{f_n\}$ が K 上で一様収束するならば、その極限は (各点収束の極限と同じで) f である。各 f_n が K で連続である ($f_n(x) = x^n$ は多項式だから)。ゆえに f も K で連続となるはずだが、f は $1 \in K$ で不連続であるから矛盾である。

($0 < R < 1$ を満たす任意の R に対して $[0, R]$ で一様収束すること) $x \in [0, R]$ とするとき、$0 \leq x < 1$ であるので $f(x) = 0$. ゆえに $f_n(x) - f(x) = x^n - 0 = x^n$ であるから、$0 \leq f_n(x) - f(x) = x^n \leq R^n$. よって $\sup_{x\in[0,R]} |f_n(x) - f(x)| \leq R^n$. $0 < R < 1$ であるから、$n \to \infty$ のとき $R^n \to 0$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,R]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

これは $\{f_n\}$ が $[0, R]$ で一様収束することを意味する。■

(この問題も数学解析を受講した人向けの参考問題です。)