

複素関数練習問題 No.3

桂田 祐史

2014 年 10 月 14 日

複素数のきちんとした定義

意味が曖昧な「 $i^2 = -1$ を満たす数 i を考えて…」をやめて¹、何もないところに、一から演算を定義して、それがどういう条件を満たすのか一つ一つ調べる方が分かりやすくて良い。有名な Hamilton による $\mathbb{C}$ の定義の導入部分を自分の手で確かめてみよう。

28. $K := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ に

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

で加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を定義したとき、可換体の公理

- (i) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
- (ii) $(\exists 0_K \in K) (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a$
- (iii) $(\forall a \in K) (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
- (iv) $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
- (v) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (vi) $(\exists 1_K \in K) (\forall a \in K) \quad a \cdot 1_K = 1_K \cdot a = a$
- (vii) $(\forall a \in K \setminus \{0_K\}) (\exists a'' \in K) \quad a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1_K$
- (viii) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- (ix) $(\forall a, b \in K) \quad a \cdot b = b \cdot a$

が成り立つことを確かめよ。

(注: $\exists$ がついていて、 $0_K, a', 1_K, a''$ については、それが何か明らかにすると良い。可換体の公理に $0_K \neq 1_K$ も含める場合があるが、今の場合はこの条件も満足している。)

29. 代数学の適当なテキストを探して、可換環とその極大イデアルの定義、実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を学び、

$$I = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid (\exists q(x) \in \mathbb{R}[x]) p(x) = (x^2 + 1)q(x)\} \quad (\text{要するに } x^2 + 1 \text{ の倍数の全体})$$

が $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルであることを示せ。(すると剰余環 $\mathbb{R}[x]/I$ は体になるが、これを $\mathbb{C}$ の定義とすることが出来る。 — これは相当やる気がある人向けです。)

¹中学生・高校生は、文字 x を含む式において、 x は何かある実数を表していると考えて、実数について成り立つ演算ルールを適用して計算しているはず。実数でない数 i を考えて、それについて同じようにルールを適用して計算するのは、納得が行かないと感じるのは仕方がないと私は思います。

複素関数の実部・虚部, Cauchy-Riemann の関係式

30. (宿題 No.3 前半) 以下の各 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ を求めよ。

(a) $f(z) = z^3$ ($z \in \Omega := \mathbb{C}$) (b) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ($z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$) (c) $f(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ ($z \in \Omega := \mathbb{C}$)
(ヒントにはならないが、(c) の $f(z)$ は実は $\cos z$ であることが後で分かり、結果もそれなりに重要である。)

31. (宿題 No.3 後半) ある正則関数の実部、虚部をそれぞれ u, v とする。 u, v が C^2 級であることは認めて、

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

が成り立つことを示せ。

32. Ω が $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $|f(z)|$ は定数とすると、 $f(z)$ そのものが定数であることを示せ。(ヒント: 条件を u, v を用いて表す。)

33. Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とする。 C^1 級の $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たす v は、もし存在するならば、定数差を除いて一意的に定まる (2 つあったら、その差は定数という意味) ことを示せ。(以下はベクトル解析を学んでいる人向け) その場合に v を u を用いて表示する式を求めよ。

34. u は $\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された調和関数とする (u は C^2 級で $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たす)。この u に対して、 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ を満たす v が存在するとき、 v は u の共役調和関数であると言う。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) v は調和関数であることを示せ。(2) u は v の共役調和関数であるかどうか答えよ。

冪級数 (1)

35. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x > 0$), $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ などを用いて、以下の各関数の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。もとの関数と等しくなることの証明は (ここでは) 要求しない。— 微積分の復習

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) e^x (4) $(1+x)^\alpha$ (5) $\log(x+1)$ (6) $\arctan x$ ($\tan^{-1} x$ のこと)

36. (「数学解析」履修者向け。) (1) 収束列は有界であることを示せ。(2) Cauchy 列は有界であることを示せ。

(注意: 一般に収束列ならば Cauchy 列であるから、(2) だけ証明すれば良い、という割り切り方も出来るが、それは用いずに、定義から直接証明してみよう。「収束」「Cauchy 列」「(数列の) 有界」の定義を確認する主旨。)

37. r を複素数とすると、以下の問に答えよ。(場合分けすることになる。)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ を求めよ。(2) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ を求めよ。

(次のことは証明なしで使ってよい。 $r > 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$, $0 < r < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.)