複素関数練習問題 No.3

桂田 祐史

2014 年 10 月 14 日

複素数のきちんとした定義

意味が曖昧な「$i^2=-1$ を満たす数 i を考えて…」をやめて [1]、何もないところに、一から演算を定義して、それがどういう条件を満たすのか一つ一つ調べる方が分かりやすくて良い。有名な Hamilton による $\mathbb{C}$ の定義の導入部分を自分の手で確かめてみよう。

28. $K:=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ に

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

で加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を定義したとき、可換体の公理

(i) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

(ii) $(\exists 0_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a+0_K=0_K+a$

(iii) $(\forall a\in K)\ (\exists a'\in K)\quad a+a'=a'+a=0_K$

(iv) $(\forall a,b\in K)\quad a+b=b+a$

(v) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(vi) $(\exists 1_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a\cdot 1_K=1_K\cdot a=a$

(vii) $(\forall a\in K\setminus\{0_K\})\ (\exists a''\in K)\quad a\cdot a''=a''\cdot a=1_K$

(viii) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(ix) $(\forall a,b\in K)\quad a\cdot b=b\cdot a$

が成り立つことを確かめよ。

(注: $\exists$ がついている、0_K, a', 1_K, a'' については、それが何か明らかにすると良い。可換体の公理に $0_K\neq 1_K$ も含める場合があるが、今の場合はこの条件も満足している。)

[1] 中学生・高校生は、文字 x を含む式において、x は何かある実数を表していると考えて、実数について成り立つ演算ルールを適用して計算しているはずです。実数でない数 i を考えて、それについて同じようにルールを適用して計算するのは、納得が行かないと感じるのは仕方がないと私は思います。

29. 代数学の適当なテキストを探して、可換環とその極大イデアルの定義、実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を学び、

$$I = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; (\exists q(x) \in \mathbb{R}[x])\ p(x) = (x^2+1)q(x) \right\} \qquad (\text{要するに } x^2+1 \text{ の倍数の全体})$$

が $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルであることを示せ。(すると剰余環 $\mathbb{R}[x]/I$ は体になるが、これを $\mathbb{C}$ の定義とすることが出来る。 — これは相当やる気がある人向けです。)

複素関数の実部・虚部, Cauchy-Riemann の関係式

30. (宿題 No.3 前半) 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ を求めよ。

(a) $f(z) = z^3$ $(z \in \Omega := \mathbb{C})$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $(z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ $(z \in \Omega := \mathbb{C})$

(ヒントにはならないが、(c) の $f(z)$ は実は $\cos z$ であることが後で分かり、結果もそれなりに重要である。)

31. (宿題 No.3 後半) ある正則関数の実部、虚部をそれぞれ u, v とする。u, v が C^2 級であることは認めて、

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

が成り立つことを示せ。

32. Ω が $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$|f(z)|$ は定数とするとき、$f(z)$ そのものが定数であることを示せ。 (ヒント: 条件を u, v を用いて表す。)

33. Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とする。C^1 級の $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たす v は、もし存在するならば、定数差を除いて一意的に定まる (2 つあったら、その差は定数という意味) ことを示せ。(以下はベクトル解析を学んでいる人向け) その場合に v を u を用いて表示する式を求めよ。

34. u は $\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された調和関数とする (u は C^2 級で $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たす)。この u に対して、$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす v が存在するとき、v は u の共役調和関数であると言う。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) v は調和関数であることを示せ。 (2) u は v の共役調和関数であるかどうか答えよ。

冪級数 (1)

35. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0)$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ などを用いて、以下の各関数の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。もとの関数と等しくなることの証明は (ここでは) 要求しない。— 微積分の復習

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) e^x (4) $(1+x)^\alpha$ (5) $\log(x+1)$ (6) $\arctan x$ ($\tan^{-1} x$ のこと)

36. (「数学解析」履修者向け。) (1) 収束列は有界であることを示せ。 (2) Cauchy 列は有界であることを示せ。

(注意: 一般に収束列ならば Cauchy 列であるから、(2) だけ証明すれば良い、という割り切り方も出来るが、それは用いずに、定義から直接証明してみよう。「収束」「Cauchy 列」「(数列の) 有界」の定義を確認する主旨。)

37. r を複素数とするとき、以下の問に答えよ。 (場合分けすることになる。)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ を求めよ。 (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ を求めよ。

(次のことは証明なしで使ってよい。$r > 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$, $0 < r < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.)

28 解答　基本的に計算して確認するだけである。∃ のついているものは、何であるか書いておくと、

- $0_K = (0,0)$.
- a' は $a = (x,y)$ のとき $a' = (-x,-y)$.
- $1_K = (1,0)$.
- a'' は $a = (x,y)$ のとき $a'' = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

29 解答　これは話が長くなるので省略させてもらいます。

30 解答

(a) $f(x+iy) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ であるから $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$.

(b) $f(x+iy) = \dfrac{1}{(x+iy)^2+1} = \dfrac{1}{x^2+2ixy-y^2+1} = \dfrac{1}{(x^2-y^2+1)+2ixy} = \dfrac{(x^2-y^2+1)-2ixy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$ であるから、$u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$.

(c) 実は後で学ぶことだが、$f(z) = \cos z$ である。つまり複素関数としての cos の実部・虚部を求めよ、という問題である。

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right)$$
$$= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \sin x \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

であるから

$$u(x,y) = \cos x \cosh y, \quad v(x,y) = -\sin x \sinh y.$$

(Mathematica では、`ComplexExpand[(x+I y)^3]` のようにすると分かりやすく計算してくれる。)

31 解答　u, v はそれぞれ正則関数の実部・虚部であるから、

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann の方程式を満たす。C^2 級であることから、$v_{yx} = v_{xy}$, $u_{yx} = u_{xy}$ が成り立つので

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0. \blacksquare$$

32 解答　(これは講義ではやらなかった覚えがあるが、講義ノートにはもう書いてある。) f の実部虚部を u, v とするとき、$|f(x+iy)| = \sqrt{u(x,y)^2+v(x,y)^2}$ であるから、仮定より、$\exists C \in \mathbb{R}$

$$(\sharp) \qquad u(x,y)^2+v(x,y)^2 \equiv C.$$

もしも $C=0$ ならば $u(x,y)\equiv 0$, $v(x,y)\equiv 0$ であるから、$f(z)\equiv 0$ となり f は定数である。

以下 $C\neq 0$ とする。($\sharp$) から $2uu_x+2vv_x=0$, $2uu_y+2vv_y=0$ であるから、

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これからつねに $u_xv_y-v_xu_y=0$ が成り立つ。実際、もしも $u_x(a,b)v_y(a,b)-v_x(a,b)u_y(a,b)\neq 0$ となる点 (a,b) があれば、上の方程式の行列は逆行列を持つので $u(a,b)=v(a,b)=0$ が得られ、$C=0$ となり、矛盾する。Cauchy-Riemann 方程式から

$$u_xv_y-v_xu_y = u_xu_x-(-u_y)u_y = (u_x)^2+(u_y)^2, \quad u_xv_y-v_xu_y = v_yv_y-v_x(-v_x) = (v_x)^2+(v_y)^2$$

であるから、

$$(u_x)^2+(u_y)^2\equiv 0, \quad (v_x)^2+(v_y)^2\equiv 0.$$

これから $u_x\equiv u_y\equiv v_x\equiv v_y\equiv 0$. Ω は領域であるから、u, v は定数である。■

追記　某学生の宿題の答案 (途中で沈没していたけれど…) を見ていたら、次のような答を思いついた。$2uu_x+2vv_x=0$, $2uu_y+2vv_y=0$ を導くのは上と同じ。そこから Cauchy-Riemann の方程式を使って

$$uu_x-vu_u=0, \quad vu_x+uu_y=0.$$

これは

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ということで、この連立 1 次方程式の係数行列の行列式は

$$u\cdot u-(-v)\cdot v = u^2+v^2 = C^2.$$

$C=0$ ならば $u=v=0$ で、$f=u+iv=0$ も定数。$C\neq 0$ ならば (逆行列をかけて) $u_x=u_y=0$ で、再び Cauchy-Riemann の方程式を使うと $v_x=v_y=0$ も導かれ、u も v も定数である。ゆえに $f=u+iv$ も定数。— この答の方が見通しが良いような気がする (来年はこちらを模範解答に採用しよう)。

33 解答　v, $\tilde{v}$ が

$$u_x=v_y=\tilde{v}_y, \quad u_y=-v_x=-\tilde{v}_x$$

を満たすとする。u が C^1 級であるから u_x と u_y は連続であるから、v と $\tilde{v}$ は C^1 級である。

$$(v-\tilde{v})_x=0, (v-\tilde{v})_y=0$$

であるから、$v-\tilde{v}$ は領域 Ω で定数である。

(ここからはベクトル解析) v は (v_x, v_y) というベクトル場のポテンシャルであるから、Ω 内の任意の点 (a,b) を固定するとき、

$$v(x,y) := v(a,b) + \int_C v_x dx + v_y dy \quad ((x,y) \in \Omega)$$

が成り立つ (ただし C は (a,b) を始点、(x,y) を終点とする区分的に C^1 級の Ω 内の曲線)。条件 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ より

$$v(x,y) = v(a,b) + \int_C -u_y dx + u_x dy$$

と書き直せる。これが求める式である。$v(a,b)$ は任意定数とすれば良い。■

34 解答

(1) 講義ノートに書いてあるのでサボらせて下さい。

(2) u は v の共役調和関数ではない。実際 $U=v$, $V=u$ とおくと、

$$\begin{aligned} u \text{ が } v \text{ の共役調和関数} &\Leftrightarrow V \text{ が } U \text{ の共役調和関数} \\ &\Leftrightarrow U_x = V_y, \quad U_y = -V_x \\ &\Leftrightarrow v_x = u_y, \quad v_y = -u_x. \end{aligned}$$

これは v が u の調和関数である条件 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ と似ているが違う。この条件が同時に成り立つとすると $u_x = v_y = -u_x$, $u_y = -v_x = -u_y$ より $u_x = u_y = 0$, $v_x = v_y = 0$ が得られるので、u と v の両方が定数関数という特殊な場合しかない。もちろん定数でない共役調和関数の組が存在するので、「v が u の共役調和関数 $\Rightarrow$ u が v の共役調和関数」は一般には成り立たない。■

35 解答　以下 $a \equiv b$ は $a \equiv b \pmod 4$ という合同式の略記とする。

(1) $f(x) = \sin x$ とおく。

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \equiv 0) \\ \cos x & (n \equiv 1) \\ -\sin x & (n \equiv 2) \\ -\cos x & (n \equiv 3) \end{cases}, \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0) \\ 1 & (n \equiv 1) \\ 0 & (n \equiv 2) \\ -1 & (n \equiv 3) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ (-1)^k & (n \text{ が奇数}, n = 2k+1) \end{cases}$$

であるから

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{収束半径は } \infty).$$

(2) $f(x)=\cos x$ とおく。

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\cos x & (n\equiv 0)\\ -\sin x & (n\equiv 1)\\ -\cos x & (n\equiv 2)\\ \sin x & (n\equiv 3)\end{cases},\quad f^{(n)}(0)=\begin{cases}1 & (n\equiv 0)\\ 0 & (n\equiv 1)\\ -1 & (n\equiv 2)\\ 0 & (n\equiv 3)\end{cases}=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ (-1)^k & (n\text{ が偶数}, n=2k)\end{cases}$$

であるから

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(\text{収束半径は }\infty).$$

(3) $f(x)=e^x$ とおく。$f'(x)=e^x$ より $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ であるから、

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\quad(\text{収束半径は }\infty).$$

(4) $f(x)=x^\alpha$ とおく。

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

であるから、

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\quad(\text{収束半径は }1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される一般 2 項係数である:

$$\binom{\alpha}{n}:=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(5) $f(x)=\log(1+x)$ とおく。$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$ であるから、

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+1)^{-n}\quad(n\in\mathbb{N}),$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n=0)\\ (-1)^{n-1}(n-1)! & (n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

ゆえに

$$\log(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(\text{収束半径は }1).$$

(6) 等比級数の和の公式から

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(|x|<1).$$

項別積分することで (これは微積分の範囲外になるかもしれない)

$$(\natural)\qquad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(|x|<1).$$

あるいは (項別積分を避けたければ)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$$

を積分して

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\int_0^x\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt.$$

ここで $|x|<1$ に範囲を限定して、$n\to\infty$ とすることで ($\natural$) が得られる (右辺第 1 項は交代級数だから収束するとか、右辺第 2 項の積分は 0 に収束するとか、少し議論が必要であるが、難しくない)。

一般に「関数が収束する冪級数に展開されたら、その関数は Taylor 展開が可能で、その冪級数が Taylor 展開に一致する」という命題が成り立つので、($\natural$) が $\arctan x$ の Taylor 展開である。■

得られた級数の収束半径のチェックと (これは比較的簡単)、剰余項が 0 に収束することの証明も良い演習問題である。後者は (1), (2), (3), (5) は比較的簡単で、(4) は難し目。(6) は等式が成り立つことは示してあるので、剰余項が 0 に収束することを証明する必要がない (Lagrange の剰余項は書くのが難しいが、しないで済むので問題ない)。

36 解答　数学解析講義ノート[2] が参考になる。

(1) 収束列が有界というのは、実数列の場合に命題 2.9 (p. 17) で述べて、証明も書いてある。それと同様にやれば良い。

(2) Cauchy 列の有界性は直接書いていなかった (「すぐに分かる (練習問題とする)」と書いてある) ようなので書いておく。$\{a_n\}$ が Cauchy 列であれば、ある自然数 N が取れて

$$(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)(\forall m\in\mathbb{N}:m\ge N)\quad |a_n-a_m|<1$$

が成り立つ。これから $n\ge N$ を満たす任意の n に対して (特に $m=N$ と選ぶことで)

$$(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)\quad |a_n-a_N|<1.$$

これから

$$|a_n|=|a_n-a_N+a_N|\le|a_n-a_N|+|a_N|\le 1+|a_N|.$$

そこで

$$M:=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N-1}|,1+|a_N|\}$$

とおくと、$M\in\mathbb{R}$ であり、任意の自然数 n に対して

$$|a_n|\le M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。■

[2] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-2014.pdf

37 解答

(1) まず結果を述べる。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r|<1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r=1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

- $|r|<1$ の場合は $|r^n| = |r|^n \to 0\ (n\to\infty)$ であるから $r^n \to 0\ (n\to\infty)$.
- $r=1$ の場合は $r^n = 1 \to 1\ (n\to\infty)$ は明らか。
- $|r|=1$ かつ $r\neq 1$ の場合は、

  $$\left|r^n - r^{n+1}\right| = |r^n|\,|1-r| = |1-r| \neq 0$$

  であるから、$n\to\infty$ のとき r^n は収束しない (もしも $\exists c\in\mathbb{C}$ s.t. $r^n\to c$ ならば、$|r^n - r^{n+1}| \to |c-c| = 0$ となるはずで矛盾する)。
- $|r|>1$ の場合は $|r^n| = |r|^n \to \infty$ であるから、r^n は発散する。

(2) 等比数列の和の公式から、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n} r^j = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & (r\neq 1) \\ n+1 & r=1 \end{cases}$$

が成り立つので (1) の結果から

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & (|r|<1) \\ \text{発散} & (|r|\geq 1).\blacksquare \end{cases}$$