

複素関数練習問題 No.2

桂田 祐史

2014 年 9 月 30 日

連絡事項

- 来週から (問 3 から) は宿題はレポート提出 BOX に投函してもらうようにします。
- この講義の宿題のプリントや、参考資料などはなるべく WWW サイト (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>) に置くようにします。
- 講義ノートも一応は公開しますが、教科書もあることだし、更新はそんなにまめにはやらないと思います。
- 練習問題の解答は少し時間が経過してから WWW に置く予定です。

前回の補足

念のため、“代表的な” 角に対する三角関数の値をきちんと答えられるか、自己チェックしておいて下さい。

21. $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ のとき、 $e^{i\theta}$ の値を求めよ ($a + ib$ の形に表せ)。

指数関数について少し問題を追加しておく。

22. 次の方程式を解け (複素数の範囲の解をすべて求めよ)。

(1) $e^z = 1$ (2) $e^z = -1$ (3) $e^z = 0$

23. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ ($z \in \mathbb{C}$) が単射であるか、全射であるか、理由をつけて答えよ。

(後で与えられた複素数 w に対して、 $e^z = w$ を解くことで、複素関数としての対数関数を定義することになる。)

n 乗根

次の問題は、講義と宿題でやることになるが、何も見ないで自力で解けるようにしておくこと。

24. 極形式を利用することで、 $n = 2, 3, \dots, 8$ に対して、 $z^n = 1$ と $z^n = -1$ の解を求め、図示せよ。可能ならば代数的な式変形でも解いてみよ。

(後の問題はオプションです。)

2 以上の自然数 n と正数 ρ に対して、 ρ の (実数の範囲の) n 乗根 $\sqrt[n]{\rho}$ というものを聞いたので、念のため根拠を確認する。

25. 中間値の定理を用いて、次の (1), (2) を証明せよ。

- (1) $n \in \mathbb{N}$ が偶数ならば、任意の $\rho \geq 0$ に対して、 $r^n = \rho, r \geq 0$ を満たす r が一意的に存在する。
 (2) $n \in \mathbb{N}$ が奇数ならば、任意の $\rho \in \mathbb{R}$ に対して、 $x^n = \rho, x \in \mathbb{R}$ を満たす x が一意的に存在する。

26. N を 2 以上の自然数とすると、

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

とおく。このとき以下のことを示せ。

- (1) $z^N - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{N-1})$.
 (2) 任意の整数 p に対して

$$1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(N-1)p} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \begin{cases} N & (p \equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}) \\ 0 & (p \not\equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}). \end{cases}$$

- (3) (j, k) 成分 ($j, k \in \{1, \dots, N\}$) が $\omega^{(j-1)(k-1)}$ に等しい N 次正方行列を W とするとき¹、 $\frac{1}{\sqrt{N}} W$ はユニタリ行列である。

(ヒント: (2) は実は等比数列の和である。(3) は $W^*W = WW^* = NI$ (I は N 次単位行列) を確認すればよく、(2) を使うことになる。 W は離散 Fourier 変換という写像の表現行列である。)

念のため記号の説明: $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ とするとき、 $a \equiv b \pmod{c} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) a - b = kc$.

27. 1 の n 乗根について Gauss が発見した内容を調べよ。

¹行列を成分で定めるとき、 (i, j) 成分を指定するのが普通だが、複素数が関係するときは、虚数単位と記号がかぶるので、 i は使わず、 j, k を指定する本が多い。