

複素関数練習問題 No.2

桂田 祐史

2014 年 9 月 30 日

連絡事項

- 来週から (問 3 から) は宿題はレポート提出 BOX に投函してもらうようにします。
- この講義の宿題のプリントや、参考資料などはなるべく WWW サイト (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>) に置くようにします。
- 講義ノートも一応は公開しますが、教科書もあることだし、更新はそんなにまめにはやらないと思います。
- 練習問題の解答は少し時間が経過してから WWW に置く予定です。

前回の補足

念のため、“代表的な” 角に対する三角関数の値をきちんと答えられるか、自己チェックしておいて下さい。

21. $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ のとき、 $e^{i\theta}$ の値を求めよ ($a + ib$ の形に表せ)。

指数関数について少し問題を追加しておく。

22. 次の方程式を解け (複素数の範囲の解をすべて求めよ)。

(1) $e^z = 1$ (2) $e^z = -1$ (3) $e^z = 0$

23. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ ($z \in \mathbb{C}$) が単射であるか、全射であるか、理由をつけて答えよ。

(後で与えられた複素数 w に対して、 $e^z = w$ を解くことで、複素関数としての対数関数を定義することになる。)

n 乗根

次の問題は、講義と宿題でやることになるが、何も見ないで自力で解けるようにしておくこと。

24. 極形式を利用することで、 $n = 2, 3, \dots, 8$ に対して、 $z^n = 1$ と $z^n = -1$ の解を求め、図示せよ。可能ならば代数的な式変形でも解いてみよ。

(後の問題はオプションです。)

2 以上の自然数 n と正数 ρ に対して、 ρ の (実数の範囲の) n 乗根 $\sqrt[n]{\rho}$ というものを聞いたので、念のため根拠を確認する。

25. 中間値の定理を用いて、次の (1), (2) を証明せよ。

- (1) $n \in \mathbb{N}$ が偶数ならば、任意の $\rho \geq 0$ に対して、 $r^n = \rho, r \geq 0$ を満たす r が一意的に存在する。
 (2) $n \in \mathbb{N}$ が奇数ならば、任意の $\rho \in \mathbb{R}$ に対して、 $x^n = \rho, x \in \mathbb{R}$ を満たす x が一意的に存在する。

26. N を 2 以上の自然数とすると、

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

とおく。このとき以下のことを示せ。

- (1) $z^N - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{N-1})$.
 (2) 任意の整数 p に対して

$$1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(N-1)p} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \begin{cases} N & (p \equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}) \\ 0 & (p \not\equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}). \end{cases}$$

- (3) (j, k) 成分 ($j, k \in \{1, \dots, N\}$) が $\omega^{(j-1)(k-1)}$ に等しい N 次正方行列を W とするとき¹、 $\frac{1}{\sqrt{N}} W$ はユニタリ行列である。

(ヒント: (2) は実は等比数列の和である。(3) は $W^*W = WW^* = NI$ (I は N 次単位行列) を確認すればよく、(2) を使うことになる。 W は離散 Fourier 変換という写像の表現行列である。)

念のため記号の説明: $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ とするとき、 $a \equiv b \pmod{c} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) a - b = kc$.

27. 1 の n 乗根について Gauss が発見した内容を調べよ。

¹行列を成分で定めるとき、 (i, j) 成分を指定するのが普通だが、複素数が関係するときは、虚数単位と記号がかぶるので、 i は使わず、 j, k を指定する本が多い。

21 解答 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ であるから、 $\cos, \sin$ が分かれますか？という問題。順に

$$1, \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, i, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -1, -i, 1$$

22 解答 (1) $z = 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$). 実際 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \wedge \cos y = 1 \wedge \sin y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge (\exists n \in \mathbb{Z}) y = 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = 2n\pi i. \end{aligned}$$

あるいは複素対数関数を知った後ならば、1 の極形式が $1 = 1e^{i0}$ (つまり $r = 1, \theta = 0$) であることから、

$$z = \log 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) $z = (2n-1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$). (1) と同様にやっても解けるし、以下のようにしても良い。 $e^{i\pi} = -1$ を $e^z = -1$ の両辺にかけると

$$e^z = -1 \Leftrightarrow e^{z+i\pi} = 1 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z + i\pi = 2n\pi i \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = (2n-1)\pi i.$$

(3) 解なし。任意の複素数 z に対して、 $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \neq 0$ であるから、 $e^z \neq 0$.

23 解答 単射ではない。実際 $z_1 = 0, z_2 = 2\pi i$ とするとき、 $z_1 \neq z_2, f(z_1) = e^0 = 1, f(z_2) = e^{2\pi i} = 1$ ゆえ $f(z_1) = f(z_2)$.

全射ではない。22 (3) で見たように $f(z) = e^z = 0$ を満たす z は存在しない。■

24 について $n = 6, 8$ 以外は講義中に解説した (だから講義ノートに書いてある)。 $n = 6$ の場合も宿題であり、解説した。<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/toi2-answers.pdf> に Mathematica のコード付きで載せてある。 $n = 8$ の場合は詳しいことは省略するが、

- $z^8 = 1$ の解は、極形式で $e^{ik\pi/4}$ ($k = 0, 1, \dots, 7$) であり、 $\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号は任意の組み合わせを許す)。
- $z^8 = -1$ の方は、実は宿題 2(4) で $e^{i\pi/8}$ を求めてあり、後はそれに $z^8 = 1$ の解をかけたものになる。

25 解答 (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ とするとき、 $f(x)$ は x の多項式であるから f は連続である。 $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ ($x > 0$) であるから f は $[0, \infty)$ で狭義単調増加であるから単射である。したがって、任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して、 $f(r) = \rho, r \geq 0$ を満たす r は存在しても一意である。一方、存在することは以下のように場合分けして示される。

- $\rho = 0$ のとき、 $x = 0$ とすると $x \in [0, \infty), f(x) = \rho$.
- $\rho = 1$ のとき、 $x = 1$ とすると $x \in [0, \infty), f(x) = \rho$.
- $\rho > 1$ のとき、 $f(0) = 0 < \rho, f(\rho) = \rho^n > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解が $(0, \rho)$ 内に存在する。
- $0 < \rho < 1$ のとき、 $f(0) = 0 < \rho, f(1) = 1 > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解 $(0, 1)$ 内に存在する。

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ とするとき、(1) とほぼ同様にして、 f は連続かつ狭義単調増加かつ単射である (n が奇数であることから、 $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ ($x \neq 0$) となるので、負の範囲も含めて狭義単調増加になることに注意)。任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して $f(r) = \rho$ となる r が存在することは、(1) と同様に示される。 $\rho < 0$ の場合は、 r を $f(r) = -\rho$ を満たす数とすると、 $f(-r) = \rho$ が成り立つ。■

26 解答

(1) $z = \omega^k$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに相異なり、 $z^N - 1 = 0$ を満たす。ゆえに $z^N - 1 = 0$ のすべての根である。ゆえに $z^N - 1 = a \prod_{k=0}^{N-1} (z - \omega^k)$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在するはずだが、 z^N の係数を両辺で比較することにより $a = 1$ 。ゆえに $z^N - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{N-1})$ 。

(2) $\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp}$ は初項 1, 公比 ω^p の等比数列の和である。 $p \equiv 0 \pmod{N}$ のとき $\omega^p = 1$ であるから

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

$p \not\equiv 0 \pmod{N}$ のとき $\omega^p \neq 1$ であるから、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = 1 \cdot \frac{(\omega^p)^N - 1}{\omega^p - 1} = \frac{(\omega^N)^p - 1}{\omega^p - 1} = \frac{1^p - 1}{\omega^p - 1} = 0.$$

(3) $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ であることに注意する。 W の (j, k) 成分は $\omega^{(j-1)(k-1)}$ 。 W^* の (k, ℓ) 成分は $\bar{W}$ の (ℓ, k) 成分であり、 $\overline{\omega^{(\ell-1)(k-1)}} = \bar{\omega}^{(\ell-1)(k-1)} = \omega^{-(\ell-1)(k-1)}$ 。ゆえに WW^* の (j, ℓ) 成分は

$$\sum_{k=1}^N \omega^{(j-1)(k-1)} \omega^{-(\ell-1)(k-1)} = \sum_{k=1}^N \omega^{(j-\ell)(k-1)} = \sum_{k'=0}^{N-1} \omega^{(j-\ell)k'} = \begin{cases} N & (j - \ell \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$1 \leq j \leq N, 1 \leq \ell \leq N$ のとき、 $j - \ell \equiv 0 \pmod{N}$ は $j = \ell$ と同値であるから、 WW^* の (j, ℓ) 成分は $N\delta_{j\ell}$ である。すなわち $WW^* = NI$ 。ゆえに $UU^* = I$ 。これは U が unitary 行列であることを示している。 ■

27 解答 簡単な説明は講義ノート §1.10 に書いておいた。この問題は奥が深いので、興味を持った人は調べてみると良い (参考書案内をした方が良いかな...)。