続 複素関数

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/

桂田 祐史

katurada＠meiji.ac.jp

2015年3月12日, 2026年4月30日

この文書には、関数論の基礎事項のうち、「複素関数」で説明できなかったものをいくつかピックアップして書いてある。すでに何かの授業で講義したものもあるが、そうでないものも多い (解析接続、鏡像の原理、正規族、Riemann の写像定理の証明など)。後者の部分は現時点では粗いものが少なくないので、(筆者自身の) 準備のためのメモとしての性格が強い。

「応用複素関数」では、この文書からいくつかのトピックを選んで講義する。

大規模工事中 (完成度は「複素関数」の講義ノートよりはかなり低い)。

目 次

記号・用語

$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合
コンパクト集合	$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}$ の部分集合がコンパクトとは有界閉集合であること (一般には、任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在すること)
$D(c;r)$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \|z-c\| < r\}$ (c 中心, 半径 r の開円盤)
D_1	$D(0;1)$ のこと (頻出するので短い表記を用意)。
$\mathbb{C}[z]$	z の複素係数多項式 ($a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ の形の式) の全体

0　はじめに

2 年秋学期に講義している「複素関数・同演習」の内容は、理工系の学部で良くある関数論入門 (留数定理の簡単な応用まで) と、その理論 (原則すべてを証明する、ということ) であった。

複素関数論の領域は、この先、Riemann 球面, Riemann 面, 代数関数, 多変数関数論, 複素領域の常微分方程式, 特殊関数, 佐藤の超函数, $\cdots$と広大に広がっている。

楕円関数 (これは「応用複素関数」で解説しない)

楕円積分 $\displaystyle\int\sqrt{3,4\text{ 次式}}$ の逆関数が楕円関数である。
実は二重周期関数として特徴付けられる: $f(z+\omega_1)=f(z)$, $f(z+\omega_2)=f(z)$.
応用上も頻出して重要。

代数関数 (これも解説しない)

$a_n(z)w^n+a_{n-1}(z)w^{n-1}+\cdots+a_0(z)=0$ ($a_j(z)\in\mathbb{C}[z]$) で定まる $w=f(z)$.
有理関数は代数関数に含まれる。
もちろん冪根 $\sqrt[k]{\cdot}$ を使って表せる無理関数も代数関数である。
例えば $w^2+z^2-1=0$ ならば $w=\sqrt{1-z^2}$. $n\geq 5$ のとき、冪根で表せない場合がある。
多価性をどう扱うかが鍵となる。

Riemann 面 (これも解説しない)

当初は多価関数を扱うために導入された。現代では 1 次元複素多様体と定義される。
この講義では例として Riemann 球面が出て来るくらい (名前まぎらわしい)。

Riemann の写像定理 (これは授業で解説する)

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域 Ω は、単位円盤 $D_1=D(0;1)$ に双正則に写される (双正則な $\varphi\colon\Omega\to D_1$ が存在する)。

ポテンシャル問題 (Laplace 方程式 $\triangle u=0$ の境界値問題 — これは解説する)。

復習: 正則関数の実部・虚部は調和関数 (Laplace 方程式の解)。
正則関数を求めるために、ポテンシャル問題を解く、というやり方がある。
関数論を離れてもポテンシャル問題は非常に重要である (物理への応用が豊富)。

特殊関数 (解説しない)

初等関数 (≒1 年生の微積で習う関数) に含まれない、応用上 (例えば偏微分方程式) 有名な関数がたくさんあり、特殊関数と総称される。
微分方程式の解として特徴付けられることが多く、関数論で取り扱いできる。
どれかを使うことになる人は多いだろう。

佐藤の超函数 (紹介する予定)

関数概念を一般化した “超関数” の 1 つ。佐藤幹夫 (1928–2023) の創案。
(超関数の必要性は高い。L. Schwartz の超関数が有名。)。
例えば Dirac の δ 関数 (任意の φ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0)$ を満たす) は、$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\varphi(z)}{z}dz=\varphi(0)$ (Cauchy の積分公式で分かる) と結びつけられる。

多変数複素関数論 (解説しない)
岡潔 (1901–1978) の業績が有名。

「応用複素関数」では、応用、特にコンピューターが有効に使えそうなトピックスをいくつか選んで解説する (という建前である)。何らかの意味で「役に立つ」話がほとんどだが、その応用自体に価値があるというだけでなく、理論の活かし方、大切さが分かるような講義をすることを目標としている。

コンピューターが使える=アルゴリズムがある、ということで、講義の精神は、有名な Henrici のテキスト “Applied and Computational Complex Analysis” ([1], [2], [3]) のそれに近いかもしれない。

内容はまだまだ流動的で、Oh-o! Meiji に載せてあるシラバス[1] とは内容が変わる可能性が高い。

この文書は、そのうちで、比較的通常の関数論のテキストに掲載されているトピックを選んで説明してある。

Laplace 方程式の境界値問題 (ポテンシャル問題)、複素流体力学、数値積分の誤差評価に対する高橋・森理論、佐藤の超函数については、別に文書を用意する。

こういうものも含めておきたい: 素朴な Riemann 面のある程度詳しい解説。多変数の冪級数。

1 続 留数定理の応用

せちがらいことを言うと、複素関数論は理工系の大学院入試でも良く出題され[2]、ここで述べることも役に立ったりするかもしれない。でもそういうことはとりあえず脇に置いて、結果そのものよりも、どのようにしてそれが導かれるかを見て、留数定理の強力さを鑑賞してもらいたい。

1.1 留数定理と留数の計算 (復習)

(「複素関数」講義ノート [4] の第 11 節からの抜き書きである。)
「複素関数」では次の形の留数定理を与えた。

命題 1.1 (留数定理) D は $\mathbb{C}$ 内の有界領域で、その境界 ∂D は区分的 C^1 級正則単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また c_1, c_2, $\cdots$, c_N は D 内の相異なる点であり、Ω は $\overline{D}\subset\Omega$ を満たす $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\setminus\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}\to\mathbb{C}$ は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}\left(f;c_j\right).$$

[1] https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/2026-complex2-syllabus.pdf
[2] ただし、明治大学先端数理科学研究科の現象数理学専攻の試験は該当しない (念のため)。

留数の計算について、良く使うことを復習しておこう。

命題 1.2 (1 位の極の留数) c が f の高々 1 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z). \tag{1.1}$$

命題 1.3 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点ならば ($P(c)=0$ かつ $P'(c)\neq 0$ と言っても良い)、c は f の高々 1 位の極で

$$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{1.2}$$

命題 1.4 (極の留数) c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c)=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

次の命題は、「複素関数」では演習問題扱いだったが、後の例でしばしば $\varphi(z)=\log z$ あるいは $\varphi(z)=s_j(z)$ (s_j の定義は後述) として利用することになる。

命題 1.5 (1 位の極を持つ関数と正則関数の積の留数) c は f の 1 位の極であり、φ は c の近傍で正則とする。このとき

$$\mathrm{Res}\,(f\varphi;c)=\varphi(c)\,\mathrm{Res}\,(f;c)\,.$$

証明 (念のため略証だけでも)

$$\mathrm{Res}\,(f\varphi;c)=\lim_{z\to c}\left((z-c)f(z)\varphi(z)\right)=\lim_{z\to c}\left((z-c)f(z)\right)\lim_{z\to c}\varphi(z)=\mathrm{Res}(f;c)\varphi(c).\blacksquare$$

1.2 定積分の計算 (復習と新しいこと)

定積分計算に留数定理が使える場合があることは知っているであろう。どこまでやってもキリのない話題であるが、重要なもので「複素関数」で説明出来なかったものを二、三紹介しておく。

1.2.1 「複素関数」で学んだもの

これまで有理関数 f に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ の値を留数を利用して計算する例を学んだ。

以下の 2 つの定理は留数定理を用いて証明される (「複素関数」講義ノート [4] の第 12 節を見よ)。

命題 1.6 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

命題 1.7 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(f(z) e^{iaz}; c\right).$$

1.2.2 $[0, \infty)$ での有理関数の積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$

ここでは、有理関数 f の半無限区間 $[0, \infty)$ 上の積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ の値を計算する方法を紹介する。

(「複素関数」では f が偶関数の場合に、$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ として、$(-\infty, \infty)$ の場合に帰着したが、以下述べるのは、f が偶関数とは限らない場合の話である。)

命題 1.8 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in [0, \infty))$ $P(x) \neq 0$ が成り立つとする。このとき

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = -\sum_{c \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)} \operatorname{Res}(f(z) \log z; c). \tag{1.3}$$

ただし log の値 (分枝と呼ぶべきかも) は、虚部が $(0, 2\pi)$ の範囲にあるように定める。

この命題の証明に入る前に、複素関数としての log について復習しよう。

複素対数関数 log

$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき、$e^w = z$ を満たす w は、

$$w = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(ここで $\log r$ は実関数としての対数関数を表すとする。以下の $\log x$ もそうである。) この w を $\log z$ と表す。無限にたくさんの値があることに注意が必要である。使うときは、考える範囲を限定して、関数が連続 (結果的に正則になる) となるように値を 1 つうまく選択することが多い。

例えば $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ であれば、$\theta \in (0, 2\pi)$ と取り、

$$\log z = \log r + i\theta$$

と定めると良い。こうして定めた $\log z$ に対して、$x > 0$ とするとき、

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} \log z = \log x, \qquad \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} \log z = \log x + 2\pi i.$$

(「複素関数」では虚数部分が螺旋階段の高さ、という話をした。$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ の場合に、$\theta \in (-\pi, \pi)$, $\log z = \log r + i\theta$ と定義するのが、対数関数の主値 Log であった。)

余談 1.9 (対数関数の主値の利用) この文書では、複素対数関数は、主値 Log か、偏角を $[0, 2\pi)$ の範囲に選んだ分枝、どちらか便利な方を使うことが多い。ところでコンピューターのプログラミング言語には、主値しか用意されていない場合が多い。そこで、公式をなるべく主値を用いて書く、というやり方がある。実は

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\operatorname{Log}(-z)\,dz = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(f(z)\operatorname{Log}(-z); c).$$

が成り立つ (森・杉原 [5] pp. 160–163 など)。本質的にはこの文書でやっていることと同じで、もちろん同様に証明できる。 ■

証明 方針は、$0 < \varepsilon < R$, $0 < \delta < \pi$ となる ε, R, δ に対して、$f(z) \log z$ を図 (準備中) の閉曲線 $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ に沿って積分し、留数定理を用いて、$\delta \to 0$ として、それから $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ とする。

図の代わりに

図を描くのがおっくうなので、とりあえず式を書いておきます。

$$\begin{aligned}
C_1 &: z = te^{i\delta} \quad (\varepsilon \le t \le R), \\
C_2 &: z = Re^{i\theta} \quad (\delta \le \theta \le 2\pi - \delta), \\
-C_3 &: z = te^{i(2\pi - \delta)} \quad (\varepsilon \le t \le R), \\
-C_4 &: z = \varepsilon e^{i\theta} \quad (\delta \le \theta \le 2\pi - \delta).
\end{aligned}$$

ε, δ が十分小さく、R が十分大きければ、$f(z)\log z$ の ($\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ における) 特異点 (極) は、すべて閉曲線 $C_1+C_2+C_3+C_4$ の囲む領域に含まれる。留数定理から

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(x)\log z\,dz = 2\pi i \sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

$\delta\to 0$ とすると、$\delta\le\theta\le 2\pi-\delta$ であったのが、$0\le\theta\le 2\pi$ となること等から[3]、

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\log z\,dz &\to \int_\varepsilon^R f(x)\log x\,dx,\\
\int_{C_3} f(z)\log z\,dz &\to -\int_\varepsilon^R f(x)\left(\log x+2\pi i\right)dx,\\
\int_{C_2} f(z)\log z\,dz &\to \int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)\left(\log R+i\theta\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta,\\
\int_{C_4} f(z)\log z\,dz &\to -\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\left(\log\varepsilon+i\theta\right)\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta.
\end{aligned}$$

最初の 2 つから、$\delta\to 0$ とするとき

$$\int_{C_1} f(z)\log z\,dz + \int_{C_3} f(z)\log z\,dz \to -2\pi i\int_\varepsilon^R f(x)\,dx.$$

実数 M が存在して、十分大きい任意の R に対して、$\left|f(Re^{i\theta})\right|\le\dfrac{M}{R^2}$ であるから、$R\to\infty$ とするとき、

$$\left|\int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)\left(\log R+i\theta\right)\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \frac{M}{R^2}\left(|\log R|+|2\pi i|\right)R\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi M\frac{\log R+2\pi}{R}\to 0.$$

実数 M' が存在して、十分小さい任意の ε に対して、$\left|f(\varepsilon e^{i\theta})\right|\le M'$ であるから、$\varepsilon\to 0$ とするとき、

$$\left|-\int_0^{2\pi} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\left(\log\varepsilon+i\theta\right)\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right| \le M'\left(|\log\varepsilon|+|2\pi i|\right)\varepsilon\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi M'\left(|\log\varepsilon|+2\pi\right)\varepsilon\to 0.$$

まとめると、$\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ とするとき、

$$-2\pi i\int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\mathrm{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

$-2\pi i$ で割り算して、結果を得る。■

以上、$\log z$ が $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ での連続関数にはならないことをうまく利用した、とも言える計算である。

[3] ここは説明を少し簡略化してある。桂田 [4] には、やや整理不十分ではあるが、省略せずに書いてある。

例 1.10 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$. (そもそも原始関数が分かるので容易に計算できるし、留数定理を使うにしても偶関数であるから命題 1.6 を使うことが出来るが、ここでは命題 1.8 を使ってみる。)

$$I=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};c\right)=-\sum_{c=i,-i}\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};c\right).$$

i, $-i$ は1位の極であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};i\right)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\log z}{z^2+1}=\left.\frac{\log z}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{\pi i/2}{2i}=\frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};-i\right)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\log z}{z^2+1}=\left.\frac{\log z}{z-i}\right|_{z=-i}=\frac{3\pi i/2}{-2i}=-\frac{3\pi}{4}.$$

ゆえに

$$I=-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.\blacksquare$$

例 1.11

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1}.$$

$z^3+1=0$ の根は $z=e^{\pi i/3},e^{\pi i},e^{5\pi i/3}$ であるから、

$$I=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right)=-\sum_{c=e^{\pi i/3},e^{\pi i},e^{5\pi i/3}}\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right).$$

$c=e^{\pi i/3},e^{\pi i},e^{5\pi i/3}$ のとき、$c^3=-1$ であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right)=\left.\frac{\log z}{(z^3+1)'}\right|_{z=c}=\left.\frac{\log z}{3z^2}\right|_{z=c}=-\left.\frac{z\log z}{3}\right|_{z=c}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}\left(z\log z|_{z=e^{\pi i/3}}+z\log z|_{z=e^{\pi i}}+z\log z|_{z=e^{5\pi i/3}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{\pi}{3}i+(-1)\cdot\pi i+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{5}{3}\pi i\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.\blacksquare\end{aligned}$$

1.2.3 Mellin 変換 (メラン変換) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$

上の例と同じ積分路を用いた議論で、次の結果が得られる (上の例よりもこちらの方が有名かもしれないが、この講義の都合で、上の例の説明を優先し、こちらは省略することになると思う。)。

命題 1.12 (Mellin 変換) $0 < \alpha < 1$, $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x > 0)$ $P(x) \neq 0$, 0 は f の高々 1 位の極 (1 位の極または正則点) とするとき、

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{c \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z); c\right).$$

ただし $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $\log z$ の値は、虚部が $(0, 2\pi)$ の範囲にあるように定める。

証明 $\log z$ を上の例と同じように定め、z^α を $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ で定める。$x > 0$ とするとき、x^α を実関数としての冪関数として、

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} z^\alpha = x^\alpha, \qquad \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} z^\alpha = x^\alpha e^{2\alpha\pi i}.$$

(以下少し雑。暇が出来たら直す。曲線の記号は、命題 1.8 と同じものを使う。)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz &\to \int_\varepsilon^R x^\alpha f(x)\,dx, \\
\int_{C_3} z^\alpha f(z)\,dz &\to -e^{2\pi\alpha i} \int_\varepsilon^R x^\alpha f(x) dx, \\
\int_{C_2} z^\alpha f(z)\,dz &\to \int_0^{2\pi} e^{\alpha(\log R + i\theta)} f\left(Re^{i\theta}\right) \cdot iRe^{i\theta} d\theta, \\
\int_{C_4} z^\alpha f(z)\,dz &\to -\int_0^{2\pi} e^{\alpha(\log \varepsilon + i\theta)} f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right) \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
&\left(1 - e^{2\pi\alpha i}\right) \int_\varepsilon^R x^\alpha f(x)\,dx + iR^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta + i\varepsilon^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\
&\quad = 2\pi i \sum_{\varepsilon < |c| < R} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z); c\right).
\end{aligned}$$

実数 M が存在して、十分大きい任意の R に対して、$\left|f(Re^{i\theta})\right| \leq \dfrac{M}{R^2}$ であるから、$R \to \infty$ とするとき、

$$\left| R^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq R^{\alpha+1} \cdot \frac{M}{R^2} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M R^{\alpha-1} \to 0.$$

実数 M' が存在して、曲線 C_4 上で $|f| \leq \dfrac{M'}{\varepsilon}$ であるから、$\varepsilon \to \infty$ とするとき、

$$\left| \varepsilon^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \varepsilon^{\alpha+1} \cdot \frac{M'}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M' \varepsilon^\alpha \to 0.$$

以上より

$$\left(1 - e^{2\pi\alpha i}\right) \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{c \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z); c\right).$$

割り算して証明が完了する。■

例 1.13 $0 < \alpha < 1$ とするとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; -i\right)\right)\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\frac{e^{\pi\alpha i/2}}{2i} - \frac{e^{3\pi\alpha i}/2}{2i}\right)\\ &= \frac{\pi\left(e^{\pi\alpha i/2} - e^{3\pi\alpha i/2}\right)}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{2\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}.\blacksquare\end{aligned}$$

この例については、Mathematica, Maple 等でも問題なく計算できる (それぞれ `Integrate[x^a/(1+x^2), {x,-Infinity,Infinity}]`, `integrate(x^a/(1+x^2),x =-infinity..infinity)` と入力する)。 ■

例 1.14 $0 < \alpha < 1$ とするとき、

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.\blacksquare$$

(準備中)

1.2.4 $\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$ の利用 — 有理関数 f の有限区間での積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

この項の説明は、筆者には一松 [6] が分かりやすかった。

$a < b$ とするとき、

$$\Phi(z) := \operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}$$

は、主値の性質から、$\mathbb{C}\setminus[a,b]$ で正則である。実際、$z \in \mathbb{C}\setminus[a,b]$ であれば、$\dfrac{z-a}{a-b} \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ であり、対数の主値 Log は $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ で考える限り一価正則な関数である ($\log\dfrac{z-a}{z-b}$ は a, b を分岐点とするが、定義域から $[a,b]$ を除くと、a と b の周りを回ることはできないので、一価正則な分枝が取れるはず)。

$x \in (a,b)$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\Phi(x+i\varepsilon) - \Phi(x-i\varepsilon)\right) = -2\pi i$$

である。Φ は実軸上の区間 $[a,b]$ で、段差があるタイプの不連続性を持つ。この不連続性によって、f が $[a,b]$ の ($\mathbb{C}$ における) 開近傍 D で正則であるとき、C を $[a,b]$ を正の向きに囲む D 内の区分的に滑らかな単純閉曲線とすると、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}\,dz \tag{1.4}$$

が成り立つことが導かれる。

以上はよく出て来る論法であるが、やや分かりにくい(式が正しいか検証するのは面倒に感じられる)ので、ここでは、(1.4) を違った方法で証明してみよう。すべての $x\in[a,b]$ に対して，Cauchy の積分公式より

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

が成り立つので、積分順序の交換を実行して

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x}dz\right)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\Phi(z)\,dz,$$

$$\Phi(z):=\int_a^b\frac{dx}{z-x}=\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}.$$

最後の等式は目標がはっきりしているので証明しやすいであろう。

さて、f が有理関数の場合に、(1.4) における C をどんどん "大きく" していく。f の極 c を超えるごとに積分の値は変わるけれど、留数を引けば良い。結局、十分大きい任意の R に対して、

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[a,b]}\operatorname{Res}\left(f(z)\Phi(z);c\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}f(z)\Phi(z)\,dz.$$

$z\to\infty$ のとき、$\Phi(z)=\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}\to 0$ である。$f(z)$ の分母の次数が分子の次数より大きければ、$f(z)=O\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $(z\to\infty)$ であることから、$R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{|z|=R}f(z)\Phi(z)\,dz\to 0.$ ゆえに次の定理を得る。

定理 1.15 $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z),\ Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+1$, $(\forall x\in[a,b])$ $P(x)\neq 0$ とするとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[a,b]}\operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b};c\right).$$

例 1.1

$$I=\int_{-1}^1\frac{dx}{x^4+1}.$$

この場合は $\Phi(z)=\operatorname{Log}\dfrac{z+1}{z-1}$. c が $z^4+1=0$ の根であるとき、c は $f(z):=\dfrac{1}{z^4+1}$ の 1 位の極であり、

$$\operatorname{Res}\left(f\Phi;c\right)=\Phi(c)\operatorname{Res}(f;c)=\Phi(c)\left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z=c}=\Phi(c)\frac{1}{4c^3}=\Phi(c)\frac{c}{4c^4}=-\frac{c\Phi(c)}{4}$$

であるから

$$I=-\sum_{c=\frac{1+i}{\sqrt2},\frac{-1+i}{\sqrt2},\frac{-1-i}{\sqrt2},\frac{-1-i}{\sqrt2}}\operatorname{Res}\left(f(z)\Phi(z);c\right)=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{Log}\left(1+\sqrt2\right)+\frac{\pi}{2\sqrt2}.$$

(最後のところは計算が結構面倒である。制限時間付きの試験に出したら危ない。) ■

1.2.5 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

Dirichlet 積分とも呼ばれる、とても有名な積分

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

を複素関数論を利用して確認してみる。

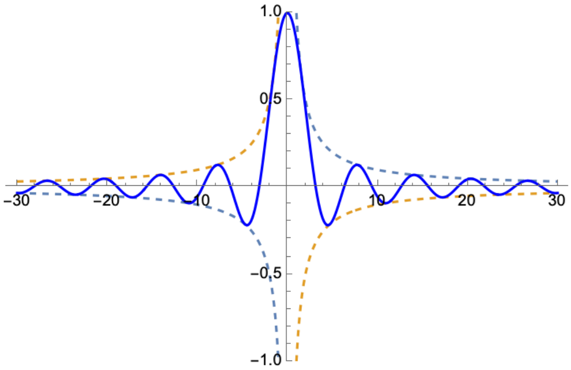


図 1: $\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ ($x\to\pm\infty$ で減衰, $y=\pm\frac{1}{x}$ のグラフにはさまれる)

被積分関数は $x=0$ で定義されていないようであるが、良く知られているように $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから、$x=0$ での値を 1 と定義することによって、$[0,+\infty)$ で連続な関数とみなして良い。

この被積分関数は $[0,+\infty)$ で Lebesgue の意味で可積分でないが (実際 $\displaystyle\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty$)、

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx$$

は存在するので、いわゆる広義積分可能である。

$\sin z$ は、z が虚数のとき絶対値が大きくなりうるので、$\sin x=\operatorname{Im}e^{ix}$ を利用することを考える。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{Im}\frac{e^{ix}}{x}dx\overset{?}{=}\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

残念ながら $\dfrac{e^{ix}}{x}$ は $\mathbb{R}$ で可積分ではない。しかし (後で解説する) 主値積分としては存在し、留数を用いて計算できる。

Riemann 積分と Lebesgue 積分　積分の定義には色々な流儀がある (大抵の場合に値は一致するけれど)。

メジャーなものは次の 2 つ。

1. Riemann 積分
   微積分での定番。“Riemann 和の極限として” 積分を定義する。
   $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ で Ω と f が有界な場合に定義される。
   $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が有界とは　$(\exists R \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \Omega)\ |x| \le R.$
   $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が有界とは　$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \Omega)\ |f(x)| \le M.$
   Ω や f が有界でない場合は、広義積分として扱う。

2. Lebesgue（ルベーグ）積分
   ある意味で究極の積分とされる。関数解析では必須。現象数理学科では応用測度論で講義される。
   Ω や f が有界でない場合も、特別なことをしないで定義される。

広義積分と主値積分　積分範囲が有界でない場合、有界な範囲の積分の極限として定義するのが、広義積分である。例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R_1,R_2\to\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R_1,R_2\to\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_{-R_1}^{R_2} = \pi.$$

一方、関数がその点の近傍で有界でないような点があれば、有界であるように積分範囲に穴を開けて、極限として定義する。例えば、$\alpha > 0$ とするとき

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{|x|^\alpha}\right) = \begin{cases} \infty & (\alpha \ge 1) \\ \dfrac{2^{1-\alpha}+1}{1-\alpha} & (0 < \alpha < 1). \end{cases}$$

穴開けは、対称 ($R_1 = R_2$ とか $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) に限定してはいけない。つまり

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2}\right)$$

は、広義積分の定義としては間違い (関数が定符号 (つねに $f \ge 0$ あるいはつねに $f \le 0$) であったり、積分が “絶対収束” である場合は、対称にしても値が一致するけれど)。

$\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$ は広義積分可能でない。実際

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0} \left([\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon_1} + [\log|x|]_{\varepsilon_2}^{1}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0} \left(\log 2 + \log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \text{発散}.\end{aligned}$$

(実際、$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ のとき $\log 2$, $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_2$ のとき $\log 2 + \log 3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2$ のとき $\log 2 + \log \varepsilon_2 \to -\infty$.)

しかし、左右対称の穴 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) を開けた場合に意味があることもある。(実際、後述する $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ への応用がそうである。) それを **Cauchy の主値積分** (principal value) とよび、

p.v. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$ と表す。

$$\text{p.v.}\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right)=\log 2.$$

主値積分の一般の場合の定義は書かないが、特異点を避ける「穴」を対称性があるように取るのが要点である。

$\mathbb{R}$ 上に 1 位の極がある場合の定積分　これまで積分範囲に被積分関数の極があるケースは除外してきたが、1 位の極に限定すれば、主値積分としては値が存在する。

定理 1.16 (実軸上に 1 位の極がある場合の定積分の公式 — 再提示) $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, P は $\mathbb{R}$ 上で高々 1 位の零点しか持たないとする。

(1) $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$ のとき

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}(f;c)+\pi i\sum_{\operatorname{Im}c=0}\operatorname{Res}(f;c).$$

(2) $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+1$ のとき、任意の $a>0$ に対して

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iax}\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};c)+\pi i\sum_{\operatorname{Im}c=0}\operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};c)..$$

証明

(1) f の極のうち、実軸上にあるものを $c_1<c_2<\cdots<c_N$ とする。

$\overline{D}(c_j;\varepsilon)$ に c_j 以外の極が含まれないように $\varepsilon>0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、f のすべての極が $|z|<R$ の中にあり、$-R<c_1-\varepsilon$, $c_N+\varepsilon<R$ を満たすとする。

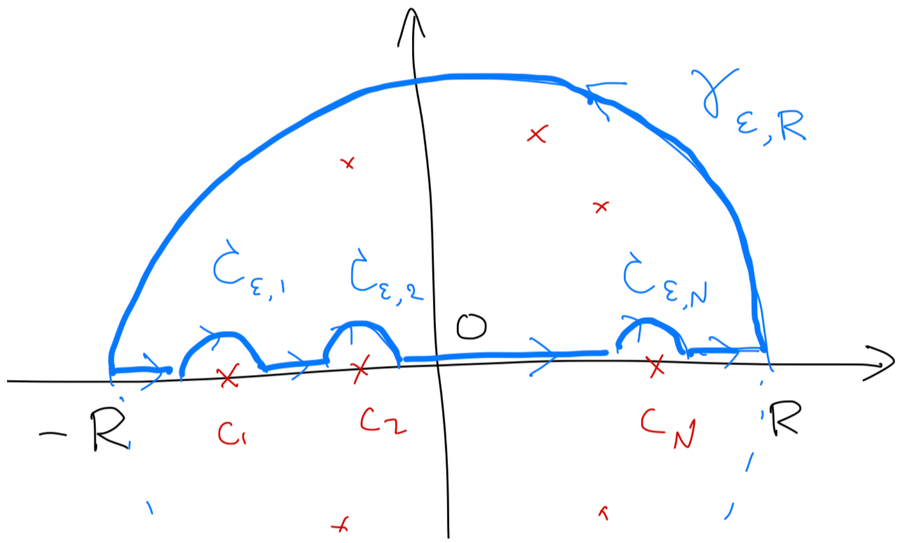
半円弧 $C_{\varepsilon,j}$ $(j=1,\cdots,N)$ を

$$-C_{\varepsilon,j}:z=c_j+\varepsilon e^{i\theta}\quad(\theta\in[0,\pi])$$

で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\begin{aligned}\Gamma_{\varepsilon,R}&:=[-R,c_1-\varepsilon]+\sum_{j=1}^{N-1}(C_{\varepsilon,j}+[c_j+\varepsilon,c_{j+1}-\varepsilon])+[c_N+\varepsilon,R],\\ C_R&:z=Re^{i\theta}\quad(\theta\in[0,\pi]),\\ \gamma_{\varepsilon,R}&:=\Gamma_{\varepsilon,R}+C_R\end{aligned}$$

により閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ を定める。



留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx\right) + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{C_R} f(z)\,dz \\
&= \left(\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)dx + \sum_{j=1}^{N}\int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)dx\right) + \sum_{j=1}^{N}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{C_R} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

この右辺第 1 項は、$\varepsilon \to +0$ のとき

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N-1}\int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c_N+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \to \text{p.v.}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

右辺第 2 項 $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz$ について考える。

f の c_j における Laurent 展開の主部は $\dfrac{A_j}{z-c_j}$ である。ただし $A_j := \operatorname{Res}(f;c_j)$.

g_j を f の c_j の周りの Laurent 展開の主部以外、つまり $g_j(z) := f(z) - \dfrac{A_j}{z-c_j}$ とすると

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz = \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z-c_j}\,dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z)\,dz,$$
$$\int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z-c_j}\,dz = -\int_0^{\pi} \frac{A_j}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = -\pi i A_j.$$

g_j は c_j の十分小さな近傍で正則であるから、$\varepsilon \to +0$ とするとき $\displaystyle\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z)\,dz \to 0.$

ゆえに $\varepsilon \to +0$ のとき

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \to -\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f; c_j).$$

ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx - \pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f; c_j) + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \mathrm{Res}(f; c).$$

$R \to +\infty$ のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \mathrm{Res}(f; c) + \pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f; c_j).$$

(2) (準備中) ■

Dirichlet 積分の計算

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{Im} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\pi i \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\pi i \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} \right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

1.3　級数の和の計算

(ここは説明がまだ粗い。要工事。)

この項の内容は (有名であり、色々な本に載っているが)、ほぼすべて一松 [6] から採った。

色々な定積分が留数を用いて計算出来るのとほぼ同様に、級数の和を留数を用いて計算出来る場合がある。

a_n が n の "簡単な" 式 (具体的には、f を正則関数として、$a_n = f(n)$) の場合に

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad \text{または} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n$$

を計算しよう。

この項を通じて、以下の記号を用いる。

(1.5)
$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (\pi \operatorname{cosec} \pi z \text{ とも書かれる}),$$

(1.6)
$$s_2(z) := \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} \quad (\pi \cot \pi z \text{ とも書かれる}).$$

1.3.1 準備

$s_1(z)$, $s_2(z)$ の分母、分子はいずれも整関数 (つまり $\mathbb{C}$ 全体で正則) である。分母 $p(z) := \sin \pi z$ の零点は $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ であり[4]、その位数は 1 である (実際、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$p'(n) = \pi \cos n\pi = (-1)^n \pi \neq 0$ であるから)。ゆえに、これらは $s_1(z)$, $s_2(z)$ の高々 1 位の極であり (分子 $\neq 0$ であるから、実は 1 位の極である)、留数は

$$\operatorname{Res}(s_1; n) = \left.\frac{\pi}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=n} = \frac{\pi}{\pi \cos n\pi} = (-1)^n,$$
$$\operatorname{Res}(s_2; n) = \left.\frac{\pi \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=n} = \left.\frac{\pi \cos \pi z}{\pi \cos \pi z}\right|_{z=n} = 1 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

s_1, s_2 を指数関数を用いて表すと

$$s_1(z) = \frac{2\pi i}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}, \quad s_2(z) = \pi \frac{2i\left(e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}\right)}{2\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)} = i\pi \frac{1 + e^{-2\pi i z}}{1 - e^{-2\pi i z}}.$$

これから、$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ とするとき、次の評価が得られる (すぐ後の積分の評価で必要になる)。

$$|y| = N + 1/2 \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le 2\pi e^{-\pi N}, \quad |s_2(z)| \le 2\pi, \tag{1.7}$$
$$|x| = N + 1/2 \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le \frac{\pi}{\cosh \pi y} \le \pi, \quad |s_2(z)| \le \pi\,|\tanh \pi y| \le \pi. \tag{1.8}$$

問 1. (1.7), (1.8) を示せ。(回答は p. 138)　**解答へ**

余談 1.17 (1.7), (1.8) は、一松 [6] から採ったが、実は次が成り立ちそうだ。

$$|y| = N + 1/2 \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le \frac{\pi}{2} e^{-\pi N}, \quad |s_2(z)| \le 2\pi,$$
$$|x| = N + 1/2 \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| = \frac{\pi}{\cosh \pi y} \le \pi, \quad |s_2(z)| = \pi\,|\tanh(\pi y)| \le \pi.$$

(1.7), (1.8) が間違っているわけではない。収束の議論には (1.7), (1.8) で十分である。■

特に、任意の自然数 N に対して、$R := N + 1/2$ として、$\pm R \pm iR$ を 4 頂点とする正方形の周を正の向きに一周する曲線を Γ_N とすると (図を描かないと…)

$$z \in \Gamma_N \quad \Rightarrow \quad |s_1(z)| \le 2\pi, \quad |s_2(z)| \le 2\pi \tag{1.9}$$

が成り立つことをすぐ後で用いる。

---

[4] $\sin z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz = \log 1 + (0 + 2n\pi)i \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ であるから、$\sin \pi z = 0 \Leftrightarrow z = n \ (n \in \mathbb{Z})$.

1.3.2 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$

命題 1.18 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_2(z); c),$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_1(z); c).$$

ただし $s_1(z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, $s_2(z) = \dfrac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$.

注意 1.19 ($P(n) = 0$ となる整数 n がある場合の和の公式) 命題 1.18 では、$(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0$ という仮定をおいたが、それが満たされない場合も証明中の (1.12) を

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{-N\leq k\leq N\\ P(k)\neq 0}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z); k\right) + 2\pi i \sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極のうち}\\ \Gamma_N\text{ の内部}}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z); c\right)$$

と修正すれば

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ P(n)\neq 0}} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z); c\right), \tag{1.10}$$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ P(n)\neq 0}} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z); c\right) \tag{1.11}$$

が得られる。$P(n) = 0$ となる n は有限個しかないので、別処理すれば良いだろう。■

証明 任意の自然数 N に対して、Γ_N を前項の閉曲線とする。f の極 c が Γ_N 上になければ、留数定理より、$j = 1, 2$ について

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z); k\right) + 2\pi i \sum_{\substack{c\text{ は }f\text{ の極のうち}\\ c\text{ は }\Gamma_N\text{ の内部}}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z); c\right).$$

f の極は有限個しかないので、N が十分大きいならば、すべて Γ_N が囲む範囲に含まれる。そのとき

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z); k\right) + 2\pi i \sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)s_j(z); c\right). \tag{1.12}$$

$N\to\infty$ のとき、左辺の積分は 0 に収束する。実際、ある定数 C が存在して、十分大きい任意の N に対して、$|f(z)|\le \dfrac{C}{N^2}$ $(z\in{\Gamma_N}^*)$ となるので、

$$\left|\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz\right| \le \max_{z\in{\Gamma_N}^*}|f(z)s_j(z)|\cdot(\Gamma_N\text{ の長さ})\le \frac{C}{N^2}\cdot 2\pi\cdot 4(2N+1)\to 0.$$

一方、命題 1.5 を用いると

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);k\right)&=f(k)\operatorname{Res}\left(s_1;k\right)=f(k)\cdot(-1)^k=(-1)^k f(k),\\ \operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);k\right)&=f(k)\operatorname{Res}\left(s_2;k\right)=f(k)\cdot 1=f(k)\end{aligned}$$

が分かるので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N} f(k)&=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}\left(f(z)s_2(z);c\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} f(z)s_2(z)\,dz,\\ \sum_{k=-N}^{N}(-1)^k f(k)&=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}\left(f(z)s_1(z);c\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} f(z)s_1(z)\,dz.\end{aligned}$$

$N\to\infty$ とすると

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)&=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(f(z)s_2(z);c),\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)&=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(f(z)s_1(z);c).\blacksquare\end{aligned}$$

例 1.20 $a>0$ とするとき

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$$

を求めよ。
(解) $f(z):=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ は、命題 1.18 の条件を満たす ($P(z)=z^2+a^2$, $Q(z)=1$ とすると$\cdots$)。
また f は偶関数であるから、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty} f(-n)+f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=S+\frac{1}{a^2}+S=2S+\frac{1}{a^2}.$$

f の極は $\pm ia$ で、分母の 1 位の零点であるから、命題 1.3 によって

$$\operatorname{Res}(f;ia)=\left.\frac{1}{(z^2+a^2)'}\right|_{z=ia}=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=ia}=\frac{1}{2ia}=-\frac{i}{2a},\quad \operatorname{Res}(f;-ia)=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=-ia}=\frac{1}{-2ia}=\frac{i}{2a}.$$

命題 1.18 より

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= -\left(\operatorname{Res}\left(f s_2; ia\right) + \operatorname{Res}\left(f s_2; -ia\right)\right) \\
&= -\left(\operatorname{Res}\left(f; ia\right) s_2(ia) + \operatorname{Res}\left(f; -ia\right) s_2(-ia)\right) \quad (\text{命題 1.5 を用いた}) \\
&= -\left[-\frac{i}{2a}\cdot\pi\cot(i\pi a) + \frac{i}{2a}\cdot\pi\cot(-i\pi a)\right] \\
&= \frac{\pi i}{a}\cot\left(i\pi a\right) = \frac{\pi i}{a}\cdot(-i)\coth\left(\pi a\right) = \frac{\pi}{a}\coth\pi a.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth\pi a - \frac{1}{a^2}\right). \blacksquare
$$

この例で、$\cot(i\pi a) = -i\coth(\pi a)$ としたが、次の問で確認しておこう。

問 2.

(1) $\cosh\left(iz\right)$, $\sinh\left(iz\right)$, $\tanh\left(iz\right)$, $\coth\left(iz\right)$ を三角関数で表せ。

(答は順に $\cos z$, $i\sin z$, $i\tan z$, $-i\cot z$)

(2) $\cos\left(iz\right)$, $\sin\left(iz\right)$, $\tan\left(iz\right)$, $\cot\left(iz\right)$ を双曲線関数で表せ。

(答は順に $\cosh z$, $i\sinh z$, $i\tanh z$, $-i\coth z$)

(p. 139 に解答がある。) **解答へ**

例 1.21 (Basel 問題) Euler が発見したことで有名な

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
$$

を導こう。

$P(z) := z^2$, $Q(z) := 1$, $f(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$ とするわけだが、$P(n) \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ は $n = 0$ のときだけ成立しない。命題 1.18 の代わりに、公式 (1.10) を用いて

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}; 0\right).
$$

$\cot z$ は円環領域 $0 < |z| < \pi$ で正則であるから、そこで Laurent 展開できるが、すぐ後で確かめるように、その最初の 3 項は

$$
\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \cdots \quad (0 < |z| < \pi). \tag{1.13}
$$

(細かいことで、ここでは必要ないことだけれど、cot の Laurent 展開の係数は最初だけ正で、それ以降はすべて負である。)

ゆえに

$$\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2}{3z}-\frac{\pi^4 z}{45}-\cdots\quad(0<|z|<1).$$

これから特に

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2};0\right)=\frac{-\pi^2}{3}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

ちなみにまったく同様にして $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ が得られる ($\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^4}{45}=\frac{\pi^4}{90}$ — cot の Laurent 展開を求めることで、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{2s}}$ $(s=1,2,\cdots)$ が求まる)。■

(3.6) の証明:　$0<|z|<\pi$ のとき、

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k)!}w^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}w^k},\quad w:=z^2$$

であるが、右辺の第 2 因子は、変数 w の関数として、0 の近傍 $D(0;\pi^2)$ で正則であるから、冪級数展開出来る。すなわち、ある $\{c_k\}_{k\geq0}$ が存在して

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k)!}w^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}w^k}=\sum_{k=0}^\infty c_k w^k\quad(|w|<\pi^2).$$

分母を払って

$$\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k)!}w^k=\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}w^k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty c_k w^k\right)\quad(|w|<\pi^2).$$

冪級数の掛け算をすると、

$$1-\frac{w}{2}+\frac{w^2}{24}-\frac{w^3}{6!}+\cdots=c_0+\left(c_1-\frac{c_0}{6}\right)w+\left(c_2-\frac{c_1}{6}+\frac{c_0}{120}\right)w^2+\cdots.$$

係数を比較して

$$c_0=1,\quad c_1-\frac{c_0}{6}=-\frac{1}{2},\quad c_2-\frac{c_1}{6}+\frac{c_0}{120}=\frac{1}{24},\quad\cdots.$$

これから

$$c_0=1,\quad c_1=-\frac{1}{3},\quad c_2=-\frac{1}{45},\quad\cdots$$

ゆえに

$$\cot z = \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{w}{3} - \frac{w^2}{45} - \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \cdots . \blacksquare$$

注意 1.22 tan, cot の 0 の周りの Laurent 展開は重要なので、よく調べられていて、一般項を表す公式が知られている (「複素関数」[4] の命題 7.17 (番号はずれるかも))。今回のような目的には一般項は必要ないので、上で説明したような冪級数の割り算を (必要なところまで) 実行すれば良い。面倒であるが、Mathematica が使えるならば、`Series[]` を用いれば良い。例えば

```
Series[Cot[z],{z,0,10}]
```

とすると

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \frac{2z^9}{93555} + O\left(z^{11}\right) \quad (z \to 0)$$

が分かる。■

例 1.23 (1.11) を用いると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}; 0\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

最後の等号について:

$$\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z} = \frac{1}{z^3} + \frac{\pi^2}{6z} + \frac{7\pi^4 z}{360} + \cdots \quad (0 < |z| < 1)$$

という展開から

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}; 0\right) = \frac{\pi^2}{6}. \blacksquare$$

例 1.24 ($\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ の部分分数展開) $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とするとき

$$S := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$$

を求めよう。$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{a\})$ とおくと、f は a を唯一の極に持ち、その位数は 2 である。特に任意の $n \in \mathbb{Z}$ は f の極ではない。ゆえに定理 1.18 が適用できて

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f s_2; c\right) = -\operatorname{Res}\left(f s_2; a\right) = -\frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to a} \left((z-a)^2 f(z) s_2(z)\right)^{(2-1)} \\ &= -\left.(\cot(\pi z))'\right|_{z=a} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

$a = z$ と書き換え、これを変数とみなそう。

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

この右辺は広義一様収束することが分かる (広義一様収束については後述する)。■

1.3.3 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta}$

Fourier 変換の積分の計算に留数が利用できたように、Fourier 級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ の和の計算に利用できることもある。

命題 1.25 (複素 Fourier 級数の和) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z)+2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_3(z)e^{iz\theta}; c) \quad (\theta \in [0, 2\pi)). \tag{1.14}$$

ただし $s_3(z) := s_2(z) - i\pi = \dfrac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}$.

証明の前に、s_2 でなく、それを修正した s_3 を用いる理由を説明する。$\displaystyle\int_{\Gamma_N} f(z)s_2(z)e^{iz\theta}\,dz$ が収束するか考えてみよう。$\theta \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ であるから、$\operatorname{Re}(i(x+iy)\theta) = -y\theta$ であり

$$\left|e^{iz\theta}\right| = \left|e^{i(x+iy)\theta}\right| = e^{-y\theta}.$$

これは、$y > 0$ のとき 1 で抑えられるが、$y \to -\infty$ のときは ($\theta \neq 0$ であれば) $+\infty$ に発散する。そのとき、x につき一様に $|s_2(x+iy)| \to i\pi$ となるので、積分は収束しなくなる。そこで代わりに s_2 から $i\pi$ を除いた s_3 を用いる。

証明

$$s_3(z) = s_2(z) - i\pi = i\pi\left(\frac{1+e^{-2\pi i z}}{1-e^{-2\pi i z}} - 1\right) = \frac{2\pi i e^{-2\pi i z}}{1-e^{-2\pi i z}} = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}.$$

s_3 は、s_2 と同様に、極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1, $\operatorname{Res}(s_3; n) = 1$ であるから、

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_3(z)e^{iz\theta}\,dz = \sum_{n=-N}^{N} f(n)e^{in\theta} + \sum_{\substack{c\ \text{は}\ f\ \text{の極} \\ c\ \text{は}\ \Gamma_N\ \text{の内部}}} \operatorname{Res}(f(z)s_3(z); c).$$

Γ_N の周上で

- $y = -N - \frac{1}{2}$ のとき $|s_3(z)| \leq 2\pi e^{-2\pi N}$ (ここに注目).

- $y = N + \frac{1}{2}$ のとき、$|s_3(z)| \leq 2\pi$.
- $|x| = N + \frac{1}{2}$ のとき、$|s_3(z)| \leq \dfrac{2\pi}{1+e^{-2\pi y}}$.

いずれの場合も $\left|s_3(z)e^{iz\theta}\right| \leq 2\pi e^{\pi}$ と定数で抑えられる。ゆえに $N \to \infty$ とすると、積分は 0 に収束し、(1.14) が導かれる。 ■

1.3.4 その他の例

例 1.26 (2 項係数の出て来る例)

(1) $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n$ とするとき、$\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz$ を示せ。

(2) $|z| = 1$ とするとき、$\displaystyle\left|\frac{(1+z)^2}{5z}\right| \leq \frac{4}{5}$ であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$ を求めよ。

(解答)

(1) $\displaystyle\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} = z^{-k-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{j-k-1}$ であり、$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{\ell}\,dz = \begin{cases} 1 & (\ell = -1) \\ 0 & (\ell \neq -1) \end{cases}$ であるから、$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz = \left.\binom{n}{j}\right|_{j-k-1=-1} = \binom{n}{k}$.

(2) $|z| = 1$ のとき、$|(1+z)^2| = |1+z|^2 \leq (1+|z|)^2 = (1+1)^2 = 4,\ |5z| = 5|z| = 5$ であるから、$\displaystyle\left|\frac{(1+z)^2}{5z}\right| \leq \frac{4}{5}$.

(3) まず (1) より $\displaystyle\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz$ である。(2) の評価と Weierstrass の M-test から、$|z| = 1$ 上で $\displaystyle\sum\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n$ が一様収束することに注意して、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz\cdot\frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+z)^2}{5z}\right)^n dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{(1+z)^2}{5z}}dz \\
&= -5\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-3z+1} = -5\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+1};c\right) = \sqrt{5}. \blacksquare
\end{aligned}$$

1.3.5　さらにその他の例 (多分重要)

(2024/8 加筆)

(これは前の項 (1.3.2 かな？) にマージする予定だけれど、どういう書き方をするか、少し考えてやること。)

後で、広義一様収束の概念を紹介して、正則関数の部分分数展開という話をする。そのとき

$$\pi\cot(\pi z)=\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)},\quad \pi\operatorname{cosec}(\pi z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

について

$$\pi\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}),\tag{1.15}$$

$$\pi\operatorname{cosec}(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\tag{1.16}$$

という公式を紹介するが、z を a と書き換えた

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2-n^2}=\pi\cot(\pi a)\quad(a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}),\tag{1.17}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2-n^2}=\pi\operatorname{cosec}(\pi a)\quad(a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\tag{1.18}$$

はこの節の範疇に収まる (紹介した和の公式を用いて証明できる)。先にこちらを示しておいて

$$\pi\cot(\pi a)=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2},\tag{1.19}$$

$$\pi\operatorname{cosec}(\pi a)=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2a}{a^2-n^2}\tag{1.20}$$

と変形してから、a を z と書き換えて変数とみなすと、これらは広義一様収束する関数項級数となる。これが有名な cot, cosec の部分分数展開である、という調子かな。

s_1, s_2 の n における留数がそれぞれ $(-1)^n$, 1 と簡単なことと、

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2a}{a^2-z^2};\pm a\right)=\left.\frac{2a}{(a^2-z^2)'}\right|_{z=\pm a}=\left.\frac{2a}{-2z}\right|_{z=\pm a}=\mp 1$$

が要点である。あるときは n を変数とみなし、またあるときは a を変数とみなし、そんなにストレートな話ではない。不思議な感触の残る計算だ。不思議が当たり前に感じられるようになるかな？

s	$\operatorname{Res}(s;n)$	級数の和の公式	s の部分分数展開
$s_1(z)=\pi\operatorname{cosec}(\pi z)$	$(-1)^n$	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nf(n)=-\sum_c\operatorname{Res}(fs_1;c)$	$\displaystyle s_1(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$
$s_2(z)=\pi\cot(\pi z)$	1	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=-\sum_c\operatorname{Res}(fs_2;c)$	$\displaystyle s_2(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$

2　正則関数の表現 — 無限和と無限積 (新)

2026 年度、この節の内容を書き換えることにした。一時的にほぼ二重になっている。

2.1　はじめに

キーワードは、広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理, それと無限積。

これまでは無限級数と言っても、冪級数、Laurent 級数に限られていたが、色々な式が自由自在に扱えるようになる (なりつつある)。ここでは冪級数、Laurent 級数以外の有名な例を 3 つあげよう。

$$\pi\cot(\pi z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z}{z^2-n^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right). \tag{2.1}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right). \tag{2.2}$$

— cot, cosec の部分分数展開、と呼ぶべきだろうか。

(極とその位数・留数を見ると、成り立つかもしれなさそうな式ではある。Laurent 展開の主部を集めたらピッタリ一致する…ちょっとうまく行き過ぎ？)

前節で学んだ和の公式を用いて、(3.2) と (2.2) を直接証明できる！

Euler による sin の因数分解

$$\sin(\pi z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\quad (\text{両辺ともに } z=0,\pm n \text{ で } 0) \tag{2.3}$$

(sin は多項式ではないけれど、もしも因数定理が成り立つならば…零点とその位数を見ると、成り立つかもしれなさそうな式ではある。)

補題 2.1

$$(\pi\cot(\pi z))'=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

証明　単なる計算で証明できる。商の微分法より

$$(\pi\cot(\pi z))'=\left(\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right)'=\pi\frac{\sin(\pi z)\cdot\pi(-\sin(\pi z))-\pi\cos(\pi z)\cdot(\cos(\pi z))}{\sin^2(\pi z)}=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.\blacksquare$$

この補題 2.1 から、(3.2) を項別微分して (-1) をかけたものが (2.2) である、という関係があることが分かる。実は、次項で学ぶ**二重級数定理**を用いると、この項別微分が簡単に正当化できる。すると、(3.2) と (2.2) のどちらか一方からもう片方を導出できる (別々に証明するよりも経済的だろう)。

さて、有限個の関数の積について、次式が成り立つことを思い出そう:

$$f = \prod_{j=1}^{n} g_j \quad \Rightarrow \quad \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{g_j'}{g_j} \quad (\text{対数微分}).$$

実は、無限積の場合にもこのような対数微分が成り立つ。それを用いると、(2.3) から (3.2) が導かれる。

注意 2.2 (収束チェックは忘れずに) (3.2) の右辺を見ると、

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n} \quad (\text{魅力的だが実は成り立たない式})$$

と書きたくなるが、この右辺の級数は収束しないのでマズイ。$\dfrac{1}{z-n}$ と $\dfrac{1}{z+n}$ を組み合わせることで収束するようになる。■

ここでは、まず前節で学んだ和の計算法から (2.2) を証明しよう。

(2.2) の証明 次のように文字を書き換えると、パッと目の前が開ける。

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とするとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2}$$

を求めよ。

$$P(z) := (a-z)^2, \quad Q(z) := 1, \quad f(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$$

とおくと、

$$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2, \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad P(n) \neq 0$$

が成り立ち、

$$\frac{1}{(a-n)^2} = f(n).$$

ゆえに

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c) = -\operatorname{Res}(f s_2; a) = -\frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^2 f(z) s_2(z)\right]^{(2-1)}$$

$$= -\lim_{z \to a} s_2'(z) = -s_2'(a) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

a を z に書き戻して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).■$$

問 3. $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とする。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2}$$

を求めることにより、cot の部分分数展開 (3.2) を証明せよ。 **解答へ**

問 4. $\pi \operatorname{cosec}(\pi z)$ の部分分数展開を求めよ。 **解答へ**

2.2 広義一様収束と二重級数定理

この項のテーマは、Weierstrass の二重級数定理である (関数論に現れる収束についての議論に対する、一つの最終兵器かもしれない)。その定理を述べるために広義一様収束という言葉を定義する必要がある。

- **広義一様収束**の定義 (任意の compact 部分集合で一様収束するということ)
- Weierstrass の二重級数定理「開集合 Ω で定義された正則関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω で**広義一様収束**すれば、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $f^{(k)}$ に Ω で広義一様収束する」

が本日の主結果である。難しいわけではないが、慣れていないと納得しにくいかもしれない (「複素関数」で紹介しても良いことであるが、私はずっと敬遠している)。一方、使うのは割と簡単であるので、それは是非身につけてもらいたい。

2.2.1 一様収束の復習 (駆け足)

一様収束については、「複素関数」で解説済みである。ここでは駆け足で振り返ろう。
「複素関数」の講義ノート桂田 [4] の §3.2「関数列の一様収束」を見よ。

次の定義を講義で板書する場合、ε-N はカットする。

定義 2.3 (関数列の各点収束、一様収束) $\Omega \neq \emptyset$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, また $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω を定義域とする複素数値の関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$) とする。

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω (上) で**各点収束**する (pointwise convergent, converges pointwise) とは、

$$(\forall x \in \Omega) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

i.e. $(\forall x \in \Omega)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon].$
(あるいは $(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall x \in \Omega)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.)

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω (上) で f に**一様収束**する (uniformly convergent, converges uniformly) とは、

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

i.e. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \Omega) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon].$
(あるいは $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \Omega)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.)

次の二つの注意も、講義では口頭で述べるに止める。

注意 2.4 (言葉づかいに関する細かい注意 2 点)

- 「各点収束すること」は pointwise convergence, 「一様収束すること」は uniform convergence である。convergence という名詞を修飾するのは形容詞で、一様収束の場合は uniformly ではなく uniform である。pointwise の方は変える必要がない。pointwise という言葉は、形容詞にも副詞にもなる。

- 「Ω (上) で」というのは、英語では “on Ω” という。日本語で表現するとき、「で」を省略して「Ω 上」というテキストが多いが、例えば「Ω 上一様収束」のように、直後に漢字の用語が来ると、まるで「上一様収束」(うえいちようしゅうそく？) という言葉のように感じられてしまい、誤解が生じかねない。そのため「で」を入れることにした。でもこれは普通ではないかもしれない。 ■

応用上、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ がたくさん現れる。このときは、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(z)$ を $f_n(z)$ とするわけである。この場合、一様収束の判定には次の定理が便利である。

定理 2.5 (Weierstrass の M-test) Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$) とする。ある数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ は収束

を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束するし (だから項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は絶対収束する (だから和の順序が変えられる)。

次のような改訂版を用意しておくと、後の応用で便利である[5]。

命題 2.6 (Weierstrass の M test (改訂版)) Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$) とする。ある $N\in\mathbb{N}$, 数列 $\{M_n\}_{n\ge N}$ が存在して、

(i) $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n\ge N)\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}M_n$ は収束

を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

定理 2.5 の証明は、複素関数の講義ノート (桂田 [4]) にある。それを改訂版の証明に直すのは簡単である。

一様収束のありがたみとして、以下のような定理が成り立つことがある。

[5]「複素関数」においては、冪級数と Laurent 級数くらいしか現れないせいか、定理 2.5 で十分な場合が多いが、改訂版が使いたくなる場合が色々ある。

命題 2.7 (連続関数列の一様収束極限は連続関数、一様収束すれば項別積分可能)

(1) 連続関数列が一様収束すれば、極限も連続である。

(2) 連続関数列が一様収束すれば、積分と lim は交換可能である:

$$(\text{実関数の場合}) \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

$$(\text{複素関数の場合}) \quad \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz.$$

この定理は、広義一様収束の場合にも自然に拡張される。

次の定理は、実関数の場合はよく使われるが、その複素関数版[6]が関数論で使われることはほとんどない。関数に正則性を仮定すると、はるかに便利な定理 3.14 (二重級数定理) が成り立つからである。

命題 2.8 (導関数列も一様収束すれば項別微分可能) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束し、$\{f_n'\}$ が I で g に一様収束するならば、f は C^1 級で、$f'=g$.

この証明と同様にして[7]

2.2.2 広義一様収束

広義一様収束は、一様収束を弱めた条件である。

定義 2.9 (広義一様収束) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $\Omega\neq\emptyset$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $f_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$ n $(n=1,2,\cdots)$ とするとき、関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω 上で **広義一様収束**するとは、Ω に含まれるすべての compact 集合 K 上で $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束すること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in K}|f(z)-f_n(z)|=0$$

が成り立つことをいう。

広義一様収束は、英語では、uniformly convergent on every compact set という (そのものズバリ)。

広義一様収束という条件の言い換えを与える定理 2.12 が重要である。その証明を納得するには、ある程度の慣れが必要かもしれない。まずは後述の例を見て定理の使い方に習熟する

[6] $\mathbb{C}$ の領域 Ω 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(z)$ に各点収束し、導関数の列 $\{g_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で $g(z)$ に一様収束するならば、f は正則で、$f'=g$.

[7] 既に述べたように、$F'=f$ となる F が存在する場合、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=F(b)-F(a)$ (a, b はそれぞれ C の始点、終点) であるから、$\displaystyle\int_a^z f_n'(\zeta)d\zeta=f_n(z)-f_n(a)$.

(それは比較的に簡単である) ことに注力することを勧める。

compact について速習

compact というのは位相空間論の用語で、現象数理学科では「トポロジー」などの科目で学んで知っている人も多いはず。

- 定義「位相空間 X の全ての開被覆が有限部分被覆を持つとき、X は compact であるという。」
- よく使う定理「K が compact、Y が位相空間、$f\colon K \to Y$ が連続ならば、$f(K)$ も compact である。特に K が compact で、$f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の最大値と最小値が存在する。」

考えている集合が compact かどうか判断するために、次の定理は基本的である。

定理 2.10 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 (その特別な場合として $\mathbb{C}$ の部分集合) K について、K が compact $\Leftrightarrow$ K が有界閉集合。

証明　多くの位相空間のテキストに載っている。難しい方「有界閉 $\Rightarrow$compact」は **Heine-Borel の定理**と呼ばれる。その証明は桂田 [7] の付録 C にもある。 ■

例えば、複素平面内の閉円盤 $\overline{D}(c;r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|\le r\}$ は compact 集合である。

例 2.11 (冪級数と Laurent 級数の場合 — 実は広義一様収束である) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、収束円 $D(c;\rho)$ で広義一様収束する。
(「複素関数」では、収束円内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ $(0<R<\rho)$ で一様収束する、と説明したが、それは実は広義一様収束と同値である。)

Laurent 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ に対しても、収束円環 $A(c;\rho_1,\rho_2)$ (ただし $0\le \rho_1<\rho_2\le+\infty$) が存在するが (そういう言い方はしてないテキストが多いけれど)、Laurent 級数はそこで広義一様収束する。これも「複素関数」では、$\rho_1<R_1<R_2<\rho_2$ を満たす任意の R_1, R_2 について $\overline{A}(c;R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C} \mid R_1\le|z-c|\le R_2\}$ で一様収束する、と説明してあった。 ■

上の定義に現れる「すべての compact 集合上で…」という条件は、(「すべて」とあるので) 証明しにくく感じるかもしれないが、次の定理があるので、広義一様収束することの証明は実は難しくないことが多い (この辺が compact 集合のありがたみである)。

定理 2.12 (広義一様収束の条件の言い換え) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\{f_n\}$ は Ω で f に広義一様収束する。

(ii) すべての $a \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$D(a;\varepsilon) \cap \Omega$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。

(すべての点 a に対して、(そこでは) 一様収束するような a の近傍が存在する。)

(i) $\Rightarrow$ (ii) は、閉円盤が compact であることに気づけば簡単である。(ii) $\Rightarrow$ (i) は、compact 集合の定義を思い出せばできる。

証明 (i)$\Rightarrow$(ii) $a \in \Omega$ とすると、Ω が開集合であることから、ある $\varepsilon' > 0$ が存在して $D(a;\varepsilon') \subset \Omega$. $\varepsilon := \varepsilon'/2$, $K := \overline{D}(a;\varepsilon)$ とおくと、K は Ω に含まれる compact 集合であるから、K で $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束する。もちろん $D(a;\varepsilon)$ $(= D(a;\varepsilon) \cap \Omega)$ でも一様収束する。
(ii) $\Rightarrow$ (i) K を Ω に含まれる compact 集合とする。仮定より、K の各点 a に対して、$\varepsilon_a > 0$ が存在して $D(a;\varepsilon_a) \cap K$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。$a \in D(a;\varepsilon_a)$ であるから $K \subset \displaystyle\bigcup_{a\in K} D(a;\varepsilon_a)$. K が compact であるから、ある $a_1, \cdots, a_r \in K$ が存在して、$K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{r} D(a_j;\varepsilon_{a_j})$. $\{f_n\}$ が、$D(a_j;\varepsilon_{a_j}) \cap K$ $(j = 1, \cdots, r)$ で f に一様収束することから、$K = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{r} \left(D(a_j;\varepsilon_{a_j}) \cap K\right)$ でも一様収束する。 ■

一様収束することの確認には、Weierstrass の M-test が使える場合が多い。

「複素関数」の講義で、一様収束列は良い性質を持つ、と説明してあるが (定理を証明付きで述べた)、広義一様収束でもほぼ同様のことが成り立つ。

1. 広義一様収束する連続関数列の極限関数は連続である。
   ($\because$ 連続性は局所的性質だから、一様収束の場合と変わらない。)

2. 広義一様収束する連続関数列について項別積分ができる。
   ($\because$ 積分範囲である曲線 C の像 $C^* = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ は、連続写像 φ による compact 集合 $[\alpha, \beta]$ の像であるから compact である。ゆえに $\{f_n\}$ は C^* 上で一様収束する。ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$ が成り立つ。)

3. 広義一様収束する正則関数列の極限関数は正則で、項別微分ができる。
   この定理は新しい (証明に Cauchy の積分公式を用いていて、正則性が本質的に必要である)。これは **Weierstrass の二重級数定理**とよばれる。以下で解説する。

2.2.3 Weierstrass の二重級数定理 (Weierstrass double series theorem)

定理 2.13 (Weierstrass の二重級数定理, 正則関数列が広義一様収束すれば項別微分可能) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上で定義された正則関数からなる関数列、$f\colon \Omega\to\mathbb{C}$ とする。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で広義一様に f に収束するならば、f は正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z)=\lim_{n\to\infty}f_n^{(k)}(z)\quad(\Omega\text{ で広義一様}).$$

証明　まず f が Ω で連続であることは明らかである (正則ならば連続で、連続関数列の広義一様収束極限は連続であるから)。

$a\in\Omega$ とする。$\overline{D}(a;\varepsilon)\subset\Omega$ となる $\varepsilon>0$ を取る。任意の $z\in D(a;\varepsilon)$ を固定する。$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して、Cauchy の積分公式から、

$$(\sharp)\qquad f_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

$k=0$ の場合に、$n\to\infty$ とするとき、被積分関数は $|\zeta-a|=\varepsilon$ 上で一様収束する。実際、$d:=\varepsilon-|z-a|$ とおくと $d>0$ で、$|\zeta-a|=\varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta-z|\ge|\zeta-a|-|a-z|=\varepsilon-|a-z|=d\quad(\text{図を描くと明らか})$$

となるので、Ω 内のコンパクト集合 $\{\zeta\in\mathbb{C}\mid|\zeta-a|=\varepsilon\}$ 上で、$\{f_n\}$ は f に一様収束することに注意して

$$\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}\left|\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|\le\frac{1}{d}\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta$$

が得られる。ゆえに f は $D(a;\varepsilon)$ で正則であり、

$$(\flat)\qquad(\forall k\in\mathbb{N})\quad f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\quad(z\in D(a;\varepsilon)).$$

最後に、$f_n^{(k)}\to f^{(k)}$ が広義一様収束であることを示す。$(\sharp)$ と $(\flat)$ を用いて

$$\left|f^{(k)}(z)-f_n^{(k)}(z)\right|\le\frac{k!}{2\pi}\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{k+1}}.$$

$K:=\overline{D}(a;\varepsilon/2)$ とおき、$z\in K$ とする。$|\zeta-a|=\varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta-z|=|\zeta-a+a-z|\ge|\zeta-a|-|a-z|\ge\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{|\zeta-z|^{k+1}}\le\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1},\quad\int_{|\zeta-a|=\varepsilon}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{k+1}}\le\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1}\cdot2\pi\varepsilon.$$

ゆえに

$$\sup_{z\in K}\left|f^{(k)}(z)-f_n^{(k)}(z)\right|\le k!\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1}\varepsilon\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

これは $\{f_n^{(k)}\}$ が K で一様収束することを意味する。■

この定理に「二重級数定理」という名前がついているのはなぜか、それについては省略する(講義ノートを見よ)。

この定理の系として、次の冪級数版が得られる。一様収束することの確認に Weierstrass の M-test が適用しやすく、とても使いやすい。

系 2.14 Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω で定義された正則関数からなる関数列、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ が Ω 上で広義一様収束するならば、和 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は Ω で正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(k)}(z)\quad(\Omega\text{ で広義一様}).$$

正則関数からなる広義一様収束級数は、何回でも項別微分できる、ということである。

実は、冪級数 (Taylor 級数), Laurent 級数はこの例になっている (つまり広義一様収束する)。どちらも重要なので、「複素関数」では、広義一様収束の定義をする前に直接的に証明したのである。

2.3 具体例コレクション

(ここはまだ少し粗い。修正をすべき。)

cot から始めて、ゼータ関数に話を進める。

例 2.15 ($\pi\cot\pi z$ **の部分分数展開、まず展開式の級数が広義一様収束すること)**

$$f(z):=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\tag{2.4}$$

の右辺の級数の和が $\pi\cot(\pi z)$ であることは既に証明済みである。

以下では、(3.4) の右辺の級数が $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様に収束し、$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で定義された正則関数 f を定めることを示す。

大雑把に言うと、$n\to\infty$ のときに、級数の一般項 $\sim\dfrac{2z}{-n^2}$ である、というのが要点である。

K を $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ の任意の compact 集合とする。有界であるから、ある $R\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$(\forall z\in K)\quad |z|\le R.$$

$N \geq 2R$ を満たす N を取る。$z \in K, n \geq N$ とすると

$$\frac{|z|^2}{n^2} \leq \frac{R^2}{N^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

このとき

$$\left|1 - \frac{z^2}{n^2}\right| \geq 1 - \frac{|z|^2}{n^2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

であるから

$$\left|\frac{2z}{z^2 - n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \frac{2|z|}{|1 - z^2/n^2|} \leq \frac{2|z|}{n^2(1 - |z|^2/n^2)} \leq \frac{2R}{\frac{3}{4} \cdot n^2} = \frac{8R}{3} \frac{1}{n^2}.$$

$M_n := \frac{8R}{3n^2}$ とおくと、命題 3.8 (改訂版 Weierstrass M-test) により、級数が K で一様収束することがわかる。ゆえに級数 (3.4) は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で広義一様収束する。

Weierstrass の二重級数定理により、$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で正則な関数 f が定まることが分かる。■

例 2.16 (cot **の部分分数展開**) すでに

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right)$$

が得られている。右辺を項別に積分した (-1 をかけた)

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

を考えよう。例 3.18 より、これが $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束することが分かった。ゆえに Weierstrass の二重級数定理によって

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

は正則関数で、その導関数は項別微分で計算できる:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$f'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

これから

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) + C = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

f は奇函数であるから $C = 0$. ゆえに $f(z) = \pi \cot(\pi z)$. すなわち

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

これは cot の部分分数展開と呼ばれる式で、色々な場面で応用される。

すべての極における Laurent 展開の主部を寄せ集めると、ぴったり $\cot(\pi z)$ になるという式で、私にはとても不思議な感じがする (この辺で Liouville の定理の話でもするのだろうか…それである程度説明できる。でも、不思議さは消えないかな…)。■

例 2.17 (Riemann のゼータ関数) (以下では、$n \in \mathbb{N}$ に対して $n^z = \exp(z \log n)$ と定義する。ここで $\log n$ は主値、この場合は要するに $\log n \in \mathbb{R}$ となる、高校数学でおなじみの実関数としての対数関数と一致する。n^z は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である。)

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

の右辺の級数は、領域 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ で正則な関数を表すことを以下に示す。これは **Riemann のゼータ関数**と呼ばれ、非常に有名である。

任意の $\alpha > 1$ を固定して、$K_\alpha := \{z \in D \mid \operatorname{Re} z \ge \alpha\}$ とおく。$z \in K_\alpha$ とすると

$$|n^z| = |\exp(z \log n)| = \exp \operatorname{Re}(z \log n) = \exp[(\operatorname{Re} z) \log n] = n^{\operatorname{Re} z} \ge n^\alpha.$$

ゆえに $M_n := \dfrac{1}{n^\alpha}$ とおくとき、

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| \le M_n \quad (n \in \mathbb{N},\ z \in K_\alpha), \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty.$$

ゆえに Weierstrass の M-test から、K_α で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ は一様収束する。

これから、D で広義一様収束することが分かる[8]。ゆえに Weierstrass の二重級数定理によって、ζ は D を定義域とする正則関数である。

(冪級数のときと同様に、D_α で一様収束するので、そこで正則な関数を定めることを言って、それから α は任意であるから D で…と議論することも出来る。)

Riemann のゼータ関数では、変数を s と書くのが通(つう)である[9]:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

これは $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されるが、その零点について、有名な **Riemann 予想**がある。

Riemann 予想 (1859 年)

$\zeta(s)$ の零点は、自明な零点 $s = -2n$ $(n \in \mathbb{N})$ 以外はすべて直線 $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ 上に乗っている。

これはもともとは**素数定理**[10]の証明のために持ち出された予想 (1859 年) であるが、素数定理

[8] 定理 2.12 を用いる手もある。K を D 内の任意のコンパクト集合とするとき、$\min\{\operatorname{Re} z \mid z \in K\}$ が存在するので、それを α とおくと、$\alpha > 1$, $K \subset K_\alpha$. 級数は K_α で一様収束するので、K でも一様収束する。ゆえに級数は D で広義一様収束する。

[9] Riemann がそうしたから (Riemann の論文の邦訳が鹿野 [8] にある)、大抵の人はそれに従っている。

[10] x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ について、$\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ $(x \to +\infty)$. Gauss が予想した。

が別の方法[11]で証明された後も未解決として残った。もし証明されれば、様々な重要な結果を導くことが知られている。周辺的な結果は色々得られているが、上の命題自体は、2026 年 4 月現在証明されていない。 ■

系 2.18 (ゼータ関数の正の偶数における値) ζ を Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ とする。$\pi z\cot\pi z$ の 0 の周りの Taylor 展開を $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ とするとき

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数 $\left(\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}\right.$ で定まる $\{B_{2n}\}_{n\geq 0}$) を使って言い替えると

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

証明 (3.2) より

$$\begin{aligned}\pi z\cot\pi z&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2-n^2}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^m=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)z^{2m}\\&=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)z^{2m}.\end{aligned}$$

係数を比較して $b_{2m}=-2\zeta(2m)$ $(m\in\mathbb{N})$ であるから、

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数を用いると、$\pi z\cot\pi z$ の Taylor 展開は

$$\pi z\cot\pi z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}z^{2n}. \tag{2.5}$$

と表されるのであった。ゆえに

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}\quad(m\in\mathbb{N}).■$$

余談 2.19 私が高校生の頃、数学の未解決問題として有名なものには、双子素数の問題、四色問題、フェルマー予想、ポアンカレ予想、リーマン予想などがあった。このうち四色問題は 1976 年に解決、フェルマー予想は 1995 年に解決、ポアンカレ予想は 2006 年 (?) に解決した。残っているのは双子素数の問題とリーマン予想だけ…ちょっとさびしい。 ■

[11] 例えば Bak-Newman [9] §19.5.

速習: Bernoulli 数と cot, tan の Taylor 展開

$f(z) := \dfrac{z}{e^z-1}$ は $|z|<2\pi$ で正則であるから、$B_n := f^{(n)}(0)$ とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \quad (|z|<2\pi).$$

この数列 $\{B_n\}$ の最初の数項を計算すると

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad \cdots$$

B_n を **Bernoulli 数**と呼ぶ。ヨハン・ベルヌーイにちなむが、和算家の関孝和も独立に発見していたという話がある (冪乗和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ の公式に現れる)。その定義には、様々な流儀があるが、上の定義は一番メジャーなもので、Mathematica でも採用されている (`BernoulliB[]` という関数がある)。なお、二番目にメジャーな定義では、$B_1=1/2$ (符号が違う) である以外は上と一致するので、以下の cot, tan の Taylor 展開 (B_1 は現れない) には影響しない。

実は $B_{2k-1}=0$ $(k=2,3,\cdots)$ である。これは

$$f(z)+\frac{z}{2}=\frac{z(e^z+1)}{2(e^z-1)}$$

が偶関数である (容易に確認可能) ことから分かる。

実は

$$\cot z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}. \tag{2.6}$$

実際、

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=i\left(1+\frac{2}{e^{2iz}-1}\right)$$

より

$$\begin{aligned}z\cot z&=iz+\frac{2iz}{e^{2iz}-1}=iz+f(2iz)=iz+\left(-\frac{2iz}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}.\end{aligned}$$

これを z で割って (3.6) を得る。一方、

$$2\cot 2z=2\frac{\cos 2z}{\sin 2z}=2\frac{\cos^2 z-\sin^2 z}{2\sin z\cos z}=\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{\sin z}{\cos z}=\cot z-\tan z$$

であるから

$$\tan z = \cot z - 2\cot 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}. \tag{2.7}$$

注意 2.20 上の系 3.21 は、神保 [10] によるが、[10] では Bernoulli 数の定義がこの「速習」と食い違っている。

$$\text{神保 [10] の } B_{2n} = (-1)^{n-1}B_{2n} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

である。■

3 正則関数の表現 — 無限和と無限積

(2026 年度は、講義メモ (随時 WWW で公開している) を結構真面目に書いているので、この節の内容は置き換えられることになる予定。)

(重複があるので、それを削除して、並べ替えを行う。不足している説明を補う。しばらく工事中の状態が続く。)

標準的な関数論入門では、正則関数について、Taylor 展開 (冪級数展開)、Laurent 級数展開という表現方法を説明してある。それらは広い適用範囲を持つが、それ以外にも色々な表現法がある。ただし、一般論ですまない話が多く、説明し始めるとキリがない、という側面がある。この節では、有名で簡単な例の紹介にとどめることにする。

(連分数展開もやりたいのだけれど、どうも時間的に無理みたい。)

3.1 はじめに

冪級数、Laurent 級数以外の例をいくつかあげる。

すでに示した (例 1.24)

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}). \tag{3.1}$$

また、これと関係の深い式として次式があげられる (この文書では、(3.1) から証明する)。

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{3.2}$$

$\dfrac{1}{z-n} + \dfrac{1}{z+n} = \dfrac{2z}{z^2-n^2}$, $\left(\dfrac{1}{z \pm n}\right)' = -\dfrac{1}{(z \pm n)^2}$, $(\pi\cot(\pi z))' = -\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ であることに注意すると、(3.2) を微分すると (3.1) が得られるように見える。

(どちらも級数ではあるが、冪級数でも Laurent 級数でもない。部分分数展開と呼ばれることがある。)

雑談

等式 (3.2) を初めて見たとき不思議に感じたが、調べるにつれ段々と自然な式に思えて来て、色々な応用があることを知るにつれて深く驚いたものである。左辺の関数の極は $z=n$ $(n\in\mathbb{Z})$ で、位数は 1 位、留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z-n}$ で、それらしい式であるが、ぴったり等式が成り立つとは！三角関数であるのに、右辺を見ても三角形の匂いはまったくしない、ということも不思議である。

有名な Riemann 予想に現れる Riemann のゼータ関数

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},\quad n^z=\exp(z\log n)\quad(\operatorname{Re}z>1). \tag{3.3}$$

(これも級数ではあるが、冪級数でも Laurent 級数でもない。)

sin の無限積展開 (§3.6 例 3.33):

$$\begin{aligned}\sin\pi z&=\lim_{N\to\infty}\pi z\left(1-\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{N}\right)\left(1+\frac{z}{N}\right)\\&=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\quad(z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

この等式は Euler による。$\sin\pi z$ は、$z=n$ $(n\in\mathbb{Z})$ を 1 位の零点とするので、$(z-n)=-n\,(1-z/n)$ を因数としてくくり出せそうとは思うが、等式が成り立つのは簡単には信じられない。因数分解のような式で、不思議な印象を持つ人も多いだろう。

(余談: Euler は

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x}&=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots\quad(\text{Maclaurin 展開})\\&=\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

の右辺を展開して、x^2 の項の係数を比較することで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を初めて証明した (1748 年)。)

これらの等式を扱うために、「広義一様収束」の概念が有用であり、以下ではそれについて説明する。もちろん、それだけでは十分でなく、個々の例に特有の議論が必要になることが多いが、それらについてもなるべく初等的な説明を心がける。

余談 3.1 (cosec の部分分数展開) 割と多くの本に cot の部分分数展開が載っているが、cosec の部分分数展開はスルーしてある本が多い。田村 [11] に載っていて、軽い驚きがあった。

$$\operatorname{cosec}z=\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2z}{z^2-n^2\pi^2}.$$

すると

$$\pi\operatorname{cosec}\pi z=\frac{\pi}{\pi z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi\cdot(-1)^n2\pi z}{(\pi z)^2-n^2\pi^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2z}{z^2-n^2}.\blacksquare$$

余談 3.2 (cot について) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan(\pi/2 - x)$. グラフは図 2 (p. 46)

余角 (complementary angle) の tangent ということで、余接 (cotangent) と呼ばれる。

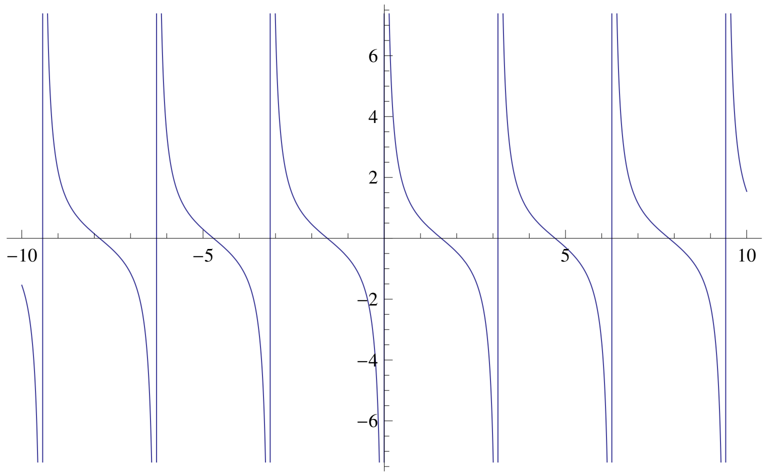


図 2: 実関数としての $\cot x$ のグラフ

3.2 (復習) 一様収束

キーワード「一様収束」について、良くある説明をする。復習と感じられる人はこの項を飛ばして構わない。授業でもスキップすると思う。

定義 3.3 (関数列の各点収束、一様収束) $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, また $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω を定義域とする関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$) とする。

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に Ω 上**各点収束** (pointwise convergence, pointwise convergent, converges pointwise) するとは、

$$(\forall x \in \Omega) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

i.e. $(\forall x \in \Omega)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.
(あるいは $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall x \in \Omega)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.)

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上 f に**一様収束** (uniform convergence, uniformly convergent, converges uniformly) するとは、

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

i.e. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \Omega) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.
(あるいは $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in \Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad [n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.)

例 3.4 (連続関数列の各点収束極限は連続ではないかも) $\{f_n\}$ が f に各点収束するというだ

けでは、f_n がすべて連続であっても、f が連続でないことがありうる。

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq \frac{1}{n}) \\ -1 & (x \leq -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}), \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおくとき、$\{f_n\}$ は f に各点収束する。f_n はすべて連続であるが、f は $x = 0$ で不連続である。■

例 3.5 (各点収束だけでは項別積分が出来ないかも) $\{f_n\}$ が f に各点収束するというだけでは、項別積分が出来ないかもしれない。

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ -n^2 \left(x - \frac{2}{n} \right) & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (x < 0 \text{ or } x > \frac{2}{n}), \end{cases} \qquad f(x) := 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおくとき、$\{f_n\}$ は f に各点収束する。ところで、

$$\int_0^2 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1, \quad \int_0^2 f(x)\, dx = 0$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\, dx = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx. \blacksquare$$

命題 3.6 (連続関数列の一様収束極限は連続関数、一様収束すれば項別積分可能)

(1) 連続関数列が一様収束すれば極限も連続である。

(2) 一様収束すれば、積分と lim は交換可能である。

証明

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. 特に $\sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. $\forall a \in \Omega$ に対して、f_N は a で連続なので

$$\exists \delta > 0, \forall y \in \Omega \quad |y - a| < \delta \Longrightarrow |f_N(y) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに $|y - a| < \delta$ を満たす任意の y に対して、

$$\begin{aligned} |f(y) - f(a)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2)

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right|\le\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx$$
$$\le\int_a^b \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\,dx=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\int_a^b dx$$
$$=(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\to 0\quad (n\to\infty).\blacksquare$$

複素線積分についても同様である。曲線 C の像 C^* の上で、$\{f_n\}$ が一様に f に収束するならば、

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz-\int_C f(z)\,dz\right|\le\sup_{z\in C^*}|f_n(z)-f(z)|\int_C |dz|\to 0.$$

命題 3.7 (導関数が一様収束すれば項別微分可能) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束し、$\{f_n'\}$ が I 上 g に一様収束するならば、f は C^1 級で、$f'=g$.

証明 $a\in I$ を任意に固定すると、

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt\quad (x\in I)$$

が成り立つ。$n\to\infty$ とすると、

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt\quad (x\in I).$$

ゆえに $f'(x)=g(x)$. ■

この証明と同様にして[12]

> $\mathbb{C}$ の領域 Ω 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(z)$ に各点収束し、導関数の列 $\{g_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $g(z)$ に一様収束するならば、f は正則で、$f'=g$.

という命題が得られるが、実はもっと強い結果が成り立つ (命題 3.14)。

注意 3.1 (広義一様収束すれば項別微分が出来る) 実は命題 3.7 の仮定は緩められる。$\{f_n'\}$ は I 全体で g に一様収束する必要はなく、各点のある開近傍で一様収束すれば良い。すなわち、

$$\forall a\in I\quad (\exists V: a\text{ の開近傍})\quad \text{s.t.}\quad \{f_n'\}\text{ は } V \text{ で一様に } g \text{ に収束する}$$

と仮定しても同じ結論が得られる。実際、

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt\quad (x\in V)$$

[12] 既に述べたように、$F'=f$ となる F が存在する場合、$\int_C f(z)\,dz=F(b)-F(a)$ (a,b はそれぞれ C の始点、終点) であるから、$\int_a^z f_n'(\zeta)d\zeta=f_n(z)-f_n(a)$.

から

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad (x \in V)$$

が得られ、これから $f'(x) = g(x)$ $(x \in V)$ が導かれるから。微分は局所的な演算であることが本質的である。

I の各点のある近傍で一様収束するという条件は、任意のコンパクト集合上で一様収束するということと同値である。このことを I で**広義一様収束**するという。英語では、“uniform convergence on every compact set” とか、“uniform convergence on compacta” という。

連続性についても事情は同じである。すなわち Ω 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で広義一様に f に収束するならば、f は Ω で連続である。

逆に言うと、これまでに紹介した命題のうちで、広義一様収束だけでは駄目なのは (一様収束が必要なのは)、項別積分だけである。■

一様収束の判定法としては、次の定理に基づくものが便利である (これは一つの十分条件であって必要十分条件ではないが、非常に多くの場合にこの定理で一様収束が証明できる)。

命題 3.8 (Weierstrass の M test) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する正項級数で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は空でない集合 Ω 上定義された複素数値の関数列で、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega \quad |f_n(z)| \le M_n$$

が成り立つならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は Ω 上一様に絶対収束する (特に一様収束するし、各点ごとに絶対収束する)。

証明 「絶対収束するならば収束する」ので、$\forall z \in \Omega$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は収束する。和を $S(z)$ とおく。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ の和を U とおくと、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \ge N \Longrightarrow U - \sum_{k=1}^{n} M_k < \varepsilon.$$

このとき、$\forall z \in \Omega$ に対して、

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(z) \right| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(z)| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k = U - \sum_{k=1}^{n} M_k < \varepsilon. \blacksquare$$

注意 3.9 一様に絶対収束すること、すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ は Ω 上一様収束することも分かる。

■

冪級数の収束円の存在、収束円内で広義一様収束すること、収束円内の曲線に沿う積分で項別積分が出来ること、ローラン級数に関しても同様の命題が得られることは「複素関数」で説明してある。

3.3 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

定義 3.10 (広義一様収束) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $f_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき、関数列 $\{f_n\}$ が f に Ω で **広義一様収束**するとは、Ω に含まれるすべての compact 集合 K 上で $\{f_n\}$ が f に一様収束すること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in K}|f(z)-f_n(z)|=0$$

が成り立つことをいう。

compact というのは位相空間論の用語で、現象数理学科では「トポロジー」などの科目で説明されているはず。

- 定義「位相空間 X の全ての開被覆が有限部分被覆を持つとき、X は compact であるという。」
- K が compact、Y が位相空間、$f\colon K\to Y$ が連続ならば、$f(K)$ も compact である。特に K が compact で、$f\colon K\to\mathbb{R}$ が連続ならば、f の最大値と最小値が存在する。

考えている集合が compact かどうか判断するために、次の定理は基本的である。

定理 3.11 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 (その特別な場合として $\mathbb{C}$ の部分集合) K について、K が compact $\Leftrightarrow$ K が有界閉集合。

証明 多くの位相空間のテキストに載っている。難しい方「有界閉 $\Rightarrow$compact」は Heine-Borel の定理と呼ばれる。その証明は桂田 [7] の付録 C にもある。 ■

例えば閉円盤 $\overline{D}(c;r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|\le r\}$ は compact 集合である。

例 3.12 (冪級数と Laurent 級数の場合 — 実は広義一様収束である) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ は、収束円 $D(c;\rho)$ で広義一様収束する。
(「複素関数」では、収束円内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ $(0<R<\rho)$ で一様収束する、と説明したが、それは実は広義一様収束と同値である。)

円環領域 $A(c;\rho_1,\rho_2)$ $(0\le\rho_1<\rho_2\le+\infty)$ で正則な関数の Laurent 級数展開 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は、$A(c;\rho_1,\rho_2)$ で広義一様収束する。これも「複素関数」では、$\rho_1<R_1<R_2<\rho_2$ を満たす任意の R_1, R_2 について $\overline{A}(c;R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C}\mid R_1\le|z-c|\le R_2\}$ で一様収束する、と説明してあった。 ■

上の定義に現れる「すべての compact 集合上で…」という条件は、(「すべて」とあるので) 証明しにくく感じるかもしれないが、次の定理があるので、広義一様収束することの証明は実は難しくないことが多い (この辺が compact 集合のありがたみである)。

定理 3.13 (広義一様収束の条件の言い換え) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\{f_n\}$ は Ω で f に広義一様収束する。

(ii) すべての $a \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$D(a;\varepsilon) \cap \Omega$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。

(すべての点に対して、一様収束する近傍が存在する。)

証明 (i)⇒(ii) $a \in \Omega$ とすると、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$D(a;2\varepsilon) \subset \Omega$. $K := \overline{D}(a;\varepsilon)$ は、Ω に含まれる compact 集合であるから、K で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。
(ii) ⇒ (i) K を Ω に含まれる compact 集合とする。仮定より、K の各点 a に対して、$\varepsilon_a > 0$ が存在して $D(a;\varepsilon_a) \cap K$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。K が compact であるから、ある a_1, $\cdots$, $a_n \in K$ が存在して、$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} D(a_j;\varepsilon_{a_j})$. ゆえに K で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。■

一様収束することの確認には、Weierstrass の M-test が使える場合が多い。

「複素関数」の講義で、一様収束列は良い性質を持つ、と説明してあるが (定理を証明付きで述べた)、広義一様収束でもほぼ同様のことが成り立つ。

1. 広義一様収束する連続関数列の極限関数は連続である。
   (∵ 連続性は局所的性質だから、一様収束の場合と変わらない。)

2. 広義一様収束する連続関数列について項別積分ができる。
   (∵ 曲線 C の像 $C^* = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ は、連続写像 φ による compact 集合 $[\alpha, \beta]$ の像であるから compact である。ゆえに $\{f_n\}$ は C^* 上で一様収束する。ゆえに $\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$ が成り立つ。)

3. 広義一様収束する正則関数列の極限関数は正則で、項別微分ができる。
   この定理は、**Weierstrass の二重級数定理**とよばれる。「複素関数」では、(後で説明をすると言いつつ) 説明を端折ったので、以下で解説する。

定理 3.14 (Weierstrass の二重級数定理, 正則関数列が広義一様収束すれば項別微分可能) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上で定義された正則関数からなる関数列、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω 上で広義一様に f に収束するならば、f は正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

証明　まず f が Ω で連続であることは明らかである (一般に連続関数列の広義一様収束極限は連続であるから)。

$a \in \Omega$ とする。$\overline{D}(a;\varepsilon) \subset \Omega$ となる $\varepsilon > 0$ を取る。任意の $z \in D(a;\varepsilon)$ を固定する。$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、Cauchy の積分公式から、

$$(\sharp) \qquad f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

$k = 0$ の場合に、$n \to \infty$ とするとき、被積分関数は $|\zeta - a| = \varepsilon$ 上で一様収束する。実際、$d := \varepsilon - |z-a|$ とおくと $d > 0$ で、$|\zeta - a| = \varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta - z| \ge |\zeta - a| - |a - z| = \varepsilon - |a - z| = d$$

となるので、Ω 内のコンパクト集合 $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta - a| = \varepsilon\}$ 上で、$\{f_n\}$ は f に一様収束することに注意して

$$\sup_{|\zeta-a|=\varepsilon} \left| \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \le \frac{1}{d} \sup_{|\zeta-a|=\varepsilon} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\, d\zeta$$

が得られる。ゆえに f は $D(a;\varepsilon)$ で正則であり、

$$(\flat) \qquad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \quad (z \in D(a;\varepsilon)).$$

最後に、$f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ が広義一様収束であることを示す。

$$\left| f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) \right| \le \frac{k!}{2\pi} \sup_{|\zeta-a|=\varepsilon} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}}.$$

$K := \overline{D}(a;\varepsilon/2)$ とおき、$z \in K$ とする。$|\zeta - a| = \varepsilon$ を満たす任意の ζ に対して

$$|\zeta - z| = |\zeta - a + a - z| \ge |\zeta - a| - |a - z| \ge \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{k+1}} \le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1}, \quad \int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}} \le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1} \cdot 2\pi\varepsilon.$$

ゆえに

$$\sup_{z \in K} \left| f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) \right| \le k! \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{k+1} \varepsilon \sup_{|\zeta-a|=\varepsilon} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

これは $\{f_n^{(k)}\}$ が K で一様収束することを意味する。■

この定理の系として、次の定理が得られる。これはとても使いやすい定理で、ぜひとも覚えて欲しい。

系 3.15 Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω で定義された正則関数からなる関数列、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ が Ω 上で広義一様収束するならば、和 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は Ω で正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(z) \quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

正則関数からなる広義一様収束級数は、何回でも項別微分できる、ということである。

実は、冪級数 (Taylor 級数), Laurent 級数はこの例になっている。どちらも重要なので、「複素関数」では、広義一様収束の定義をする前に直接的に証明したのである。

注意 3.16 (細かい注意) 微積分で、f に各点収束する C^1 級関数列 $\{f_n\}$ の導関数列 $\{f_n'\}$ が g に広義一様収束するならば、f は C^1 級で $f'=g$ という定理があるが、正則関数列については、導関数列が収束するという仮定の代わりに、$\{f_n\}$ 自身の広義一様収束性があれば良い、ということである。帰納法で、すべての階数の導関数の広義一様収束性が導かれるので、非常に強力な定理といえる。 ■

余談 3.17 (二重級数定理という呼び名について) この定理に「二重級数定理」という名前がついているのはなぜか、以前から軽い疑問を持っていたのだが、「本来は二重級数定理は別の定理で、上の定理はその系に過ぎない。それを二重級数定理と呼ぶのはおかしい。」という意見を目にしたので、少し考えてみた。

上の定理は、私が信頼しているテキストで二重級数定理と呼ばれているので (正確にはそう記憶していたので)、「おかしい」というのは当たらないだろう、という気は (考える前から) していた。

“Weierstrass double series theorem” というキーワードで検索すると、次のような定理が見つかった。

$c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\{a_{nk}\}_{\substack{n\ge 0\\ k\ge 0}}$ は複素二重数列とする。すべての $n \ge 0$ に対して、$D(c;r)$ で

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nm}(z-c)^k$$

が収束し、ある $\rho \in (0,r)$ に対して

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

が $D(c;\rho)$ で一様収束するならば、すべての $k \ge 0$ に対して

$$A_k := \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}$$

は収束して次式が成り立つ。

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-c)^k \quad (z \in D(c;\rho)).$$

なるほど、これならば二重級数定理と呼ばれるに相応しい。この定理の結構大掛かりな証明というのも目にしたけれど、簡単に証明できるような気がした。

まず、すべての n に対して、f_n は収束冪級数の和であるから、$D(c;r)$ で正則である。そして F は、$D(c;\rho)$ における正則関数を項とする一様収束級数の和であるから、定理 3.14 によって正則関数であり、すべての $k \ge 0$ に対して

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (z \in D(c;\rho))$$

が成り立つ。すると

$$\frac{1}{k!}F^{(k)}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(c)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}.$$

ゆえにこの和 A_k は確かに存在して、

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k = F(z).$$

証明できた。つまり元来の二重級数定理は、定理 3.14 から簡単な議論で導かれる。2 つの定理は、ある意味で同値であると言って良いであろう (かなあ？)。こういう場合は、広い場合に適用しやすい、ニュートラルな形にまとめた方が良い、と考えて、定理 3.14 の方をテキストに採用し、「二重級数定理」という名前をつけた (残した)、そういうことだと想像する (そのうち証拠集めをしよう…)。

吉田 [12] は、定理 3.14 を Weierstrass の二重級数定理と読んでいる。辻・小松 [13] は、関数項級数 $\sum f_n(z)$ (二重級数ではない) についての定理を Weierstrass の二重級数定理と呼

んでいる (p. 52)。Ahlfors [14] は、定理 3.14 を書いて、「Theorem 1 is due to Weierstrass, in an equivalent formulation. Its application to series whose terms are analytic functions is particularly important.」と説明してある (Chapter 5, 1.1 Weierstras)。二重級数の現れる定理は述べられておらず、二重級数定理という呼び方もしていない。■

3.4 具体例コレクション

cot から始めて、ゼータ関数に話を進める。

例 3.18 ($\pi\cot\pi z$ の部分分数展開、まず展開式の級数が広義一様収束すること)

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \tag{3.4}$$

の右辺の級数は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で広義一様に収束し、正則関数 f を定めることを以下に示す。

大雑把に言うと、$n \to \infty$ のときに、級数の一般項 $\sim \dfrac{2z}{-n^2}$ である、というのが要点である。

K を $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の任意の compact 集合とする。有界であるから、ある $R \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$(\forall z \in K) \quad |z| \le R.$$

$N \ge 2R$ を満たす N を取ると、

$$(\forall z \in K)(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad \left|1 - \frac{z^2}{n^2}\right| \ge 1 - \frac{|z|^2}{n^2} \ge 1 - \frac{R^2}{N^2} \ge 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

この n, z について

$$\left|\frac{2z}{z^2 - n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \frac{2|z|}{|1 - z^2/n^2|} \le \frac{2|z|}{n^2(1 - |z|^2/n^2)} \le \frac{2R}{3/4 \cdot n^2} = \frac{8R}{3} \frac{1}{n^2}.$$

これから K での一様収束が分かる。実際 $S_n(z) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2 - k^2}$ とおくとき

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \ge n)\, |S_m(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{2z}{z^2 - k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} \frac{8R}{3k^2}.$$

ゆえに任意の $z \in K$ に対して $\{S_n(z)\}$ は Cauchy 列なので収束する。その極限を $S(z)$ とすると

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N)\, |S(z) - S_n(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{8R}{3k^2}$$

が成り立つ。特に

$$\sup_{z \in K} |S(z) - S_n(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{8R}{3k^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに級数 (3.4) は K で一様収束する。すなわち級数 (3.4) は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で広義一様収束する。

ゆえに Weierstrass の二重級数定理により、$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で正則な関数 f が定まることが分かる。■

例 3.19 ($\cot$ の部分分数展開) すでに

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right)$$

が得られている。右辺を項別に積分した (-1 をかけた)

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

を考えよう。これは $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束することが分かるので、Weierstrass の二重級数定理によって

$$f(z):=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

は正則関数で、その導関数は項別微分で計算できる:

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right)\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$f'(z)=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

これから

$$f(z)=\cot(\pi z)+C=\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

f は奇函数であるから $C=0$. ゆえに $f(z)=\cot(\pi z)$. すなわち

$$\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

これは $\cot$ の部分分数展開と呼ばれる式で、色々な場面で応用される。

すべての極における Laurent 展開の主部を寄せ集めると、ぴったり $\cot(\pi z)$ になるという式で、私にはとても不思議な感じがする。■

例 3.20 (Riemann のゼータ関数) (以下では、$n\in\mathbb{N}$ に対して $n^z=\exp(z\log n)$ と定義する。ここで $\log n$ は主値、この場合は要するに $\log n\in\mathbb{R}$ となる、高校数学でおなじみの実関数としての対数関数と一致する。n^z は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である。)

$$\zeta(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

の右辺の級数は、領域 $D:=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Re}z>1\}$ で正則な関数を表すことを以下に示す。これは **Riemann のゼータ関数**と呼ばれ、非常に有名である。

任意の $\alpha>1$ を固定して、$D_\alpha:=\{z\in D\mid\operatorname{Re}z>\alpha\}$ とおく。$z\in\overline{D_\alpha}$ とすると

$$|n^z|=|\exp(z\log n)|=\exp\operatorname{Re}(z\log n)=\exp[(\operatorname{Re}z)\log n]=n^{\operatorname{Re}z}\geq n^\alpha.$$

ゆえに $M_n := \dfrac{1}{n^\alpha}$ とおくとき、

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| \le M_n \quad (n \in \mathbb{N},\ z \in \overline{D_\alpha}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty.$$

ゆえに Weierstrass の M-test から、$\overline{D_\alpha}$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ は一様収束する。

これから、D で広義一様収束することが分かる[13]。ゆえに Weierstrass の二重級数定理によって、f は D を定義域とする正則関数である。

(冪級数のときと同様に、D_α で一様収束するので、そこで正則な関数を定めることを言って、それから α は任意であるから D で…と議論することも出来る。)

Riemann のゼータ関数では、変数を s と書くのが通(つう)である[14]:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

これは $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されるが、その零点について、有名な **Riemann 予想**がある。

Riemann 予想 (1859 年)

$\zeta(s)$ の零点は、自明な零点 $s = -2n$ $(n \in \mathbb{N})$ 以外はすべて直線 $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ 上に乗っている。

これはもともとは**素数定理**[15]の証明のために持ち出された予想 (1859 年) であるが、素数定理が別の方法[16]で証明された後も未解決として残った。もし証明されれば、様々な重要な結果を導くことが知られている。周辺的な結果は色々得られているが、上の命題自体は、2024 年 5 月現在証明されていない。 ■

[13] K を D 内の任意のコンパクト集合とするとき、$\min\{\operatorname{Re} z \mid z \in K\}$ が存在するので、それを α とおくと、$\alpha > 1$, $K \subset \overline{D_\alpha}$. 級数は $\overline{D_\alpha}$ で一様収束するので、K で一様収束する。ゆえに級数は D で広義一様収束する。

[14] Riemann がそうしたから (Riemann の論文の邦訳が鹿野 [8] にある)、大抵の人はそれに従っている。

[15] x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ について、$\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ $(x \to +\infty)$. Gauss が予想した。

[16] 例えば Bak-Newman [9] §19.5.

系 3.21 (ゼータ関数の正の偶数における値) ζ を Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ とする。$\pi z\cot\pi z$ の 0 の周りの Taylor 展開を $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ とするとき

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数 ($\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$ で定まる $\{B_{2n}\}_{n\geq 0}$) を使って言い替えると

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

証明 (3.8) より

$$\begin{aligned}\pi z\cot\pi z&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2-n^2}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^m=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)z^{2m}\\&=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)z^{2m}.\end{aligned}$$

係数を比較して $b_{2m}=-2\zeta(2m)$ $(m\in\mathbb{N})$ であるから、

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

Bernoulli 数を用いると、$\pi z\cot\pi z$ の Taylor 展開は

$$\pi z\cot\pi z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}z^{2n}.\tag{3.5}$$

と表されるのであった。ゆえに

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}\quad(m\in\mathbb{N}).\blacksquare$$

余談 3.22 私が高校生の頃、数学の未解決問題として有名なものには、双子素数の問題、四色問題、フェルマー予想、ポアンカレ予想、リーマン予想などがあった。このうち四色問題は 1976 年に解決、フェルマー予想は 1995 年に解決、ポアンカレ予想は 2006 年 (?) に解決した。残っているのは双子素数の問題とリーマン予想だけ…ちょっとさびしい。 ■

速習: Bernoulli 数と cot, tan の Taylor 展開

$f(z):=\frac{z}{e^z-1}$ は $|z|<2\pi$ で正則であるから、$B_n:=f^{(n)}(0)$ とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\quad(|z|<2\pi).$$

この数列 $\{B_n\}$ の最初の数項を計算すると

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \cdots$$

B_n を **Bernoulli 数**と呼ぶ。ヨハン・ベルヌーイにちなむが、和算家の関孝和も独立に発見していたという話がある (冪乗和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ の公式に現れる)。その定義には、様々な流儀があるが、上の定義は一番メジャーなもので、Mathematica でも採用されている (`BernoulliB[]` という関数がある)。なお、二番目にメジャーな定義では、$B_1 = 1/2$ (符号が違う) である以外は上と一致するので、以下の cot, tan の Taylor 展開 (B_1 は現れない) には影響しない。

実は $B_{2k-1} = 0$ $(k = 2, 3, \cdots)$ である。これは

$$f(z) + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}$$

が偶関数である (容易に確認可能) ことから分かる。

実は

$$\cot z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \tag{3.6}$$

実際、

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left(1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1} \right)$$

より

$$\begin{aligned} z \cot z &= iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = iz + f(2iz) = iz + \left(-\frac{2iz}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

これを z で割って (3.6) を得る。一方、

$$2 \cot 2z = 2 \frac{\cos 2z}{\sin 2z} = 2 \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{2 \sin z \cos z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{\sin z}{\cos z} = \cot z - \tan z$$

であるから

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} \left(2^{2n} - 1 \right) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}. \tag{3.7}$$

注意 3.23 上の系 3.21 は、神保 [10] によるが、[10] では Bernoulli 数の定義がこの「速習」と食い違っている。

$$\text{神保 [10] の } B_{2n} = (-1)^{n-1} B_{2n} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

である。■

3.5 (おまけ) 余接関数の部分分数展開の別証明

この項では、余接関数 $(\pi\cot(\pi z))$ の部分分数展開 (3.2) を、神保 [10] §5.2 に従って証明する。

(すでにこの文書では証明済みであり (例 3.19)、この項は不要であるが、参考のために残すことにする。こちらの議論では、余接関数 $(\pi\cot(\pi z))$ の部分分数展開が先に得られるので、それを項別微分することで $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ の部分分数展開が得られる。)

関数 φ を

$$\varphi(z) := \pi\cot\pi z = \frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$$

で定めるとき、φ は $\mathbb{C}$ で有理型で、$z=n$ $(n\in\mathbb{Z})$ を 1 位の極に持ち、そこでの留数は 1 であり、それ以外に極は持たない。実際、$P(z):=\sin\pi z$, $Q(z):=\pi\cos\pi z$ とおくとき、$P(z)$ と $Q(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則であり、

$$\begin{aligned}
&(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\quad P(z)\neq 0,\\
&(\forall n\in\mathbb{Z})\quad P(n)=0\wedge P'(n)\neq 0\wedge Q(n)\neq 0,\\
&\operatorname{Res}(\varphi;n)=\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)};n\right)=\frac{Q(n)}{P'(n)}=\frac{\pi\cos n\pi}{\pi\cos n\pi}=1.
\end{aligned}$$

ゆえに、φ の極は $n\in\mathbb{Z}$ であり、n のまわりのローラン展開の主要部は $\dfrac{1}{z-n}$ である。これを集めた $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n}$ は収束しない (大ざっぱに言うと、z を任意に固定したとき、$|n|$ が大きいとき、$\dfrac{1}{z-n}\sim-\dfrac{1}{n}$ であり、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\infty$)。しかし、これを

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}&=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)\right]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{N}\frac{2z}{z^2-n^2}\right)\\
&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}
\end{aligned}$$

のように、0 をはさんで左右対称に和を取ってから極限を取るようにまとめ直すと、広義一様収束する (例 3.18 で証明済み)。そして、実はこの和は $\varphi(z)$ である。すなわち次が成り立つ。

命題 3.24 (余接関数の部分分数展開) すべての $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ に対して、

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{3.8}$$

有理関数 $f = \dfrac{Q}{P}$ については、$\mathbb{C}$ 内の全ての極 $c_1, \dots, c_r$ と、無限遠点 ∞ における Laurent 展開の主部を集めると、f が再生される (そして、それは f の部分分数分解に他ならない) という結果があったが (§5.1)、それに良く似ている。

証明　任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ を固定し、関数 f を

$$f(\zeta) := \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}$$

で定める。

$N \in \mathbb{N}$ は $|z| < N$ が成り立つよう十分大きいとして、$R := N + \dfrac{1}{2}$ とおく。複素平面で、4 点 $\pm R \pm iR$ を頂点とする正方形の周を、正の向きに 1 周する閉曲線を C とする (図が欲しい)。

このとき $\displaystyle\int_C f(\zeta)\, d\zeta$ を考えよう。

f は $\mathbb{C}$ 全体で有理型であり、$\zeta = z$, $\zeta = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) が極の全体で、位数はいずれも 1 である。それらの点における留数は[17]

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}(f; z) = \lim_{\zeta \to z} (\zeta - z) f(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} \pi \cot \pi\zeta = \pi \cot \pi z, \\
&\operatorname{Res}(f; k) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta - z} \cdot \pi \cot \pi\zeta; k\right) = \left.\frac{1}{\zeta - z}\right|_{\zeta = k} \operatorname{Res}(\pi \cot \pi z; k) = \frac{1}{k - z} \cdot 1 = \frac{1}{k - z}.
\end{aligned}$$

留数定理により、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, d\zeta &= \sum_{c\ \text{は曲線}\ C\ \text{の内部}} \operatorname{Res}(f; c) = \sum_{c = z, 0, \pm 1, \dots, \pm N} \operatorname{Res}(f; c) \\
&= \pi \cot \pi z + \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{k - z} \\
&= \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k}\right).
\end{aligned}$$

$N \to \infty$ のときの右辺の極限が 0 であることを示すことができれば、(3.8) が証明できる。そのためには、左辺の極限が 0 であること、すなわち

$$\lim_{N \to \infty} \int_C f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

を示せばよい。

C 上で $|\cot \pi\zeta| \le 2$ が成り立つ ((1.7), (1.8))。

さて、$g(\zeta) := \dfrac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta}$ とおくとき、これは偶関数 ($g(-\zeta) = g(\zeta)$) であるから、積分路の対称性から[18]

$$\int_C g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

---

[17]「c が f の正則点、g の 1 位の極であるとき、$\operatorname{Res}(fg; c) = f(c) \operatorname{Res}(g; c)$」が成り立つ。

[18] C のうち、正方形の右の辺、上の辺の部分を C_1, それ以外の部分を C_2 とすると、$C = C_1 + C_2$. C_1 上の積分 $\displaystyle\int_{C_1} g(\zeta)\, d\zeta$ で、$\zeta = -w$ と変数変換すると、$\displaystyle\int_{C_1} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_2} g(-w) \cdot (-dw) = -\int_{C_2} g(w) dw$. ゆえに $\displaystyle\int_C g(\zeta)\, d\zeta = 0$.

それゆえ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(f(\zeta)-g(\zeta)\right)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \pi\cot\pi\zeta\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)\,d\zeta \\ &= \frac{z}{2i}\int_C \cot\pi\zeta\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}\,d\zeta\end{aligned}$$

であるから、$|\zeta|\ge R>|z|$ に注意して、

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta\right| &\le \frac{|z|}{2}\int_C |\cot\pi\zeta|\frac{1}{|\zeta|\cdot|\zeta-z|}\,|d\zeta| \le \frac{|z|}{2}\int_C 2\frac{1}{|\zeta|(|\zeta|-|z|)}\,|d\zeta| \\ &\le |z|\int_C \frac{1}{R(R-|z|)}\,|d\zeta| \le |z|\cdot 8R\cdot\frac{1}{R(R-|z|)} \\ &= 8|z|\frac{1}{R-|z|}\to 0 \quad (N\to\infty).\blacksquare\end{aligned}$$

例 3.25 ($1/\sin^2$ の部分分数展開) $\pi\cot\pi z$ の部分分数展開

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$$

の右辺は、各項が正則関数の、広義一様収束級数であるから、命題 3.14 によって、項別微分可能で、その結果も広義一様収束級数である:

$$\pi\cdot\left(-\frac{\pi}{\sin^2\pi z}\right) = -\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{(z-n)^2}+\frac{(-1)}{(z+n)^2}\right).$$

整理して

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right).\blacksquare$$

3.6 無限乗積

この項の大枠は神保 [10] による。(整関数の因数分解について、楠・須川 [15] に書いてあることを紹介すると良いかも…)

(授業では時間が限られているので、$\pi\sin\pi z$ の乗積表示くらいしか出せないが、Riemann のゼータ関数の表示 (3.10) なども顔くらい見せよう。)

定義 3.26 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数列で、有限個の n を除いて $a_n \neq 0$ を満たすとする。

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n \neq 0$ の場合: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{N} a_n$ が極限 p を持ち、$p\neq 0$ のとき、そのときに限り、$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するといい、値 (積) は p であるという: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n = p.$

(ii) $(\exists n\in\mathbb{N})\ a_n = 0$ の場合: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{\substack{1\le n\le N\\ a_n\neq 0}} a_n$ が極限 p を持ち、$p\neq 0$ のとき、$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するといい、値 (積) は 0 であるという: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$

(i) の場合しか考えない、という流儀のテキストもある。

次のように書いてあるテキストもあるが、上と同じであることはすぐ分かる。

定義 3.27 (無限積の収束と値) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ とする。無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が**収束する**とは、ある自然数 N が存在して、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i) $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n\geq N)\ a_n\neq 0.$

(ii) 極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=N}^{m} a_n$ が存在して、0 ではない。

またこのとき、無限積の値 (積) を

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \prod_{n=1}^{N-1} a_n \times \lim_{m\to\infty}\prod_{n=N}^{m} a_n$$

で定める。

注意 3.28 (1) 収束するしないは、有限個の a_n にはよらない。

(2) 無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ が成り立つ。実際、定義 3.27 の記号を用いると、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=N}^{m} a_n$ が p であれば、$p\neq 0$ であり、$n>N$ であるとき

$$a_n = \prod_{j=N}^{n} a_j \Bigg/ \prod_{j=N}^{n-1} a_j$$

であり、$n\to\infty$ とすると $\dfrac{p}{p}=1$ に収束することが分かる。■

ゆえに収束する無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して

$$a_n = 1 + u_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定めるとき

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

$|u_n|$ が小さいことが分かれば、次のように積を和に直して考えることが出来る。

$$\prod_{n=N}^{m} a_n = \prod_{n=N}^{m} (1+u_n) = \exp\left[\sum_{n=N}^{m} \mathrm{Log}\,(1+u_n)\right].$$

対数関数の主値 Log は $\mathbb{C}$ 全体では定義されないが、$|u_n| < 1$ としてしまえば問題は生じない。

定義 3.29 (無限積の絶対収束) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ とする。無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が**絶対収束**するとは、$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が絶対収束することをいう。ただし u_n は $a_n = 1 + u_n$ で定めるとする。

命題 3.30 (無限積が絶対収束すれば収束する) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ とする。無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ が収束するならば、$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ は収束する。

証明　仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ は収束する。ゆえに $u_n \to 0$ が成り立つので、ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |u_n| \leq \frac{1}{2} \quad (\text{このとき } 1 + u_n \neq 0).$$

対数関数の主値 Log は

$$\mathrm{Log}\,(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n \quad (|u| < 1)$$

を満たすので、$|u| < \frac{1}{2}$ のとき

$$|\mathrm{Log}\,(1+u)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u|^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u|^n = \frac{|u|}{1-|u|} \leq 2\,|u|\,.$$

ゆえに $n \geq N$ のとき

$$|\mathrm{Log}\,(1+u_n)| \leq 2\,|u_n|\,.$$

仮定より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} 2\left|u_n\right|$ は収束するので、優級数の定理から、$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1+u_n)$ は絶対収束する。ゆえに

$$\prod_{n=N}^{m} a_n = \prod_{n=N}^{m} (1+u_n) = \exp\left(\sum_{n=N}^{m} \mathrm{Log}\,(1+u_n)\right)$$

は $m \to \infty$ のとき $\displaystyle\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1+u_n)\right) \neq 0$ に収束する。ゆえに $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。■

正則関数の無限積を考えよう。値 (積) が正則関数になるためには、収束の一様性が鍵になると予想できる人も多いであろう。実際、次の定理が成り立つ。

命題 3.31 (無限積に関する Weierstrass の M テスト) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の正則関数列とする。また $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は条件

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall z \in \Omega)\ |u_n(z)| \le M_n.$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する。

を満足するとする。このとき、以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) $\displaystyle f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n(z))$ は Ω で絶対収束し、f は正則である。

(2) $f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ 1+u_n(z) = 0.$

(3)
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}.$$

(これを対数微分と呼ぶ。)

証明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$ ゆえにある自然数 N が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad M_n \le \frac{1}{2}.$$

上の命題の証明と同様にして $|u_n(z)| \le M_n \le \dfrac{1}{2}$ であるから、

$$|\mathrm{Log}\,(1+u_n)| \le 2\,|u_n(z)| \le 2M_n.$$

Weierstrass の M test により、

$$g(z) := \sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1+u_n(z))$$

は、Ω で一様に絶対収束する。ゆえに g は Ω で正則である。$m > N$ のとき

$$\sum_{n=1}^{m}(1+u_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1+u_n(z))\exp\left(\sum_{n=N}^{m}\mathrm{Log}\,(1+u_n(z))\right).$$

これは、$m \to \infty$ とすると、正則な関数 $f(z) := \prod_{n=1}^{N-1}(1+u_n(z))\exp g(z)$ に収束する。

$\exp g(z) \neq 0$ より

$$f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}) \quad 1 + u_n(z) = 0.$$

有限個の因数の積に対する対数微分の公式 (これは帰納法で証明できる)

$$f = \prod_{n=1}^{N} f_n \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} + g'(z).$$

g を定義する級数は一様収束するので、

$$g'(z) = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}.$$

ゆえに

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}.\blacksquare$$

注意 3.32 (対数微分について) ある年度のレポート課題に無限積の問題を出して、勘違いレポートが続出したので念のため。

対数微分と呼ぶ理由は、$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ の両辺の対数を取り、右辺を和に分けた

$$\log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+u_n(z))$$

を項別微分した形をしているということであろうが、複素対数関数は多価関数であり、$\log(ab) = \log a + \log b$ も無条件では成り立たないので、ここの式変形を正当化して証明に格上げするのは難しい。 $\blacksquare$

例 3.33 (sin **の因数分解)** 有名な Euler の等式

$$\pi\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{3.9}$$

を証明しよう。右辺の無限積について、$u_n(z) = -\dfrac{z^2}{n^2}$ であるから、任意の正の数 R に対して、$D(0;R)$ において

$$|u_n(z)| \le \frac{R^2}{n^2} \quad (z \in D(0;R)), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} < \infty$$

が成り立つから、命題 3.31 が適用出来て、無限積は $D(0;R)$ で絶対収束し、その積 $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則かつ、その対数微分は

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(\pi z)'}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{1-z^2/n^2} = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

この右辺は $\pi \cot \pi z$ の部分分数展開であるから、

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot \pi z = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z}.$$

これから

$$\left(\frac{f(z)}{\sin \pi z}\right)' = \frac{\sin \pi z \cdot f'(z) - \pi \cos \pi z \cdot f(z)}{\sin^2 \pi z} = \frac{0}{\sin^2 \pi z} = 0.$$

ゆえにある定数 C が存在して、$f(z) = C \sin \pi z$.

$$C = \frac{f(z)}{\sin \pi z} = \frac{z}{\sin \pi z} \cdot \frac{f(z)}{z} = \frac{z}{\sin \pi z} \cdot \pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \to \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \prod_{n=1}^{\infty} 1 = 1 \quad (z \to 0).$$

ゆえに $C = 1$. すなわち $f(z) = \sin \pi z$. ■

以下ガラクタ箱。

例 3.34 (ゼータ関数と素数) $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{は素数}} \frac{1}{1-1/p^s}. \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{1-1/p^s} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$$

であるから、(3.10) の右辺は直観的には

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \cdots\right)\cdots = \sum_{j,k,\ell,\cdots} \frac{1}{(2^j 3^k 5^\ell \cdots)^s}$$

に等しい？？これが実は正しいということを (3.10) は主張している。$\zeta(1) = \infty$ は素数が無限に存在することの根拠とされる。 ■

例 3.35 任意の実数 x に対して、

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n} \quad \text{(Weierstrass の公式)}. \tag{3.11}$$

ただし γ は Euler 定数である:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

これとガンマ関数の相補公式

$$\sin \pi x = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$$

を認めると Euler の公式

$$\sin \pi x = \pi\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

が導かれる。 ■

3.7 Mittag-Leffler の定理

与えられた (極と) 主部を持つ有理型関数の存在を主張するのが、Mittag-Leffler の定理である。

定理 3.36 (Mittag-Leffler の定理) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_n\in\mathbb{C}, \tag{3.12}$$

$$(\forall n,m\in\mathbb{N}: n\neq m)\quad a_n\neq a_m, \tag{3.13}$$

$$|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le\cdots, \tag{3.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty \tag{3.15}$$

を満たし、各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{z-a_n}$ の多項式

$$P_n(z)=\sum_{k=1}^{m_n}\frac{c_{n,k}}{(z-a_n)^k}$$

が与えられているとするとき、適当な自然数列 $\{k_n\}_{n\ge2}$ が存在して、各 $n\ge2$ に対して P_n の 0 の周りの冪級数展開

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}z^k\quad(|z|<|a_n|)$$

の k_n 次の項までの部分和

$$\varphi_n(z):=\sum_{k=0}^{k_n}b_{n,k}z^k$$

を作り、また $\varphi_1(z):=0$ とおくと、

$$f(z):=\sum_{n=1}^{\infty}(P_n(z)-\varphi_n(z))$$

は $\mathbb{C}\setminus\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 上で広義一様収束し、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数を定める。その極の集合は $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ であり、各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、f の a_n における Laurent 展開の主要部は P_n である。

証明　P_n の 0 の周りの冪級数展開は $D(0;|a_n|)$ で広義一様収束するので、$D(0;|a_n|/2)$ では、k_n を十分大きく取れば

$$|P_n(z)-\varphi_n(z)|<\frac{1}{2^n}\quad(z\in D(0;|a_n|/2))$$

が成り立つ。このように $\{k_n\}_{n\ge2}$ を選んでおけば良い。

実際、任意の正数 R に対して、$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$ であるから、$(\exists N_R\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n>N_R)$ $|a_n|>2R$. このような n に対して P_n は $D(0;R)$ で正則で、

$$h_R(z):=\sum_{n=N_R+1}^{\infty}(P_n(z)-\varphi_n(z))$$

は $D(0;R)$ で一様収束する。ゆえに $h_R(z)$ は $D(0;R)$ で正則である。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N_R}\left(P_n(z)-\varphi_n(z)\right)+h_R(z)$$

であるから、f は $D(0;R)$ で有理型で、.... (工事中) ■

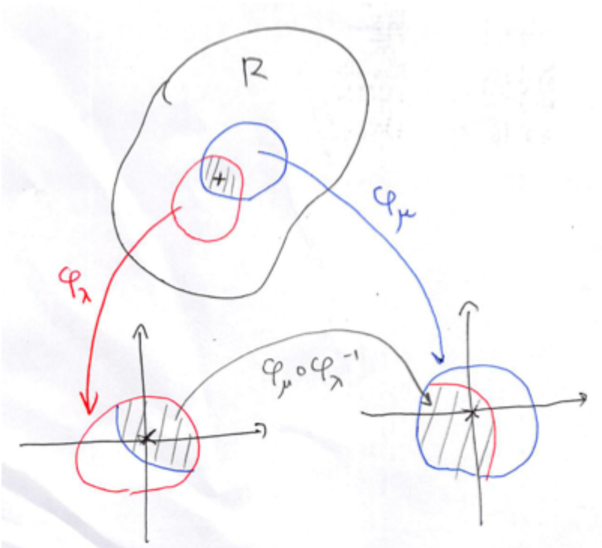
$n=1$ の場合を特別扱いする理由は、$a_1=0$ ということがあり得るからである。$a_1\neq a_2$, $|a_2|\le|a_3|\le\cdots$ であるから、$n\ge 2$ のとき $|a_n|>0$ であることに注意する。

Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846–1927, スウェーデンの Stockholm に生まれ、Stockholm にて没する) は論文誌 Acta-Mathematica を創刊した。

4 無限遠点と Riemann 球面 (無限遠点を仲間に入れる)

複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えた $\widehat{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に色々便利な構造を加えたものを考える (最後は留数 $\mathrm{Res}(f;\infty)$ まで定義する)。それは Riemann 球面と呼ばれるが、Riemann 面 (1 次元複素多様体) と呼ばれる重要な概念の典型例にもなっている。

Riemann 面とは、昔風に言うと、$\mathbb{C}$ の開集合を貼りあわせて出来るものである。もう少し現代風に言うと、位相空間で、局所的に $\mathbb{C}$ の開集合と同相であり、“座標変換” が正則関数になっているもののことである。



Riemann 面について、簡単過ぎる説明 (典型的な多価関数の Riemann 面に限定して素朴に説明) と、(3 年生向けにはかなり) 高度な説明の両極端が多いが、田村 [11] はその間を目指した貴重な参考書である。

入門書である志賀 [16] に書いてあることは、間接的かもしれないが参考になる。

4.1 無限遠点の導入

4.1.1 はじめに

無限遠点 (無限大, infinity, point at infinity) ∞ について。

複素数の世界 (複素平面 $\mathbb{C}$) に、新たに[19] 1 点 ∞ を付け加えて、これまでの $\to\infty$ (絶対値をいくらでも大きくする、絶対値が発散する) が、点 ∞ に近づける、収束することを意味するように、必要なことを定義する。

実数世界と複素数世界の無限大の違い

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは区別を強調するため、実数世界の ∞ は $+\infty$ と書くことにする。

実数の世界には、$-\infty$ というものもあって、これは $+\infty$ とは違うものである。数直線で言うと、 $+\infty$ は右の果て、$-\infty$ は左の果てである。

$$-\infty=(-1)\cdot(+\infty)\neq+\infty$$

が成り立つ。

複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$(-1)\cdot\infty=\infty$$

である。

4.1.2 lim と ∞

これまで $+\infty, -\infty, \infty$ は、lim に現れるものであった。それを復習しよう。

実関数の場合 f を実関数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$, $a\in\overline{I}$, $A\in\mathbb{R}$ とする。

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\quad (\forall\varepsilon>0)\quad(\exists\delta>0)\quad(\forall x\in I)\quad |x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty \quad\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\quad (\forall U\in\mathbb{R})\quad(\exists\delta>0)\quad(\forall x\in I)\quad |x-a|<\delta\Longrightarrow f(x)>U.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\quad (\forall\varepsilon>0)\quad(\exists R\in\mathbb{R})\quad(\forall x\in I)\quad x>R\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

問 5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ はどういうことか？ 解答へ

問 6. $\to+\infty$ の代りに $\to-\infty$ とすると？ 解答へ

[19] 念のために注意しておく。∞ は複素数ではない。

複素関数の場合　f を複素関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(\Omega \subset \mathbb{C})$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

$$\lim_{z\to a} f(z) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists\delta > 0) \quad (\forall z \in \Omega) \quad |z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U \in \mathbb{R}) \quad (\exists\delta > 0) \quad (\forall z \in \Omega) \quad |z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > U.$$

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists R \in \mathbb{R}) \quad (\forall z \in \Omega) \quad |z| > R \Longrightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

問 7. $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ はどういうことか？　解答へ

例 4.1 実関数の場合、

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

は発散する。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ ではないことに注意する。

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x} = -\infty$$

が成り立つ。一方、複素関数の場合、

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty$$

が成り立つ。■

問 8. これを証明せよ。　解答へ

問 9. $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0$ を示せ。　解答へ

例 4.2 (もう少し詳しく実関数の極限との相違点) 対応する実関数の極限との微妙な違いに注意すること。

以下、毎回実関数、複素関数と書くのは面倒なので、特に断らない限り、変数の名前に z を用いた場合は複素関数、x を用いた場合は実関数とする。

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z^n = \infty$. (Cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = \pm\infty$ (n が偶数のとき $+$, n が奇数のとき $-$))

より一般に次数が 1 以上の多項式 (定数でない多項式) $P(z)$ に対して、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^n} = \infty$. (Cf. n が偶数ならば、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n} = +\infty$. n が奇数ならば、$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^n} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^n} = -\infty$ であるから、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}$ は存在しない。)

$\displaystyle\lim_{z\to\infty}\exp z$ は存在しない。(Cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.)

もちろん $\displaystyle\lim_{z\to 0}\sin z = 0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{\sin z} = \infty$. 同様に $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2}\cos z = 0$, $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2}\tan z = \infty$. ■

対数の主値 $\operatorname{Log} z$ について、$\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)\\ z\to\infty}} \operatorname{Log} z = \infty$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)\\ z\to 0}} \operatorname{Log} z = \infty$. $\log z$ は多価であるが、$\operatorname{Re}\log z = \log|z|$ (右辺の $\log$ は実関数としての $\log$) なので、$|\log z| \ge \log|z|$ (右辺

の log は実関数としての log). ゆえに実は主値に限定しなくても、やはり $\lim_{z\to\infty}\log z=\infty$, $\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\\ z\to 0}}\log z=\infty$.

冪乗 $\mathbb{C}\setminus\{0\}\ni z\mapsto z^\alpha$ も一般には多価関数であるが、$\alpha\in\mathbb{R}$ の場合は $|z^\alpha|=|z|^\alpha$ (右辺は実関数としての冪乗) であるから、

(i) $\alpha>0$ のとき、$\lim_{z\to\infty}z^\alpha=\infty$, $\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}z^\alpha=0$.

(ii) $\alpha<0$ のとき、$\lim_{z\to\infty}z^\alpha=0$, $\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}z^\alpha=\infty$.

ここに書いてある式を覚えようと努力することはお勧めしない。むしろ、自分でどうなるか確かめられる (計算できる) ようにしておくべきである。この辺は三角関数にからむ公式をどこまで覚えるかという話と似ている。確実に覚えておける公式 (それは人によって異なる[20]) から、他の公式をどうやって導くかを体得するのが望ましい。

($|\log z|\ge\log|z|$ 等が要点になるのかも。)■

問 1 の解答　$(\forall U\in\mathbb{R})\ (\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\ x>R\Rightarrow f(x)>U$. ■

問 2 の解答　例えば $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ は、$(\forall L\in\mathbb{R})\ (\exists\delta>0)\ (\forall x\in I)\ |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<L$. ■

問 3 の解答　$(\forall U\in\mathbb{R})\ (\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall z\in\Omega)\ |z|>R\Rightarrow|f(z)|>U$. ■

問 4 の解答　$\lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z}=\infty$ だけ証明する。$z\mapsto\dfrac{1}{z}$ は $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が定義域である。任意の $U\in\mathbb{R}$ に対して $\delta:=\dfrac{1}{|U|+1}$ とおくと、$\delta>0$ で、$|z|<\delta$ を満たす任意の $z\in\Omega$ に対して

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}>\frac{1}{\delta}=|U|+1>|U|\ge U.$$

これは $\lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z}=\infty$ を示している。■

問 5 の解答　$z\mapsto\dfrac{1}{z}$ は $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が定義域である。任意の $\varepsilon>0$ に対して $R:=\frac{1}{\varepsilon}$ とおくと、$R\in\mathbb{R}$ で、$|z|>R$ を満たす任意の $z\in\Omega$ に対して

$$\left|\frac{1}{z}-0\right|=\frac{1}{|z|}<\frac{1}{R}=\varepsilon.$$

これは $\lim_{z\to\infty}\dfrac{1}{z}=0$ を示している。■

[20]筆者の場合は、sin, cos の加法定理は高校生のとき以来正確に覚えていられるようなので (ちなみに tan はダメです)、いつもそこからスタートするが、人によっては、オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (と指数法則) や、原点のまわりの回転を表す行列 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (と行列の積の定義) からスタートするかもしれない。一方もっとたくさんの公式を苦労なく覚えておける、という人もいるだろう。

4.1.3 四則

前項に出て来る ∞ は独立した意味を持つモノではない (∞ 単独で出て来るわけでなくて、必ず "$\to\infty$" あるいは $\lim =$ の右辺という形で現れ、それは絶対値がどんな数よりも大きくなるという意味であった)。

∞ を新しい点 ($\infty\notin\mathbb{C}$) として、$\mathbb{C}$ にそれをつけ加えて拡張したものを $\widehat{\mathbb{C}}$ あるいは $\mathbb{P}^1$ と書く:

$$\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{P}^1=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

(これ (特に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と書いたとき) は、**1 次元複素射影空間**と呼ばれるものであるが、ここでは後で正式に紹介する「Riemann 球面」と呼び名を使うことを推奨する。)

余談 4.3 実関数の世界では、テキストによっては、$\mathbb{R}$ に $+\infty$ と $-\infty$ を添加した、**補完実数直線** $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ を導入するものがある。 ■

∞ の四則 $\lim$ と「合う」ように次のように定めることもある。

$$(\forall a\in\mathbb{C})\quad a+\infty=\infty+a=\infty.$$

$$(\forall b\in\mathbb{C}\setminus\{0\})\quad b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty.$$

$$\infty\cdot\infty=\infty.$$

$$(\forall a\in\mathbb{C}\setminus\{0\})\quad \frac{a}{0}=\infty.$$

$$(\forall b\in\mathbb{C})\quad \frac{b}{\infty}=0.$$

しかし、$\infty+\infty$ や $0\cdot\infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

そんなので何の役に立つ？例えば 1 次分数変換[21]

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad (a,\,b,\,c,\,d \text{ は } ad-bc\neq 0 \text{ を満たす複素数の定数})$$

は、$\mathbb{C}$ の範囲で考えると、定義できない点もあるし、結構煩わしいことが起きるが、$\widehat{\mathbb{C}}$ を導入すると、$f\colon\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ が同相写像 (全単射かつ両連続) になる (非常にすっきりとする)。

例 4.4 ((前倒しで) 1 次分数変換と ∞) $f(z)=\dfrac{z+2}{3z+4}$ は、"普通に" 考えると、$z\neq-\dfrac{4}{3}$ に対して定義できる。つまり $f\colon\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\to\mathbb{C}$ である。これは単射 ($z_1\neq z_2 \implies f(z_1)\neq f(z_2)$) であるが、全射ではない。実際、$f(z)=\dfrac{1}{3}$ を満たす z は存在しない ($\dfrac{z+2}{3z+4}=\dfrac{1}{3}$ は $3(z+2)=3z+4$ と同値で、これは解を持たないことは明らか)。ところで

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1+2/z}{3+4/z}=\frac{1}{3},\qquad \lim_{\substack{z\neq-4/3\\ z\to-4/3}}f(z)=\infty$$

[21] 少し後で詳しく扱う。

であることに注目しよう。そこで

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \dfrac{z+2}{3z+4} & \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\right) \\ \infty & \left(z = -\dfrac{4}{3}\right) \\ \dfrac{1}{3} & (z = \infty) \end{cases}$$

とおくと、$\widetilde{f}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で、$\widetilde{f}$ は全単射になる。また

$$\lim_{z\to -4/3} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}\left(-\frac{4}{3}\right), \quad \lim_{z\to\infty} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(\infty)$$

であるので、後で $\widehat{\mathbb{C}}$ に (この lim と整合する) 位相を定めると $\widetilde{f}$ は連続になる。実は $\widetilde{f}^{-1}$ も同様の 1 次変換になるので連続で、$\widetilde{f}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は**同相写像** (homeomorphism) になる。■

4.1.4 幾何学的イメージ — Riemann 球面

$\widehat{\mathbb{C}}$ は 3 次元空間内の球面と同一視できることを説明する。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $(x_3 = 0)$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

$\forall P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像 $\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \mapsto P' \in H = \mathbb{C}$ を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

$P' = (x, y, 0) = x + iy$ とすると、簡単な計算 (与えられた 2 点を通る直線と、与えられた平面との交点を求める計算) により

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}, \quad x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

問 10. このことを確かめよ。 解答へ

$\varphi\colon S \setminus \{N\} \to H$ は全単射である。このことは幾何学的イメージから明らかであるが、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ が次のように具体的に x_1, x_2, x_3 について解けることからも分かる[22]。

$$|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}.$$

[22]念のため、少し書いておく。$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ であるから、$|z|^2 = x^2 + y^2 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \dfrac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$. これを x_3 について解いて、$x_3 = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$. これから $1 - x_3 = \dfrac{2}{|z|^2 + 1}$ が導かれるので、$x_1 = x(1 - x_3) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \cdot \dfrac{2}{|z|^2 + 1} = \dfrac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}$. 同様に $x_2 = y(1 - x_3) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \cdot \dfrac{2}{|z|^2 + 1} = \dfrac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}$.

φ(北半球) $= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, φ(赤道) $= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, φ(南半球) $= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, φ(南極) $= 0$ が成り立つ。

この $\varphi\colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ の拡張 $\varphi\colon S \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を

$$\varphi(N) := \infty$$

で定義する (拡張した写像を同じ文字 φ を用いて表している)。この φ はやはり全単射である。

こうして、$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と対応づけた球面 S のことを **Riemann 球面** (the **Riemann sphere**) と呼ぶ。

もともと $P \to N$ のとき、$\varphi(P) \to \infty$ であるから、$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を適切に定義すれば (この後、実際にそれを行う)、φ は N で連続となると期待できるが、実は $\varphi\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ も $\varphi^{-1}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to S$ も連続である。つまり φ は同相写像であり、位相的にも $\widehat{\mathbb{C}}$ は S と同一視できる (ここでは四則演算は無視している)。そこで $\widehat{\mathbb{C}}$ 自身を Riemann 球面と呼ぶことも多い。

注意 4.5 実は、Riemann 球面 S の定義は、本によって異なる。S は $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1/2)^2 = (1/2)^2$ であるとしたり、北極の代わりに南極からの立体射影を用いたり (おっと教科書 [10] はこっちでしたか…)、色々なバリエーションがある。■

この辺はコンピューターを使って、うまい可視化が出来ないかな、と思うのだけど…

問 6 の解答 $N(0,0,1)$ と $P(x_1,x_2,x_3)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ t(x_3 - 1) + 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

平面 $z = 0$ との交点では、$t(x_3 - 1) + 1 = 0$ より $t = \dfrac{1}{1 - x_3}$. ゆえに

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

ゆえに $\varphi(x_1,x_2,x_3) = x + iy = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$. ■

4.1.5 $\widehat{\mathbb{C}}$ に位相を導入

点列の極限や、部分集合上で定義された関数の極限や連続性などを定義するには、位相と呼ばれる構造を定義する必要がある。

$\mathbb{C}$ については、任意の二点 z_1, z_2 の距離 $|z_1 - z_2|$ を用いて位相を定義した。これは $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ のときと同様のやり方で、慣れているので分かりやすいと思われるが、関数論の多くのテキストでは、無限遠点の "基本近傍系" を新たに定めることで $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を定義している。以下それを説明しよう (そういう標準的な説明が理解できるようになってほしい)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の各点 a に対して (後で a の基本近傍系と呼ばれることになる) 集合族 $\mathcal{U}_a$ を次式で定める:

$$\mathcal{U}_a := \{U(a;r) \mid r > 0\}. \tag{4.1}$$

ここで $U(a;r)$ は、a の r 近傍と呼ばれる集合で、次のように定義される。

(a) $a \in \mathbb{C}$ (a が複素数) の場合

$$U(a;r) = D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\} \qquad \text{(これはおなじみかも…)}.$$

(b) $a = \infty$ の場合

$$U(a;r) := U_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}$$

($|\infty| = +\infty$ とみなして、U_r のことを $U_r = \left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; r < |z| \le +\infty\right\}$ とも表す。)

天下りになるが、この $\mathcal{U}_a$ を用いて、次のように $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合、点列の収束 (極限)、関数の連続性を定義する。

定義 4.6 ($\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合、点列の収束、関数の連続性) (a) $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall a \in \Omega)$ $(\exists U \in \mathcal{U}_a)$ $U \subset \Omega$.

(b) $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が、$a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に収束 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall U \in \mathcal{U}_a)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)$ $z_n \in U$.

(c) $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $f\colon \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$, $a \in \Omega$ とするとき、f が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall V \in \mathcal{U}_{f(a)})$ $(\exists U \in \mathcal{U}_a)$ $f(U \cap \Omega) \subset V$.

もともとの $\mathbb{C}$ の場合と比べてみよう

上の定義と比べやすくするため、距離の代わりに円盤を使って表現し直してある。

(a) $\Omega \subset \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall a \in \Omega)$ $(\exists \varepsilon > 0)$ $D(a;\varepsilon) \subset \Omega$.

(b) $\mathbb{C}$ 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $a \in \mathbb{C}$ に収束 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)$ $z_n \in D(a;\varepsilon)$.
(普通 $|z_n - a| < \varepsilon$ と書くところを、$z_n \in D(a;\varepsilon)$ と書き換えてある。)

(c) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ とするとき、f が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $f(D(a;\delta) \cap \Omega) \subset D(f(a);\varepsilon)$.
(普通 $(\forall z \in \Omega\colon |z-a| < \delta))$ $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ のように書くところを、$f(D(a;\delta)\cap\Omega) \subset D(f(a);\varepsilon)$ と書き換えてある。)

このように定義すると、以下が成り立つ。

- 開集合系の公理[23]が成立する。

[23] (i) $\emptyset$ と $\widehat{\mathbb{C}}$ は開集合, (ii) 二つの開集合の共通部分は開集合, (iii) 開集合からなる集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の合併 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合.

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ の場合は、Ω が $\mathbb{C}$ の開集合であることと $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合であることは同値である。
- $z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in \mathbb{C}$ であるとき、$\{z_n\}$ が $\mathbb{C}$ で a に収束することと、$\widehat{\mathbb{C}}$ で a に収束することは同値である。
- $z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ であるとき、$\{z_n\}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ で ∞ に収束することと

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |z_n| > R$$

が成り立つことは同値である。

問 11. このことを確かめよ。 解答へ

余談 4.7 (きちんとやるには) 一般に、与えられた集合 X に対して、その中の点列の極限や、関数の連続性を考えるには、位相と呼ばれる構造を用いる。X の位相を定義するのは、X の開集合系 (開集合の全体) を定めるやり方を採用することが多いが、X の各点 a に対して、a の基本近傍系と呼ばれる集合族を定めるやり方もある。これについては、位相空間の詳し目のテキスト (例えば定評のある松坂 [17] や、古典的な定番テキストである河田・三村 [18]) を見ると良い。■

複素数 a に対して、$\widehat{\mathbb{C}}$ で a に収束というのは、これまでと同じ意味 ($\mathbb{C}$ で a に収束) で、$\widehat{\mathbb{C}}$ で ∞ に収束というのは、これまで $\to \infty$ (無限大に発散) と言ってきたことに相当する。

(これまで、普通は「十分小さい ε」だったのに、「十分大きい R」が対応するのは違和感があると思うが、そもそも ε-δ 論法の論理式に「大きい」、「小さい」という言葉は入っていないことを思い出そう。)

例 4.8 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ は、$z = 0$ で連続である。実際、上の規約により $f(0) = \dfrac{1}{0} = \infty$,

$$\lim_{\substack{z \neq 0 \\ z \to 0}} f(z) = \infty$$

であるから、$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0)$ が成り立つ。同様に f は $z = \infty$ でも連続である。■

実は $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は、次式で定義される d を距離として距離空間になる:

$$d(z, z') := \left\| \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z') \right\|. \tag{4.2}$$

(ただし、$\varphi \colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ は立体射影で、$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^3$ のベクトルの長さ $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} x_j^2}$ を表す。)

これは要するに、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ の距離を、対応する Riemann 球面 S 上の二点 $\varphi^{-1}(z)$, $\varphi^{-1}(z')$ の $\mathbb{R}^3$ における距離として定義してるわけである。

問 12. 特に $z, z' \in \mathbb{C}$ の場合は、次のように書けることを示せ。

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}.$$

解答へ

この距離 $d(\cdot, \cdot)$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相を定めることが出来るが、それは上の基本近傍系で定めた位相と同じであることが証明できる (ここでは省略する)。

メモ　(別のところに書いたものを持って来た。)
位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。
X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。
$\mathbb{C}$ においては、$a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。
新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ $(a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty;R) \mid R \in (0,+\infty)\}, \quad U(\infty;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

4.2　無限遠点での座標

無限遠点の近傍における「局所座標」というものを導入する。それを用いることで無限遠点での微分可能性などが定義できる (天下りに感じられるかもしれない。実はこれは Riemann 面の一般論から来ている。)。
$z = \infty$ が、$f(z)$ の孤立特異点、正則点 (除去可能特異点)、極、(孤立) 真性特異点である、という定義は、$z = \dfrac{1}{w}$ で変数変換した $g(w) := f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ の $w = 0$ での性質で定める。ただし留数については少し注意が必要である。

定義 4.9 (∞ が孤立特異点、正則点、極、真性特異点とは) ∞ が f の**孤立特異点** (isolated singularity) であるとは、$(\exists R \in (0,+\infty))$ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ は f の定義域に含まれ、そこで f は正則であることをいう。このとき、

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) \quad (0 < |w| < \frac{1}{R})$$

とおくと、0 は g の孤立真性特異点となる。この g を使って、f の孤立特異点 ∞ の分類をする。

(i) ∞ が f の**除去可能特異点** (removable singularity, **正則点**, regular point) であるとは、0 が g の除去可能特異点であることをいう。

(ii) ∞ が f の**極** (pole) であるとは、0 が g の極であることをいう。0 が g の k 位の極であるとき、∞ は f の k 位の極であるという。

(iii) ∞ が f の **(孤立) 真性特異点** (essential singularity) であるとは、0 が g の孤立真性特異点であることをいう。

(注意: 領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ のことを、$R < |z| < +\infty$ と表すことがある。$\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \,\middle|\, |z| > R\right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $R < |z| \le +\infty$ と表す。)

命題 4.10 (∞ のまわりの Laurent 展開とそれに基づく孤立特異点の分類) ∞ が f の孤立真性特異点とするとき、(定義によって) ある $R \in (0,+\infty)$ が存在して f は $R < |z| < \infty$ で正則であるので、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (R < |z| < +\infty) \tag{4.3}$$

が成り立つ。実は

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z};\ R < r < \infty) \tag{4.4}$$

である。さらに以下の (1)〜(3) が成り立つ。

(1) ∞ が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n = 0$.

(2) ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ $[a_k \ne 0$ かつ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n > k)$ $a_n = 0]$.

(3) ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon n > k)$ $a_n \ne 0$.

証明　「複素関数」で、円環領域 $A(c; R_1, R_2)$ $(0 \le R_1 < R_2 \le +\infty)$ で正則な関数は Laurent 展開が出来ることを証明済みである。$A(0; R, +\infty)$ について適用して、(4.3) を満たす $\{a_n\}$ が一意的に存在し、(4.4) が成り立つことが導ける。

一方、g は $A(0;0,1/R)$ で正則であるから、0 は g の孤立特異点で、$(\exists \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{w^n} \quad (0 < |w| < 1/R).$$

実は $0 < r < 1/R$ を満たす任意の r に対して

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

これから

$$f(z) = g(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n \quad (R < |z| < \infty).$$

(4.3) の形の級数展開の一意性から

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad b_{-n} = a_n.$$

ゆえに

- ∞ が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_{-n} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = 0$.
- ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ $[b_{-k} \neq 0$ かつ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n > k)\ b_{-k} = 0]$ $\Leftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ $[a_k \neq 0$ かつ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n > k)\ a_k = 0]$
- ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon n > k)\ b_{-n} \neq 0]$ $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon n > k)\ a_n \neq 0]$ ■

(4.3) を、f の孤立特異点 ∞ のまわりの **Laurent 展開**、また $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ をその**主部**と呼ぶ。

具体的に a_n を求めるのに、(4.4) はあまり役に立たないことが多い。f が有理関数の場合は比較的簡単な計算法がある (後述する)。

$c \in \mathbb{C}$ の場合と同様に、孤立特異点の種類は、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z)$ によって判定できる。

命題 4.11 (孤立特異点 ∞ の $\lim$ による特徴づけ) ∞ が f の孤立特異点であるとき、次の (1),(2),(3) が成り立つ。

(1) ∞ が f の正則点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ z\to\infty}} f(z)$ は $\mathbb{C}$ 内で極限を持つ (実は a_0 に等しいことが分かる)

(2) ∞ が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ z\to\infty}} f(z) = \infty$.

(3) ∞ が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ z\to\infty}} f(z)$ は $\mathbb{C}$ 内で収束しないし、$= \infty$ でもない ($\widehat{\mathbb{C}}$ で収束しない)

証明 $z = \dfrac{1}{w}$ の関係があるとき、$z \to \infty \Leftrightarrow w \to 0$ であるから、有限な孤立特異点の特徴づけの定理から明らかである。■

注意 4.12 後で **Riemann 面** (1次元複素多様体) を学ぶと、$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が Riemann 面で、∞ の座標近傍 $U_R = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; R < |z| \le \infty \right\}$ における局所座標が $w = \dfrac{1}{z}$ であると理解できる。■

例 4.13 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ は、$z = \infty$ を正則点 (除去可能特異点) とする。実際、

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{w}} = w$$

は $w = 0$ を正則点に持つから。これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$ (有限の極限！) からも明らかである。■

例 4.14 $f(z) = z$ は、$z = \infty$ を極に持つ。実際、

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w}$$

は $w = 0$ を極に持つから。これは $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z = \infty$ からも明らかである。■

復習: $c \in \mathbb{C}$ での Laurent 展開、留数解析

$c \in \mathbb{C}$ が複素関数 f の**孤立特異点** (isolated singularity) であるとは、$(\exists\varepsilon > 0)$ f は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\}$ (これは $D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}$ とも書ける) を定義域に含み、そこで正則であることをいう。このとき、$(\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z - c| < \varepsilon).$$

この右辺の級数を、f の c における (c のまわりの) **Laurent 級数**、この級数を求めることを f を c において **Laurent 展開**する、という。

f の孤立特異点 c は以下の 3 つに分類できる。

(i) c が**除去可能特異点** (removable singulariry, 正則点, regular point) であるとは、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう。これは次の (a) や (b) と同値である。

(a) $(\exists\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon))$ f は $0 < |z - c| < \varepsilon_1$ で有界である。

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ は $\mathbb{C}$ 内で極限を持つ (実は $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = a_0$)。

(ii) c が**極 (pole)** であるとは、$(\exists k \in \mathbb{N})$ $a_{-k} \neq 0$ かつ $\forall n > k$ $a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう (このとき k を極 c の**位数** (order), c は f の k 位の極と呼ぶ)。これは $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ と同値である。

(iii) c が **(孤立) 真性特異点** (essential singularity) であるとは、$(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists n > k)$ $a_{-n} \neq 0$ が成り立つことをいう。これは $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が $\mathbb{C}$ 内で極限を持たず、かつ $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = \infty$ でもないことを意味する ($\widehat{\mathbb{C}}$ で極限を持たない、とも言い換えられる)。

f の c における**留数** (residue) $\mathrm{Res}(f;c)$ を

$$\mathrm{Res}(f;c) = \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz := a_{-1}$$

で定義する。c のまわりを正の向きに一周する、区分的に滑らかな $D(c;\varepsilon)$ 内の閉曲線 C に対して、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f;c)$$

が成り立つ。

例 4.15 (これはもう少し事前の説明が必要ではないか？カットするか？) $f(z) := \dfrac{z-1}{z+1}$ とするとき、

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\dfrac{1}{w}-1}{\dfrac{1}{w}+1} = \frac{1-w}{1+w}$$

は w の関数として $w=0$ の近傍で正則であるから、f は $z=\infty$ の近傍で正則である (もちろん $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ であるから、と言っても良い)。また $f(\infty) = 1$. ゆえに $g(z) := \mathrm{Log}\,\dfrac{z-1}{z+1}$ も $z=\infty$ で正則で $g(\infty) = 0$. ■

例 4.16 $n \in \mathbb{N}$ とするとき、n 次多項式 $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ について、

$$P\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_0}{w^n} + \cdots + \frac{a_1}{w} + a_0, \quad a_0 \neq 0$$

は $w=0$ は n 位の極に持つから、$z=\infty$ は P の n 位の極である。■

例 4.17 $z=\infty$ は、$\sin z$, $\exp z$ など、多項式でない整関数の (孤立) 真性特異点である。実際、$f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が整関数ならば、

$$(\exists \{a_n\}_{n\geq 0}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z\in\mathbb{C}).$$

多項式でないということは、$a_n \neq 0$ を満たす a_n が無限個あるということである。

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{w^n} + a_0 \quad (w\in\mathbb{C})$$

は、$w \mapsto f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ の $w=0$ のまわりでのローラン展開であるから、$w=0$ はこの関数の (孤立) 真性特異点である。ゆえに ∞ は f の (孤立) 真性特異点である。■

4.3 無限遠点での留数

定義 4.18 (関数の孤立特異点 ∞ における留数) Ω が $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、∞ が f の孤立特異点とする。このとき $(\exists R \in (0,+\infty))$ $(\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \quad (R < |z| < +\infty).$$

が成り立つが、$-a_{-1}$ を f の ∞ における**留数** と呼び、$\operatorname{Res}(f;\infty)$ または $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,dz$ で表す。

$r>0$ として、$z = re^{-i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi])$ で定まる閉曲線を C としよう。これは原点を中心とする半径 r の円周上を、時計回りに一周する閉曲線である。天下りになってしまうが、C は ∞ の周りを正の向きに一周するという。この C に対して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = -a_{-1} = \operatorname{Res}(f;\infty) \tag{4.5}$$

が成り立つ (孤立特異点の周りを正の向きに一周する閉曲線に沿って関数を積分して、$2\pi i$ で割ると留数が得られる)。

少々こじつけ気味に感じられるかもしれないが、C を Riemann 球面 S に映すと、(球面の中心から見て) 北極 N の周りを反時計回りに一周する閉曲線となる。また $w = \dfrac{1}{z}$ により w 平面に写すと、0 の周りを円周 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1/r\}$ に沿って、反時計回りに一周する閉曲線になる。

上の等式は、z 平面で考えても分かるが、w 平面に写して考えても次のように導ける。

$w = 1/z$ とするとき、$dz = -dw/w^2$ であるから、$f(z)\,dz = -\dfrac{g(w)}{w^2}dw$ で、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} f(1/w)\cdot\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw \\ &= -\frac{g(w)}{w^2} \text{ の } w^{-1} \text{ の係数} = -b_1 = -a_{-1}.\end{aligned}$$

注意 4.19 (危険な曲り角) $\operatorname{Res}(f;\infty)$ は、Laurent 展開の主要部の最初の項の係数 a_1 でもないし、$\operatorname{Res}(g;0)$ でもないことに注意しよう。無限遠点が正則点 $(\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = 0)$ であっても、$\operatorname{Res}(f;\infty) \neq 0$ $(-a_{-1} \neq 0)$ ということがありうる。■

注意 4.20 (留数を表す記号について) 我々が教科書としている神保 [10] では、留数を $\operatorname{Res}(f;c)$ でなく $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz$ と書き、線積分や留数は、関数 f でなく、微分形式 $f(z)dz$ に対して定義される、と考えるのが自然であるから、としてある。しかし、この記号を採用してあるテキストはあまり多くない (一松先生の本 [6] には、留数は実は微分形式に対して定義されるものだと書いてあるが、記号はそうなっていない)。やはり書くのに少し面倒だからであろう。しかし、このあたりは、教科書の言い分が良く分かる。■

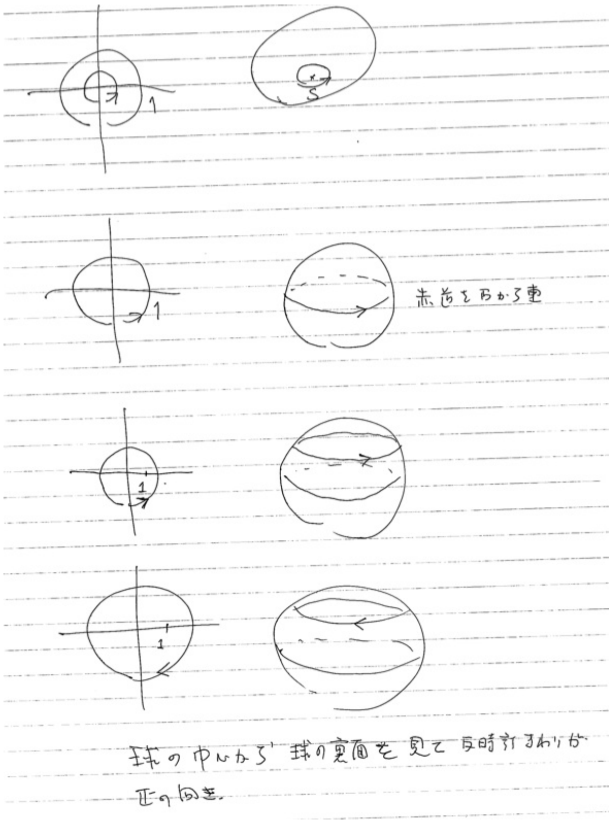


図 3: (まともな図に置き換えよう。z 平面，w 平面, Riemann 球面の 3 つを描いて。)

例 4.21 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ は $z = \infty$ で正則である。

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\ dz = \operatorname*{Res}_{w=0} \left(-\frac{1}{w^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{w}} \right) dw = -\operatorname*{Res}_{w=0} \frac{dw}{w} = -1.$$

もちろん、$f(z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ と見て、$a_n = 0$ $(n \neq -1)$, $a_{-1} = 1$ を求めて、$\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\ dz = -a_{-1} = -1$ としても良い。 ■

例 4.22 (有理関数の ∞ での Laurent 展開の主要部と留数の求め方) 有理関数の ∞ での Laurent 展開の主要部と留数の求め方を例で説明しよう。

$$(*) \qquad f(z) = \frac{z^4 + 10z^2 + 9}{z^2 - z + 2}.$$

この有理関数の $\mathbb{C}$ 内での極は $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ である。$\alpha := \dfrac{1 + \sqrt{7}i}{2}$, $\beta := \dfrac{1 - \sqrt{7}i}{2}$ とおく。

$|\alpha| = |\beta| = 2$ であるから、$D(0; 2)$ で Taylor 展開、$A(0; 2, +\infty)$ で Laurent 展開出来る。後者を求めると良い。

$(*)$ の右辺の分子の多項式 $z^4 + 10z^2 + 9$ を、分母の多項式 $z^2 - z + 2$ で割り算すると、商

z^2+z+9, 余り $7z-9$ であるから、次のように多項式 + 真分数式の形に変形できる:

$$f(z)=\frac{(z^2-z+2)(z^2+z+9)+7z-9}{z^2-z+2}=z^2+z+9+\frac{7z-9}{z^2-z+2}. \tag{4.6}$$

$z^2+z-2=(z-\alpha)(z-\beta)$ と因数分解できるので、

$$\frac{7z-9}{z^2-z+2}=\frac{A}{z-\alpha}+\frac{B}{z-\beta}$$

を満たす A, B が存在する。$7z-9=A(z-\beta)+B(z-\alpha)$ から、

$$A=\frac{9-7\alpha}{\beta-\alpha},\quad B=\frac{7\beta-9}{\beta-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
f(z)&=z^2+z+9+\frac{A}{z}\cdot\frac{1}{1-\alpha/z}+\frac{B}{z}\cdot\frac{1}{1-\beta/z}\\
&=z^2+z+9+\frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2+\frac{B}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{z}\right)^2\\
&=z^2+z+9+A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{z^n}+B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{n-1}}{z^n}\\
&=z^2+z+9+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}}{z^n}\quad(2<|z|<+\infty).
\end{aligned}$$

これが f の ∞ の周りの Laurent 展開である。留数は

$$\mathrm{Res}(f;\infty)=-(A+B)=-\frac{9-7\alpha+7\beta-9}{\beta-\alpha}=-7.$$

あるいは、

$$\mathrm{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}z\frac{7z-9}{z^2-z+2}=-7.$$

(この例は、以前は何か勘違いをして、ひどく回りくどいやり方で計算していた。) ■

注意 4.23 (有理関数の ∞ における Laurent 展開の主部と留数の計算) 落ち着いて振り返ると、有理関数の、∞ における Laurent 展開の主部と留数は一般に次のように簡単な計算で求まる。(Laurent 展開の係数は全部必要になることはあまりなくて、留数さえ分かれば用が足りることが多いので、とても便利である。)

有理関数 $f=\frac{Q}{P}$ の ∞ における Laurent 展開の主部は、割り算の商を計算することで求まる。つまり $Q(z)=q(z)P(z)+r(z)$, $\deg r(z)<\deg P(z)$ として、$f=p+\frac{r}{P}$ となるが、p の 1 次以上の項を集めたものが Laurent 展開の主部である。また留数は、$\mathrm{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty}\dfrac{zr(z)}{P(z)}$. 非常に簡単である。 ■

5 有理関数

f が**有理関数** (**rational function**) であるとは、$f(z)$ が z の有理式であること、つまり

$$(\exists P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]) \quad f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (P(z) \neq 0 \text{ となる } z \in \mathbb{C})$$

が成り立つことをいうのであった。

$P(z)$ と $Q(z)$ の最大公約多項式を求めて、それで割り算することにより (除去可能特異点が正則点になったりするが、関数論的には違いがない[24])、$P(z)$ と $Q(z)$ が互いに素であることを仮定できる。

5.1 有理関数の部分分数分解

(教科書 [10] にこういう内容が用意されているのは、Mittag-Leffler の定理などを意識しているのだろうか？)

有理関数の**部分分数分解** (**partial fraction decomposition**) は、微分積分の授業で、有理関数の不定積分を計算するときにおなじみであろう[25]。ここでは複素関数論の観点から見直してみる。

先に結論を標語的に書いておくと、

有理関数の部分分数分解は、$\widehat{\mathbb{C}}$ 内のすべての極における Laurent 展開の主部の和に等しい。

有理関数 f を

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (P(z),\ Q(z) \text{ は互いに素な複素係数多項式})$$

と表す。$f(z)$ の $\mathbb{C}$ 内の極は $P(z)$ の零点であるので、有限個である。それを $c_1, \ldots, c_r$, さらに、各 c_j における主要部を

$$f_j(z) := \frac{a^{(j)}_{-k_j}}{(z - c_j)^{k_j}} + \cdots + \frac{a^{(j)}_{-1}}{z - c_j}$$

とおく。

$R := \max\{|c_1|, \cdots, |c_r|\} + 1$ とおくと、f は $R < |z| < \infty$ で正則であるから、$\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (R < |z| < +\infty).$$

---

[24] 例えば、$P(z) = z$, $Q(z) = z^2$ のとき、$f(z) = \dfrac{z^2}{z}$ の定義域を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ とみなすか、$f(z) = z$ と簡単化して $\mathbb{C}$ とみなすか、集合論的には大違いであるが、関数論としては区別しない。

[25] そのときは、実関数の範囲で分解するように、判別式が負であるような 2 次式が現れたりしたが、複素関数の場合は、任意の多項式は 1 次式の積に分解されるため、もっと簡単になる。

これを f の ∞ のまわりの Laurent 展開、また正冪の項を集めた

$$f_\infty(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

を、f の ∞ のまわりの Laurent 展開の主部と呼ぶのであった。

$n := \deg Q(z)$, $m := \deg P(z)$, $N := n - m$ とおくとき、

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^N} = a_N \neq 0, \quad (\forall n > N) \quad a_n = 0$$

が成り立つことは容易に分かる。特に

$$f_\infty(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n \quad \left(N \le 0 \text{ のとき、} \sum_{n=1}^{N} = 0 \text{ と考える}\right).$$

さて、

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{r} f_j(z) - f_\infty(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{c_j\}_{j=1}^{r})$$

とおくと、g は $\widehat{\mathbb{C}}$ で極を持たず、至るところ正則である。

特に g は $\mathbb{C}$ で有界である。実際、$\lim_{z\to\infty} g(z) = a_0$ は明らかであるから、

$$(\exists R' > 0)(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \ge R') \quad |g(z)| \le |a_0| + 1$$

が成り立ち、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$|g(z)| \le \max\{M, |a_0| + 1\}, \quad M := \max_{|z| \le R'} |g(z)|.$$

ゆえに Liouville の定理から、g は定数関数である:

$$(\exists C \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad g(z) = C.$$

$z \to \infty$ の極限を考えると、$a_0 = C$. ゆえに

$$f(z) = (a_0 + f_\infty(z)) + \sum_{j=1}^{N} f_j(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{c_j\}_{j=1}^{r}).$$

これは実は $f(z)$ の部分分数分解に他ならない。そのことを理解するために「部分分数分解の一意性」を示そう。

部分分数分解の一意性　部分分数分解については、次のように学んだ人が多いと思われる。任意の有理式 $f(z)$ が与えられたとき、ある手順 (知っているはずなのでここでは省略するが、もし知らなかった場合はきちんと復習して計算できるようにしておく必要がある) に基づいて計算すると、次の ($\sharp$) の形に変形できて、その結果を $f(z)$ の部分分数分解と呼ぶ。計算手順を別にして、「ある形」の部分に焦点を合わせると、次の定理が得られていることになる。

複素係数有理式の部分分数分解

任意の有理式 $f(z)$ に対して、

$$(\exists N\in\mathbb{N}\cup\{0\})(\exists\{a_n\}_{n=0}^N)(\exists r\in\mathbb{N}\cup\{0\})(\exists\{c_j\}_{j=1}^r)(\exists\{m_j\}_{j=1}^r)(\exists\{a_{jk}\}_{\substack{1\le j\le r\\ 1\le k\le m_j}})$$

s.t.

(♯)

$$f(z)=\sum_{n=0}^N a_n z^n+\sum_{j=1}^r\sum_{k=1}^{m_j}\frac{a_{jk}}{(z-c_j)^k}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{c_j\}_{j=1}^r),\quad N=0\text{ または }a_N\neq 0,\quad a_{jm_j}\neq 0.$$

ここで存在を主張している $\{a_n\}$, r, $\{c_j\}$, $\{m_j\}$, $\{a_{jk}\}$ には、以下に示す意味での一意性がある。そのことをその証明のアイディアと一緒に説明しよう。

多項式の係数の一意性は高校以来知っているであろう。すなわち、

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n=\sum_{n=0}^N b_n z^n\quad (z\in\mathbb{C})\quad\Longrightarrow\quad (a_0,a_1,\ldots,a_N)=(b_0,b_1,\ldots,b_N).$$

この事実は色々な証明の仕方があるが、ここでは極限を用いよう。まず、仮定の式を移項した

$$\sum_{n=1}^N (a_n-b_n)z^n=b_0-a_0\quad (z\in\mathbb{C})$$

で $z\to\infty$ として、左辺の極限が有限であるために $a_n-b_n=0$ $(n=1,2,\ldots,N)$. すると左辺は 0 になるので、右辺 $=b_0-a_0=0$. 結局 $(a_0,a_1,\ldots,a_N)=(b_0,b_1,\ldots,b_N)$.

任意の $a_1,\ldots,a_m$ について

$$\lim_{z\to\infty}\sum_{k=1}^m\frac{a_k}{(z-c)^k}=0$$

が成り立つことに注意すると、部分分数分解の多項式部分 $\displaystyle\sum_{n=0}^N a_n z^n$ の一意性はまったく同じ論法で導くことが出来る。

さらに、(i) $a_m\neq 0$ であれば、

$$\lim_{z\to c}\sum_{k=1}^m\frac{a_k}{(z-c)^k}=\infty,$$

(ii) $c\neq c'$ であれば、

$$\lim_{z\to c'}\sum_{k=1}^m\frac{a_k}{(z-c)^k}=\sum_{k=1}^m\frac{a_k}{(c'-c)^k}\quad (\text{特に有限}).$$

この (i), (ii) 二つの事実を用いると、多項式部分以外の部分についても一意性が導かれる。

例 5.1 (有理関数の Laurent 展開の主部を集めて部分分数分解を求める)

$$f(z) := \frac{z^4+3z-1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

この関数 f のすべての極における Laurent 展開の主部を求めることで、$f(z)$ の部分分数分解を求めてみよう (実際にこの $f(z)$ の部分分数分解を求めるには、微分積分で学ぶアルゴリズムの方が簡単であるので、以下の計算はあくまでも、上の議論の確認をするためのものである)。

-2 は $f(z)$ の分母の 1 位の零点であるから、f の 1 位の極であり、

$$\operatorname{Res}(f;-2) = \lim_{z\to-2}(z+2)f(z) = \lim_{z\to-2}\frac{z^4+3z-1}{(z-1)^2} = \frac{(-2)^4+3\cdot(-2)-1}{(-3)^2} = \frac{16-6-1}{9} = 1.$$

ゆえに f の -2 のまわりの Laurent 展開の主部は、$f_{-2}(z) := \dfrac{1}{z+2}$ である。

1 は $f(z)$ の分母の 2 位の零点であるから、f の 2 位の極である。従って f の 1 のまわりの Laurent 展開は、

$$f(z) = \frac{b_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{b_{-1}}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-1)^n$$

の形をしている。これから容易に

$$\begin{aligned}
b_{-2} &= \lim_{z\to1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to1}\frac{z^4+3z-1}{z+2} = \frac{1+3-1}{3} = 1,\\
b_{-1} &= \operatorname{Res}(f;1) = \lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+3z-1}{z+2}\right)\\
&= \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(z^3-2x^2+4z-5+\frac{9}{z+2}\right) = \lim_{z\to1}\left(3z^2-4z+4-\frac{9}{(z+1)^2}\right)\\
&= 3-4+4-\frac{9}{3^2} = 2.
\end{aligned}$$

ゆえに f の 1 のまわりの Laurent 展開の主部は、$f_1(z) := \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{z-1}$ である。

$f(z)$ は $2<|z|<\infty$ で正則である ($\mathbb{C}$ 内で極は -2, 1 のみ) から、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$(\sharp)\qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (2<|z|<\infty).$$

ところで $f(z)$ の分子 z^4+3z-1 を分母 $(z-1)^2(z+2) = z^3-3z+2$ で割ると、商が z, 余りが $3z^2+z-1$ であるから

$$(\flat)\qquad f(z) = z + \frac{3z^2+z-1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

$(\sharp)$ と $(\flat)$ を見比べ、

$$\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2+z-1}{(z-1)^2(z+2)} = 0, \quad \lim_{z\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n} = 0$$

に注意すると

$$a_0 + (a_1 - 1)z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \to 0 \quad (z \to \infty).$$

ゆえに

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

が得られる。ゆえに f の ∞ のまわりの Laurent 展開の主部は、$f_\infty(z) := z$ である。ついでに留数を求めておくと、

$$\mathrm{Res}(f;\infty) = -\lim_{z\to\infty} z\frac{3z^2+z-1}{(z-1)^2(z+2)} = -3.$$

上に述べたように

$$f(z) = f_{-2}(z) + f_1(z) + f_\infty(z) + a_0 = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + z$$

が成り立ち、これが $f(z)$ の部分分数分解である。■

問 13. 微積分で学ぶ方法を用いて、上の例の f を部分分数分解せよ。 解答へ

5.2 有理関数の留数

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (P(z), Q(z) \text{ は互いに素な複素係数多項式})$$

とする。$f(z)$ の $\mathbb{C}$ 内の極を $c_1, \ldots, c_N$ とする ($N = 0$ もあり得る)。$R > 0$ を $\{c_1, \cdots, c_n\} \subset D(0;R)$ を満たすように十分大きく取る (例えば、$N \geq 1$ の場合は $R := \max\{|c_1|, \ldots, |c_N|\} + 1$ とおけば良い)。

このとき、留数定理より、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j).$$

一方、∞ における留数の定義によって、左辺は $-\mathrm{Res}(f;\infty)$ である。従って次の命題を得る。

命題 5.2 (有理関数の Riemann 球面内のすべての留数の和は 0) 有理関数 f の $\mathbb{C}$ 内のすべての極を $c_1, \cdots, c_N$ とするとき、

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;c_j) + \mathrm{Res}(f;\infty) = 0.$$

この命題は一見当たり前 (trivial) であるような気がするかもしれないが、意外とそうではない。この形にまとめておかないと、なかなか気が付かない事実である。

例 5.3 (既に計算してある例で確認) 例 5.1 で関数

$$f(z)=\frac{z^4+3z-1}{(z-1)^2\,(z+2)}$$

について調べたが (Laurent 展開の主部を求めると部分分数分解が出来る、ということの確認をするのが目的であった)、同時に

$$\operatorname{Res}(f;1)=2,\quad \operatorname{Res}(f;-2)=1,\quad \operatorname{Res}(f;\infty)=-3$$

が分かった。確かに

$$\operatorname{Res}(f;1)+\operatorname{Res}(f;-2)+\operatorname{Res}(f;\infty)=2+1+(-3)=0.\blacksquare$$

例 5.4 a, b, c, d は互いに相異なる 4 つの複素数とするとき、

$$\begin{aligned}\text{(5.1)}\qquad &\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}\\ &+\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}+1=0\end{aligned}$$

を示せ。

(解) ずっと昔は大学入試でこの手の「計算問題」が出題されたようだが、それはさておき。

a, b, c, d のいずれも 0 でないとして示す (いずれかが 0 である場合は目視で (5.1) が正しいことが分かる)。

$$f(z):=\frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z}$$

とおくと、f の $\mathbb{C}$ 内の極は a, b, c, d, 0 であり、いずれの位数も 1 である。例えば a は、f の 1 位の極であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;a)&=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{abcd}{(z-b)(z-c)(z-d)}\cdot\frac{1}{z}=\frac{abcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}\cdot\frac{1}{a}\\ &=\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}.\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}(f;b)=\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)},\quad \operatorname{Res}(f;c)=\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)},\\ &\operatorname{Res}(f;d)=\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}.\end{aligned}$$

さらに

$$\operatorname{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{abcd}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}=\frac{abcd}{(-a)(-b)(-c)(-d)}=1.$$

従って、(5.1) の左辺は、f の $\mathbb{C}$ 内の極における留数の和である。ゆえに右辺は $-\operatorname{Res}(f;\infty)$ に等しいはずである。

$f(z)$ は z の 5 次多項式の逆数であるから、$\lim_{z\to\infty} z^4 f(z)=0$. 特に $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$. 次の命題 5.5 により、

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-\lim_{z\to\infty} zf(z)=0.$$

ゆえに (5.1) が証明された。■

次の命題は、実質的に上の例の中で証明して用いた (後のために書き抜いておく)。

命題 5.5 ∞ が f の孤立特異点で、$\lim_{z\to\infty} zf(z)$ が有限の極限値 A を持てば、$\operatorname{Res}(f;\infty)=-A$. 特に $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$ ならば、$\operatorname{Res}(f;\infty)=0$.

証明 f の ∞ のまわりの Laurent 展開を

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

とするとき、

$$zf(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n+1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-1} z^n.$$

$z\to\infty$ のとき、有限の極限 A を持つことから、

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{n-1}=0 \quad\wedge\quad A=a_{-1}.$$

ゆえに

$$\operatorname{Res}(f;\infty)=-a_{-1}=-A.\blacksquare$$

注意 5.6 (命題 5.5 の類似) 実は「$c\in\mathbb{C}$ が f の孤立特異点で、$\lim_{z\to c}(z-c)f(z)$ が有限の極限値 A を持つならば、$\operatorname{Res}(f;c)=A$.」という命題が成り立つ。■

注意 5.7 (「正則 $\Rightarrow$ 留数は 0」は ∞ については不成立) 有限の複素数 c が f の正則点であるとき、$\operatorname{Res}(f;c)=0$ であるが、f が ∞ の近傍で正則であっても、$\operatorname{Res}(f;\infty)=0$ であるとは限らない。例えば $f(z)=\dfrac{1}{z}$ のとき、$\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ であるから、f は ∞ で正則であるが、$\operatorname{Res}(f;\infty)=-1\neq 0$. 上の命題は、$\operatorname{Res}(f;\infty)=0$ のための簡単な十分条件を与えている点で価値がある。■

5.3 有理型関数

有理関数とある意味で似ている、有理型関数をちょっとだけ紹介する。我々は極の取り扱いに十分慣れたので、それを例外的とはみなさないで仲間に入れてみよう、というニュアンス？

定義 5.8 (有理型関数) D を $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の領域とするとき、f が D で**有理型** (**meromorphic**) とは、極を除いて正則であることをいう (除去可能特異点がある場合、そこで関数の定義を修正して、正則であると考える)。すなわち、$(\exists E\subset D)$ $D\setminus E$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域で、$f\colon D\setminus E\to\mathbb{C}$ は正則、$\forall c\in E$ に対して、c は f の極である。

極全体の集合 $E=\emptyset$ もありうる (こういう場合を除外していない) ので、「正則関数は有理型関数である」。

注意 5.9 E の各点は孤立点である。実際、$c\in E$ とするとき、c は f の極であり、特に孤立特異点であるから、$(\exists R>0)$ f は $\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z-c|<R\}$ で定義されていて正則であるから、$D(c;R)\cap E=\{c\}$. ■

命題 5.10 (有理関数は Riemann 球で有理型) 有理関数は $\widehat{\mathbb{C}}$ で有理型である。

証明 $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z)$, $Q(z)$ は互いに素な複素係数の多項式) とする。$P(z)$ の零点を c_1, $\ldots$, c_N とするとき、f は $\mathbb{C}\setminus\{c_1,\ldots,c_N\}$ で正則であり、f は c_j を極とする ($j=1,2,\ldots,N$)。一方、$z=\infty$ について調べよう。

$$g(w):=f\left(\frac{1}{w}\right)$$

とおくとき、明らかに

$$g(w)=\frac{w\text{ の多項式}}{w\text{ の多項式}}$$

と書き直すことが出来る。これは $w=0$ を極または除去可能特異点とする。ゆえに $f(z)$ は $z=\infty$ を極または正則点とする。

(後半の別証明: $R:=\max\{|c_1|,\ldots,|c_N|\}+1$ とおくとき、$R>0$ で、$R<|z<\infty$ で f は正則であるから、∞ は f の孤立特異点である。

$$\lim_{\substack{z\neq\infty\\ z\to\infty}} f(z)$$

は ∞ または有限の複素数であることは容易に分かる。前者の場合 ∞ は f の極で、後者の場合 ∞ は f の除去可能特異点である。) ■

実は命題 5.10 の逆が成り立つ。

命題 5.11 $\widehat{\mathbb{C}}$ で有理型な関数は有理関数である。

(実は証明の要は、例 5.1 の議論と同じである。)

証明 f が $\widehat{\mathbb{C}}$ で有理型とする。定義から、f のすべての極の集合を $E\subset\widehat{\mathbb{C}}$ とするとき、$\widehat{\mathbb{C}}\setminus E$ で f は正則である。

実は E は有限集合である。実際、もし無限集合ならば、$\exists\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ $c_n\in E$, かつ $\forall j\neq k$ $c_j\neq c_k$. $\widehat{\mathbb{C}}$ は球面に同相であるからコンパクトで、$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列を持つ。その極限を c とする。c が極であっても (i.e. $c\in E$)、c が極でなくても (i.e. $c\notin E$, c は f の正則点)、$\exists R>0$ s.t. f は $0<|z-c|<R$ で正則となる。これは $\lim_{n\to\infty} c_n=c$ と矛盾する[26]。

[26]念のために書いておくと、$c_n\to c$ であることから、$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geq N$ $|c_n-c|<R$. c_N と c_{N+1} は相異なり、ともに E の点であるから、$D(c;R)$ 内に 2 つの E の点があることになる。

E が有限集合であるので、各点 c_j $(j=1,2,\ldots,N)$ における Laurent 展開の主部 f_j を集めて、$f-\sum_{j=1}^{N} f_j$ を考えると、上の議論と同様に定数関数となる。その定数を C とおくと

$$f(z)=\sum_{j=1}^{N} f_j(z)+C \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

Laurent 展開の主部 f_j はいずれも z の有理関数であるから、f も有理関数である。 ■

$\mathbb{C}$ においては、収束部分列を持たない点列が存在する。それは実は必ず有界でない点列である (Bolzano-Wierstrass の定理を思いだそう)。そのような点列は、∞ に発散するような部分列を持つが、$\widehat{\mathbb{C}}$ においては、それは ∞ に収束することに注意しよう。

有理型関数でない関数としては、真性特異点を持つ関数、分岐点を持つ関数がある。真性特異点は、孤立特異点でない場合にも定義することを注意しておく。

定義 5.12 (一般の真性特異点の定義) $c\in\mathbb{C}$, $R>0$, f は $A(c;0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<R\}$ で有理型とする。c が f の**真性特異点**であるとは、f は $D(c;R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<R\}$ では有理型でないことをいう。

c が f の孤立特異点であるとき、真性特異点の二つの定義の条件は同値である。実際、c が f の孤立特異点 $(\exists R>0)$ f は $A(c;0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<R\}$ で正則) という前提のもとで、(a) (除去可能特異点), (b) (極) のいずれの場合も、f は $D(c;\varepsilon)$ で有理型であり、一方 (c) (孤立真性特異点) の場合、f は $D(c;\varepsilon)$ で有理型とはならない。

c が f の真性特異点であるとは、要するに、c は f の除去可能特異点や極ではないということである。

定理 5.13 (Picard) f は $0<|z-c|<R$ で有理型で、c は f の真性特異点とするとき、

$$0<|z-c|<R \quad \text{かつ} \quad f(z)\neq\omega$$

であるような $\omega\in\widehat{\mathbb{C}}$ は存在するとしても高々 2 つである。

証明 (省略する。例えば野口 [19] を見よ。)

$\widehat{\mathbb{C}}\setminus f(A(c;0,R))$ の要素数は 2 以下である。

例 5.14 $f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は 0 を真性特異点に持つ。$\widehat{\mathbb{C}}\setminus f(A(c;0,R))=\{0,\infty\}$

6 1次分数変換

微積分の世界で 1 次関数 $f(x)=ax+b$ が基本的であることは認めてもらえるであろう。同様に、$\mathbb{C}$ の世界では 1 次関数が基本的、と言っても良いかもしれない。$\widehat{\mathbb{C}}$ の世界では、ここで紹介する 1 次分数変換が基本的である！

6.1 定義

1 次分数変換とは、一口に言うと、$w = \frac{az+b}{cz+d}$ の形の式で定まる $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像である。

定義 6.1 $ad - bc \neq 0$ を満たす a, b, c, d を用いて

(i) ($c \neq 0$ の場合)

$$\varphi(z) := \begin{cases} \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \\ \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \end{cases}$$

(ii) ($c = 0$ の場合)

$$\varphi(z) := \begin{cases} \infty & (z = \infty) \\ \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を **1 次分数変換** (**linear fractional transformation**) あるいは **Möbius 変換** (Möbius transformation) と呼ぶ。

∞ での値や、$-d/c$ での値は、極限として定義されていると考えるのが覚えやすい。

細かいチェック

(a) $c \neq 0$ のとき。$z \to -\dfrac{d}{c}$ のとき $cz + d \to 0$, $az + b \to -\dfrac{ad}{c} + b = -\dfrac{ad-bc}{c} \neq 0$ に注意して、

$$\lim_{\substack{z \neq -d/c \\ z \to -d/c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty = \varphi(-d/c), \quad \lim_{\substack{z \neq \infty \\ z \to \infty}} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a+b/z}{c+d/z} = \frac{a}{c} = \varphi(\infty).$$

(b) $c = 0$ のとき。$ad - bc \neq 0$ であるから、$a, d \neq 0$, ゆえに $\dfrac{a}{d} \neq 0$ であるから

$$\lim_{\substack{z \neq \infty \\ z \to \infty}} \left(\frac{a}{d} z + \frac{b}{d}\right) = \infty = \varphi(\infty).$$

$c = 0$ の場合は、$-d/c = \infty$ であるので、例外扱いの 2 点 ($-d/c$ と ∞) が一致することに注意しよう。

$ad - bc \neq 0$ は、定数関数でないための条件である。

$ad - bc = 0$ ならば定数関数であることの証明

よりどりみどり。$\varphi'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, あるいは $\varphi(z) - \varphi(0) = \dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{b}{d} = \dfrac{(ad-bc)^2}{cz+d}$, あるいは割り算して得られる $\varphi(z) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{ad-bc}{cz+d}$ のいずれかを使う。

6.2　性質

命題 6.2 任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続関数である (後で同相写像であることが分かる)。

証明　φ を任意の 1 次分数変換とするとき、$\forall z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\lim_{\substack{z \neq z_0 \\ z \to z_0}} \varphi(z) = \varphi(z_0)$$

を示せば良い。$z_0 \in \mathbb{C}$ かつ $cz_0 + d \neq 0$ の場合は明らか。$z_0 = \infty$ あるいは $cz_0 + d = 0$ の場合は、上の「細かいチェック」から分かる。■

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、$\varphi_A(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ とおく。$A \mapsto \varphi_A$ は $GL(2;\mathbb{C})$ から 1 次分数変換全体への全射である。

命題 6.3 (1) $A, B \in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

(2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$\varphi_I = \mathrm{id}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ の恒等写像).

(3) $A \in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$.

証明

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ とするとき、

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz+s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とするとき、

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\dfrac{pz+q}{rz+s} + b}{c\dfrac{pz+q}{rz+s} + d} = \frac{a(pz+q) + b(rz+s)}{c(pz+q) + d(rz+s)}$$

$$= \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)} = \varphi_{AB}(z).$$

結局、有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_{AB}(z)$. $\widehat{\mathbb{C}}$ から有限個の点を除いた集合は、$\widehat{\mathbb{C}}$ で稠密であるので、等式延長の原理から[27]、$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

[27]「(X,d), (X',d') を距離空間とする。Ω は X の稠密な部分集合とする。連続写像 $f\colon X \to X'$, $g\colon X \to X'$ について、

$$\forall x \in \Omega \quad f(x) = g(x)$$

が成り立つならば、

$$\forall x \in X \quad f(x) = g(x).$$

(2) $c = 0$ の場合に相当するので、定義から

$$\varphi_I(z) = \begin{cases} \infty & (z = \infty) \\ z & (z \neq \infty). \end{cases}$$

これは φ_I が $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像であることを示す。

(3) $A \in GL(2;\mathbb{C})$ のとき、$A^{-1} \in GL(2;\mathbb{C})$ である。

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = id, \quad \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{A^{-1}A} = \varphi_I = id.$$

ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. ■

系 6.4 任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は全単射である。

証明 逆写像が存在するから。■

6.3 平行移動、定数倍、反転

平行移動 $T_b(z) := z + b$ は、

$$z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}$$

と書けるから、1 次分数変換である。行列 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対応する。

定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ は、

$$az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$$

と書けるから、1次分数変換である。行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対応する。これはさらに2つに分解した方が分かりやすいかも知れない。つまり $a = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ と極形式で書き、$w = az = re^{i\theta z}$ を、$\zeta = e^{i\theta}z$, $w = r\zeta$ と分解すると、

$$\zeta = e^{i\theta}z$$

は原点中心の角度 θ の回転を表し、

$$w = r\zeta$$

は拡大 ($r > 1$ の場合) または縮小 ($0 < r < 1$ の場合) を表す ($r = 1$ のときは恒等写像)。

反転 $R(z) = \dfrac{1}{z}$ は、

$$\frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}$$

と書けるから、1 次分数変換である。行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が対応する。

以上から、「平行移動、定数倍 (原点中心の回転と拡大・縮小)、反転は 1 次分数変換」であるが、逆に次が成り立つ。

命題 6.5 任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成で表される。

証明

(a) $c \neq 0$ の場合、$az+b$ を $cz+d$ で割り算すると、商が a/c, 余りが $b-ad/c$ であるから、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{b - \dfrac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c}\cdot\frac{ad-bc}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

$T_{d/c}$, R, $M_{-(ad-bc)/c^2}$, $T_{a/c}$ を順に施したことになる。

(b) $c = 0$ の場合、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

であるから、$M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を順に施したことになる。 ■

6.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、$\mathbb{C}$ の (普通の) 円と直線の総称である。一般に、$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0$$

の形をした方程式で表される (教科書 [10] p. 9 の例題 1.4)。$a = 0$ ならば直線、$a \neq 0$ ならば普通の円を表す。

命題 6.6 任意の 1 次分数変換は、任意の $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

証明 平行移動 T_d で、直線は直線に、普通の円は普通の円に写される。

定数倍 M_a $(a \neq 0)$ で、直線は直線に、普通の円は普通の円に写される。

反転 $w = R(z) = \dfrac{1}{z}$ でどうなるか、調べよう。$z = \dfrac{1}{w}$ を方程式に代入すると、

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \overline{\beta}\frac{1}{w} + c = 0.$$

$w\overline{w}$ をかけて

$$a + \beta w + \overline{\beta}\overline{w} + cw\overline{w} = 0.$$

$$c' := a, \quad \beta' := \overline{\beta}, \quad a' := c$$

とおくと、

$$a'w\overline{w} + \beta'\overline{w} + \overline{\beta'}w + c' = 0.$$

これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを意味する。 ■

(雑ですね。

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}}; az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0\}$$

の $w = \frac{1}{z}$ による像が

$$\{w \in \widehat{\mathbb{C}}; a'w\overline{w} + \beta'\overline{w} + \overline{\beta'}w + c' = 0\}$$

ということを主張しているつもりだが、証明は半分 (包含関係) しかやっていない。文句を言う人の課題とする。)

例 6.7 (準備中)

6.5 任意の相異なる 3 点を任意の相異なる 3 点に写す

命題 6.8 α, β, $\gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ 相異なる 3 点とするとき、

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換 φ が一意的に存在する。

証明 (存在) 実際に構成してみせる。

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ の場合、

$$\varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma},$$

$\beta = \infty$ の場合は

$$\varphi(z) = \frac{\alpha - \gamma}{z - \gamma},$$

$\gamma = \infty$ の場合は

$$\varphi(z) = \frac{z - \beta}{\alpha - \beta},$$

$\alpha = \infty$ の場合は

$$\varphi(z) = \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とすれば良い。

(一意性) φ_1, φ_2 がともに α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ にうつす 1 次分数変換とすると、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は、$\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ を満たす。$\varphi(\infty) = \infty$ より、$\exists a, b \in \mathbb{C}$ s.t. $\varphi(z) = az + b$ $(z \in \mathbb{C})$. $\varphi(0) = 0$ より $b = 0$. $\varphi(1) = 1$ を用いて $a = 1$. これから $\varphi = \mathrm{id}$. ゆえに $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

余談 6.9 $\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma} \tag{6.1}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (**cross ratio**) と呼ぶ。

これは α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は、非調和比を買えない。すなわち、任意の 1 次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma)=(f(z),f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))$$

が成り立つ。実際、$f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると

$$\varphi(w)=(w,f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))\quad(w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから

$$\varphi(f(z))=\varphi\circ f(z)=(z,\alpha,\beta,\gamma)\quad(z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z),f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))=(z,\alpha,\beta,\gamma)\quad(z\in\widehat{\mathbb{C}}).\blacksquare$$

系 6.10 α, β, $\gamma\in\widehat{\mathbb{C}}$ を相異なる 3 点とする。また、α', β', $\gamma'\in\widehat{\mathbb{C}}$ も相異なる 3 点とする。このとき、

$$\varphi(\alpha)=\alpha',\quad\varphi(\beta)=\beta',\quad\varphi(\gamma)=\gamma'$$

を満たす 1 次分数変換 φ が存在する。

証明 命題 6.8 の 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ と表すことにして、$\varphi:=\varphi_{\alpha'\beta'\gamma'}^{-1}\circ\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ とおくと、φ は条件を満たす 1 次分数変換である。 $\blacksquare$

例題 6.1 1, 2, 3 をそれぞれ 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。
(解答) 相異なる 3 点 α, β, $\gamma\in\mathbb{C}$ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す分数変換 $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ は、

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}(z)=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2,3}(z)&=\frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3}=\frac{2(z-2)}{z-3}=\frac{2z-4}{z-3},\\ \varphi_{2,3,1}(z)&=\frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1}=\frac{z-3}{-(z-1)}=\frac{-z+3}{z-1}.\end{aligned}$$

これらを与える行列は、それぞれ $\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\end{pmatrix}$ である。求める 1 次分数変換 φ は、$\varphi=\varphi_{2,3,1}^{-1}\circ\varphi_{1,2,3}$ である。これは行列

$$\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{(-1)(-1)-3\cdot1}\begin{pmatrix}-1&-3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-13\\3&-7\end{pmatrix}$$

で与えられる 1 次分数変換で、

$$\varphi(z)=\frac{\frac{5}{2}z+\frac{-13}{2}}{\frac{3}{2}z+\frac{-7}{2}}=\frac{5z-13}{3z-7}.\blacksquare$$

6.6 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に関する鏡像の原理

命題 6.11 C を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円または直線、D を C を境界とする領域 (円の内部 or 外部 or 半平面)、f を 1 次分数変換とするとき，$f(D)$ は $f(C)$ を境界とする領域である。さらに z が C 上を D を左手に見る向きに動くとき、$f(z)$ は $f(C)$ 上を $f(D)$ を左手に見る向きに動く。

証明 f が同相写像であることから、主張の前半が成り立つ。.... ■

定義 6.12 ($\widehat{\mathbb{C}}$ の円に関する鏡像の位置) C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。

P と P′ が $\mathbb{C}$ の円 C に関して互いに**鏡像の位置**にあるとは，P と P′ が円 C の中心 O を始点とする 1 本の半直線上にあって、しかも $OP \cdot OP' = (\text{円}\,C\,\text{の半径})^2$ が成り立つことをいう。円の中心と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとみなす。

P, P′ が直線 C に関して互いに**鏡像の位置**にあるとは，P と P′ が C に関して対称の位置にあることをいう。

このように言葉で書くとイメージはつかみやすいが、計算にのせるためには、条件を式で表しておくのが良いだろう。それが次の補題である。

補題 6.13 (円に関して鏡像の位置にあるための条件) $c \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ が与えられたとき、2 つの複素数 z, z' が c を始点とする 1 本の半直線上にあり、かつ $|z-c|\,|z'-c'| = r^2$ を満たすためには

$$(z-c)(\overline{z'}-\overline{c}) = r^2$$

を満たすことが必要十分である。

証明 (略) ■

命題 6.14 (1 次分数変換の鏡像の原理) C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、P と P′ は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(\mathrm{P})$ と $f(\mathrm{P}')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明 f が平行移動 $T_d\colon z \mapsto z+d$, 拡大・縮小・回転 $M_a\colon z \mapsto az$ のときは明らかに成り立つ。命題 6.5 により、f が反転 $R\colon z \mapsto \dfrac{1}{z}$ のときに成り立つことを確かめれば良い。補題 6.13 を使えば、単純な計算でできる。■

この証明の考え方はなるほど、という感じだけれど、別証明も与えておこう。以下の 2 つの定理を合わせれば良い。

命題 6.15 (1 次分数変換は非調和比を変えない) 任意の 1 次分数変換 f と、相異なる 3 点 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\widehat{\mathbb{C}}$ に対して
$$(z,\alpha,\beta,\gamma)=(f(z),f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))$$
が成り立つ。

証明 $f(\alpha),\ f(\beta),\ f(\gamma)$ を $1,\ 0,\ \infty$ に写す 1 次分数変換を φ とすると、
$$\varphi(w)=(w,f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))\quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$
$\varphi\circ f$ は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を $1,\ 0,\ \infty$ に写す 1 次分数変換であるから、
$$\varphi(f(z))=\varphi\circ f(z)=(z,\alpha,\beta,\gamma)\quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$
ゆえに
$$(f(z),f(\alpha),f(\beta),g(\gamma))=(z,\alpha,\beta,\gamma)\quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).\blacksquare$$

命題 6.16 $z,\ z'\in\widehat{\mathbb{C}}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 C に関して鏡像の位置にあるためには
$$(\forall z_2,z_3,z_4\in C: \text{互いに相異なる})\quad (z,z_2,z_3,z_4)=\overline{(z',z_2,z_3,z_4)}$$
が必要十分である。

証明 (準備中)

命題 6.14 の別証明 十分性を示す。円 C 上の任意の点 $z_2,\ z_3,\ z_4$ をとり、$w_j=f(z_j)$ $(j=2,3,4)$ とおく。
$$\begin{aligned}(f(z),w_2,w_3,w_4)&=(f(z),f(z_2),f(z_3),f(z_4))\\ &=(z,z_2,z_3,z_4) && (\text{命題 }6.15)\\ &=\overline{(z',z_2,z_3,z_4)} && (\text{仮定})\\ &=\overline{(f(z'),f(z_2),f(z_3),f(z_4))} && (\text{命題 }6.15)\\ &=\overline{(f(z'),w_2,w_3,w_4)}.\end{aligned}$$
命題 6.16 より、$f(z)$ と $f(z')$ は円 $f(C)$ に関して鏡像の位置にある。■

6.7 1 次分数変換による領域の写像関数

後で “領域の写像関数” について考察するが、ここでは単位円盤、上半平面の写像関数が 1 次分数変換で与えられることを示す。

また、1 次分数変換はより一般の領域の写像関数を構成する際の “材料” となる (それについては準備中)。

命題 6.17 (単位円盤を単位円盤に写す 1 次分数変換) $z_0 \in D_1$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$ とするとき

$$\varphi(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \tag{6.2}$$

で定義される 1 次分数変換 φ は、$\varphi(D_1) = D_1$ を満たす。

逆に 1 次分数変換 φ が $\varphi(D_1) = D_1$ を満たすならば、ある $z_0 \in D_1$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$ が存在して、φ は (6.2) を満たす。

後で、この命題よりも強い、命題 7.13 を証明する。

補題を 1 つ用意する。

補題 6.18 $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| < 1$, $z \in \mathbb{C}$ とするとき

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| < 1,$$
$$|z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| = 1,$$
$$|z| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| > 1.$$

証明

$$\begin{aligned}
|1 - \overline{z_0} z|^2 - |z - z_0|^2 &= (1 - \overline{z_0} z)\overline{(1 - \overline{z_0} z)} - (z - z_0)\,\overline{(z - z_0)} \\
&= (1 - \overline{z_0} z)(1 - z_0 \overline{z}) - (z - z_0)\,(\overline{z} - \overline{z_0}) \\
&= 1 - 2\operatorname{Re}(\overline{z_0} z) + |z_0|^2 |z|^2 - \left(|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{z_0}) + |z_0|^2\right) \\
&= (1 - |z|^2) + |z_0|^2 \left(|z|^2 - 1\right) \\
&= \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |z_0|^2\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^2 = 1 - \frac{|z - z_0|^2}{|1 - \overline{z_0} z|^2} = \frac{|1 - \overline{z_0} z|^2 - |z - z_0|^2}{|1 - \overline{z_0} z|^2} = \frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |z_0|^2\right)}{|1 - \overline{z_0} z|^2} \begin{cases} > 0 & (|z| < 1) \\ = 0 & (|z| = 1) \\ < 0 & (|z| > 1). \end{cases} \quad \blacksquare$$

命題 6.17 の証明 (式 (6.2) で定義される φ が D_1 から D_1 への双正則写像であること) 1 次変換

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

について、補題 6.18 から $\varphi(D_1) = D_1$ が分かる ($|z| < 1 \Rightarrow |\varphi(z)| < 1$ より $\varphi(D_1) \subset D_1$. また $|\varphi(z)| < 1 \Rightarrow |z| < 1$ は $|w| < 1 \Rightarrow |\varphi^{-1}(w)| < 1$ を意味するので、$\varphi^{-1}(D) \subset D_1$. ゆえに $D_1 \subset \varphi(D_1)$. ゆえに $\varphi(D_1) = D_1$)。ゆえに φ は D_1 から D_1 への双正則写像である。

(1 次変換 φ のうちで、D_1 から D_1 への双正則写像であるものは (6.2) に限られること) 1 次変換 $\varphi\colon D_1 \to D_1$ が双正則とすると、ある $z_0 \in D_1$ が存在して、$\varphi(z_0) = 0$. 鏡像の原理か

ら、単位円 $|z|=1$ に関して、z_0 と鏡像の位置にある $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ の像は ∞ である。ゆえに、ある定数 C が存在して、

$$\varphi(z)=C\frac{z-z_0}{z-1/\overline{z_0}}=-C\overline{z_0}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.$$

$\varepsilon:=-C\overline{z_0}$ とおくと

$$\varphi(z)=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.$$

補題 6.18 から

$$\begin{aligned}|z|<1&\Leftrightarrow|\varphi(z)|<|\varepsilon|\,,\\|z|=1&\Leftrightarrow|\varphi(z)|=|\varepsilon|\,,\\|z|>1&\Leftrightarrow|\varphi(z)|>|\varepsilon|\,.\end{aligned}$$

ゆえに、φ が D_1 から D_1 への双正則写像であることから、$|\varepsilon|=1$. ゆえに φ は (6.2) の形に限られる。■

この証明では、$|\varepsilon|=1$ を導くのに補題 6.18 を用いたが、補題 6.18 抜きで証明するのに次のような方法がある。(レポート課題でおかしな計算をしている人が続出したので、「こうするんだ」という意味で示す。)

$\varphi\colon\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ は同相写像であり、$\varphi(D_1)=D_1$ であるから、境界は境界にうつる。すなわち $|z|=1$ のとき、$|\varphi(z)|=1$. $1=|z|^2=z\overline{z}$ であるから $z=\frac{1}{\overline{z}}$. このとき

$$|1-\overline{z_0}z|=\left|\overline{1-\overline{z_0}z}\right|=|1-z_0\overline{z}|=|1-z_0/z|=|z|\cdot|1-z_0/z|=|z(1-z_0/z)|=|z-z_0|$$

であるから $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|=1$. ゆえに $|\varphi(z)|=1$ であるために、$|\varepsilon|=1$.

命題 6.19 実軸 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ を自分自身にうつす 1 次分数変換は...

証明 (準備中)

$H:=\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}z>0\}$ を**上半平面**と呼ぶ。

命題 6.20 上半平面を自分自身の上に写す 1 次分数変換は

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc=1.$$

証明 (準備中)

例 6.21 (Cayley 変換)

$$\varphi(z):=\frac{z-i}{z+i}$$

で定義される 1 次分数変換 φ を **Cayley 変換**と呼ぶ。これは H の等角写像である。すなわ

ち $\varphi(H)=D_1$ が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned}|z+i|^2-|z-i|^2 &= (z+i)\overline{(z+i)}-(z-i)\overline{(z-i)}=(z+i)(\overline{z}-i)-(z-i)(\overline{z}+i)\\ &= |z|^2+i(\overline{z}-z)-1-\left(|z|^2+i(z-\overline{z})-1\right)\\ &= 2i(\overline{z}-z)=2i(-2yi)=4y=4\operatorname{Im} z\end{aligned}$$

であるから (ただし $y=\operatorname{Im} z$ である)

$$1-|\varphi(z)|^2=1-\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2=\frac{|z+i|^2-|z-i|^2}{|z+i|^2}=4\frac{\operatorname{Im} z}{|z+i|^2}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} z>0 &\Leftrightarrow |\varphi(z)|<1,\\ \operatorname{Im} z=0 &\Leftrightarrow |\varphi(z)|=1,\\ \operatorname{Im} z<0 &\Leftrightarrow |\varphi(z)|>1.\end{aligned}$$

これから $\varphi(H)=D_1$.

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 (単位円盤の境界) $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で 1 対 1 に対応するという有名な事実がある。■

命題 6.22 上半平面 $H=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$ を単位円盤にうつす 1 次分数変換は

$$\varphi(z)=\alpha\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\quad |\alpha|=1,\quad \operatorname{Im}\beta>0.$$

証明 (準備中)

7 等角写像

この節を通じて、複素平面内の原点を中心とする単位円盤 $D(0;1)$ が頻出するので、D_1 と書くことにする (最近は $\mathbb{D}$ と書く人も多くなっている)。

$$D_1:=D(0;1)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}.$$

7.1 等角とは何か (私個人の主観にもとづく説明)

「等角」というのは、広く使われる言葉で、粗く言って「角度を保つ (関数)」という意味である。

特に関数論においては正則性も入れて、「いたるところ $f'\neq 0$ を満たす正則関数 f」と定義され、それは実は「局所的には正則な逆関数を持つ正則関数」ということになる。

応用上は「正則な逆関数を持つ正則関数 (双正則)」という意味で使われる (「局所的に」を省略！) ことが多いようである。

何のためにあるかというと、解きたい問題に現れる領域が U であるとき、双正則関数 (「等角写像」) $\varphi\colon U \to V$ を見つけて、変数変換により V における問題に直して、そちらで問題を解いて、結果を φ^{-1} で戻して元の問題の解を得る、そういうふうに使うため。以上はちょっと割り切りすぎかもしれないが、最初はそう考えるのが分かりやすいと思う。

V として、円盤や半平面のような、簡単な形の領域を選ぶ。そういう簡単な形の領域では、色々な問題が直接的に解けて、解の公式が得られている場合が多いからである。

U が、円弧や線分で境界ができているような簡単な場合に、φ が具体的な式で求まることがある。非常に多くの結果が知られている (主に 19 世紀中の成果)。1 次分数変換が活躍する。

問題を一般的に設定した場合は、φ が具体的な式で表されるとは限らないが、φ が存在することは証明できる、という場合がある。この方向で「Riemann の写像定理」という定理が基本的である。(1851 年の Riemann の学位論文で与えられたが、論文の問題意識自体が非常に象徴的である。)

一方、U が具体的に与えられたが、簡単でない場合は、(存在だけ分かってもあまり役に立たないことが多いので) 数値計算によって、必要な精度の近似解が求められると便利である。

領域が多角形の場合、Schwarz-Christoffel 写像, Schwarz-Christoffel の公式というものがあるが、省略する。(φ を表す式であるが、中に登場するパラメーターは何らかの手段で求める必要があるので、この公式が φ を与える (完全な) 公式とは言いにくい。実用にするには、コンピューターが必須なので、数値計算の話題と考えるべきかもしれない。)

7.2 「等角」の定義、それに近い言葉との関係

等角 (**conformal**, 分野によっては「共形」とも訳される) という語は、広い分野に登場する。関数論においては、以下の意味である (「複素関数」で既出)。

> $\mathbb{C}$ の開集合 Ω で定義された正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が**等角**であるとは
>
> $$(\forall z \in \Omega) \quad f'(z) \neq 0$$
>
> を満たすことをいう。

$f(z_0) \neq 0$ であれば、z_0 で交わる任意の 2 曲線 C_1, C_2 が z_0 でなす角は、それらの像である曲線 $f(C_1)$, $f(C_2)$ が $f(z_0)$ でなす角に等しい。これが等角という言葉の由来である。

注意 7.1 (等角性と局所的な相似性, 正則と限らない "等角写像" — 細かいので講義では省略) 「等角」という意味をより強い意味としてある文献もある。一松 [20] の定理 2.6 (p. 31) を引用する。

「z_0 を通る滑らかな二つの曲線 C_1, C_2 があるとし，それらの $w = f(z)$ による w 平面上の像を Γ_1, Γ_2 とする．C_1, C_2 上に z_0 に近く z_1, z_2 をとり，その像をそれぞれ w_1, w_2 とする。$w = f(z)$ が $z = z_0$ で微分可能で，$f'(z_0) \neq 0$ ならば，$\triangle z_0 z_1 z_2$ と $\triangle w_0 w_1 w_2$ とは，$z_1, z_2 \to z_0$

とした極限において相似になる．もっとくわしくいえば，$z_1, z_2 \to z_0$ としたとき，

$$\frac{\angle w_1 w_0 w_2}{\angle z_1 z_0 z_2} \to 1, \quad \frac{|w_2 - w_0| \,/\, |w_1 - w_0|}{|z_2 - z_0| \,/\, |z_1 - z_0|} \to 1 \tag{一松 2.18}$$

が成立する．とくに直線 $z_1 z_0$ は，$z_1 \to z_0$ とすれば C_1 の z_0 での接線に収束するから，C_1, C_2 の z_0 での接線のなす角は，Γ_1, Γ_2 の w_0 での接線のなす角に等しい．このことを，$w = f(z)$ による写像は z_0 において等角写像であるという。」

等角性をこの意味に取ると、f が x, y について偏微分可能と仮定した上で、等角性 (上の 2 つの条件) から複素関数 f の z_0 での微分可能性が導かれる。一方、f が実変数の関数として微分可能と仮定した上で、$\dfrac{|w_2 - w_0| \,/\, |w_1 - w_0|}{|z_2 - z_0| \,/\, |z_1 - z_0|} \to 1$ という仮定を加えると、f あるいは $\overline{f}$ が複素関数の意味で微分可能ということが導かれる。$\overline{f}$ が微分可能の場合も、ある意味で相似性があるが、裏返しになることに注意しよう。

この講義では細かい議論に踏み込むつもりはないが、等角性が局所的な相似性を意味することは頭の片隅に入れておこう。■

正則関数に関する逆関数定理を思い出すと、任意の等角写像は定義域の各点の近傍で局所的な逆写像を持つことが分かる。逆に逆写像を持つ正則関数は等角写像である (つまり $f'(z) \neq 0$) ことも証明できる。以上より、等角性は、逆写像が存在するという条件を弱くしたもの (「十分小さな範囲に限定すれば逆写像が存在する」)、と考えられる。

例 7.2 (等角であるが逆写像は持たない関数) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = z^2$ $(z \in \Omega)$ とすると、$f'(z) = 2z \neq 0$ $(z \in \Omega)$ であるから、f は Ω で等角である ($z = 0$ を定義域から除いてあるから)。しかし f の逆写像は存在しない。$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に制限した写像 $f_1(z) = f(x)$ $(z \in \Omega_1)$ は逆写像 $g(w) = \sqrt{w}$ を持つ。ただし $\sqrt{w} = \sqrt{|w|} e^{i \operatorname{Arg} w/2}$ (Arg は主値) とする。■

逆写像が存在する正則関数のことを双正則という。

定義 7.3 (双正則) U, V が $\mathbb{C}$ の開集合、$\varphi\colon U \to V$ とするとき、φ が**双正則** (biholomorphic) であるとは、φ が正則かつ全単射で、$\varphi^{-1}\colon V \to U$ も正則であることをいう。

正則関数 f が単射ならば $f' \neq 0$ ということは複素関数で証明してあるので、「双正則 $\Rightarrow$ 等角」はすぐ分かる。逆が成り立たないのは、上の例から分かる。
単射性に関しては、次の注意をしておく。

注意 7.4 (言葉遣いについての細かい注意 (ぼやき) — 飛ばしても可) このあたりの言葉遣いについて少し補足しておく。

複素平面の開集合 Ω で定義された正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が単射であるとき、f は**単葉** (**univalent**) である、ということがある。このとき、終域を $f(\Omega)$ で置き換えた $\Omega \ni z \mapsto f(z) \in f(\Omega)$ は双正則である。

f が単葉であれば、上で述べたように、f は等角である。このとき Ω から $f(\Omega)$ への等角写像と言うことがある。等角という言葉には単射であることは含まれていないはずであるが、この表現をしているときは単射であることを仮定しているようである (ちょっと気持ち悪い)。

個人的には、その場合は、$f\colon \Omega \to f(\Omega)$ は双正則 (biholomorphic) と言う方が誤解が生じなくて良いのに、と思っているが、そもそも双正則という言葉を知らない人も多い。

整理

双正則が一番強い条件で、「双正則ならば単葉」が成り立つ。単葉なとき、終域を値域で置き換えると双正則になる。また「単葉ならば等角」が成り立つ。等角なとき、定義域を各点の十分小さな近傍に制限すると単葉になり、終域もそれに合わせて小さくすると双正則になる。

一方、双正則な関数 $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ について、$f(\Omega)$ が単位円 D_1 や上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ のような “標準領域” である場合に、f のことを「Ω の等角写像」,「Ω の写像関数 (mapping function)」, Ω の Riemann 写像 (Riemann mapping) と呼ぶこともある。個人的には、最初のは言葉の濫用気味に感じられるし、2 つめは mapping と function という同じような意味を持つ語が連続していて気持ち悪いが (「写像する関数」というニュアンスなのかなあ？)、そういう習慣である。最後のは Riemann mapping theorem (通常「Riemann の写像定理」と訳されるが、もしかすると「Riemann 写像の定理」なのかな？) が念頭にあるのであろう。

つまり、等角写像という言葉には、正則かつ $f' \neq 0$ という条件以外に、場面によって、単射性とか、全射性まで含まれたりすることになる。その辺が曖昧な文献がとても多く、「そんなのは自分で判断しなさい」と言われているようで、慣れないうちはとてもストレスを感じたものである。

「等角写像」という言葉は曖昧になりがちなので、自分で使う場合は面倒でも使う前に定義を明記するか、「正則かつ単射」、「双正則」のように、意味が誤解されない言葉だけを使うように気をつけている。

(追記) とある本を読んでいたら、$f\colon D \to \Delta$ が等角であるという場合、D に f の 1 位の極が 1 つだけある場合を許す (c をその極として、$f(c) = \infty$ であるから、$\infty \in \Delta$ となっている。)、としてあった。確かに $\mathbb{C}$ の代わりに Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ を使う場合は、そうするのが自然かもしれない。$\mathbb{C}$ でなくて $\widehat{\mathbb{C}}$ で考える、というのも明記されなかったりする。それも「自分で判断しなさい」なのかな。関数論の古い本を読むのはなかなか大変だ。 ■

7.3 Riemann の写像定理と Carathéodory の定理

定理 7.5 (Riemann の写像定理 (Riemann mapping theorem), 1851 年) $\mathbb{C}$ 内の任意の単連結領域 D $(\neq \mathbb{C})$ に対して、全単射 $\varphi\colon D \to D_1$ で、φ と φ^{-1} の双方が正則であるものが存在する。

証明は長めの準備が必要なので、ここでは省略する。(9 節に書いておく。)

このように、与えられた領域 D に対して、D から単位円盤のような「標準的な」領域の上への双正則写像 φ があるとき、φ を、領域 D の**等角写像**あるいは**写像関数**と呼ぶ。

この定理は、数学の理論的にも重要であるが、工学的にも、問題となっている領域 D の等角写像が得られると便利な場合が多く、その存在を保証するこの定理は尊重されている。

なお、単連結の場合しか書いていないテキストが多いが、多重連結領域の場合にも同様の等角写像 (ただし値域は単位円盤ではなくなる) の存在を保証する定理がある。

この写像は、閉包まで同相に拡張できることが知られている。

定理 7.6 (Carathéodory の定理) U は $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$\varphi\colon U \to D_1$ は双正則とするとき、φ の $\overline{U}$ への拡張 $\widetilde{\varphi}$ で、$\widetilde{\varphi}\colon \overline{U} \to \overline{D_1}$ が同相写像であるものが存在する。
つまり $\widetilde{\varphi}$ は全単射で、$\widetilde{\varphi}$ と $\widetilde{\varphi}^{-1}$ の双方が連続である。

(Osgood-Carathéodory の定理、Osgood-Taylor-Carathéodory の定理と呼ばれることもある。)

証明は省略する。仮定を緩めて一般化した定理、逆に定理に追加の条件をつけての証明など色々ある。どの説明がお勧めできるか検討中である。とりあえず辻 [21] をあげておく。

注意 7.7 (終域が D_1 であることが重要である) 双正則な $f\colon U \to V$ があるときに、閉包への f の同相拡張 $\overline{f}\colon \overline{U} \to \overline{V}$ があるとは限らない。U だけでなく、終域 V も Jordan 領域である等の追加の条件が必要である。

例えば $U = D_1$, $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $f\colon U \to V$, $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ $(z \in U)$ とするとき、f は双正則であるが、f を $\overline{U} = \overline{D_1}$ から $\overline{V} = \mathbb{C}$ への同相写像に拡張することはできない。連続な拡張は、∂U で単射にならないから ($|z| = 1$ は $[-1, 1]$ に二重に写る)。この f は Joukovski 変換と呼ばれるもので、この性質は有名である。Joukovski 変換は基本的な関数で、色々な応用に頻出する。その基本的な性質については、整理不十分であるが、桂田 [22] というメモを見よ。 ■

7.4 特別な単連結領域 — Jordan 領域の等角写像

要点: 単連結領域のうち Jordan 領域については、Dirichlet 問題の解として写像関数が求まる。

単純閉曲線は (特に $\mathbb{C}$ 内の曲線の場合) **Jordan 曲線** (Jordan curve) と呼ばれる。(Jordan 閉曲線と呼ぶ人もいるが「閉」はつけないことが多い。その流儀では、単純曲線のことは Jordan arc と呼ぶ。)

Jordan 曲線定理

$\mathbb{C}$ 内の任意の Jordan 曲線 γ に対して、$\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ は 2 つの連結成分からなる。そのうちの 1 つは有界で、もう 1 つは非有界である。どちらの成分の境界も γ^* である。

この定理の証明は「長いので省略」と書いてあるテキストが多いが、どの文献に載っているか、複素関数の講義ノート (桂田 [23]) の付録に書いておいた準備なしで証明に取り掛かると確かに長くなるが、色々準備をしておけば (≒予備知識のある人には)、それほど長くはない証明 (例えば 3 ページの論文等) が今では知られている。

(トポロジーを既習の人向けの説明) γ^* は compact なので $\mathbb{C}$ の閉集合であるから、$\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ は $\mathbb{C}$ の開集合である。ゆえに定理に現れる 2 つの連結成分は $\mathbb{C}$ の開集合、つまり領域である。

Jordan 曲線定理に現れる有界な領域のことを γ **で囲まれる領域**と呼ぶ。

$\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線で囲まれる領域のことを **Jordan 領域**と呼ぶ。

命題 7.8 $\mathbb{C}$ 内の任意の Jordan 領域は単連結である。

証明 Jordan 曲線定理より、$\mathbb{C}$ の有界領域 Ω_i, 非有界領域 Ω_e が存在して、

$$\mathbb{C}\setminus\gamma^*=\Omega_i\cup\Omega_e,\quad \Omega_i\cap\Omega_e=\emptyset,\quad \partial\Omega_i=\partial\Omega_e=\gamma^*.$$

ゆえに

$$\mathbb{C}\setminus\Omega_i=\gamma^*\cup\Omega_e.$$

これから

$$\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega_i=\gamma^*\cup\Omega_e\cup\{\infty\}=\overline{\Omega_e}\quad(\text{閉包は }\widehat{\mathbb{C}}\text{ で考える}).$$

Ω_e は連結であるから、その閉包 $\overline{\Omega_e}$ も連結である。「$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 U について、U が単連結 $\Leftrightarrow$ $\widehat{\mathbb{C}}\setminus U$ が連結または空集合である」という定理 (複素関数の講義ノート [23] の付録にある) により、Ω_i は単連結である。 ■

Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域とすると、それは単連結であるから、Riemann の写像定理により、Ω から D_1 への双正則な写像 φ が存在する。さらに、Carathéodory の定理により、φ は $\overline{\Omega}$ から $\overline{D_1}$ の上への同相写像に拡張される。簡単のため、拡張した関数も φ で表すことにする。

$\varphi\colon\Omega\to D_1$ は全単射であるから、

$$\varphi(z_0)=0$$

を満たす $z_0\in\Omega$ が一意的に存在する。

$$f(z):=\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$$

は $\overline{\Omega}$ で連続かつ Ω で正則で、Ω で 0 にはならない ($z=z_0$ のとき $f(z_0)=\varphi'(z_0)\neq 0$)。$\Omega$ は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の 1 価正則な分枝が存在する。すなわち Ω で正則な u で

$$\exp u(z)=\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$$

を満たすものが存在する (u は $\log\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の一価正則な分枝である)。

$$v(z):=\int_{z_0}^{z}(-u_y\,dx+u_x\,dy)$$

とおく。Ω が単連結であることから、well-defined で、

$$v(z_0)=0.$$

$z_0\in\Omega$ を任意にとって

(7.1) $$\varphi(z_0)=0,\quad \varphi'(z_0)>0$$

という条件を課す。

$$\triangle u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \partial\Omega) \tag{7.2}$$

を満たす $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ は一意的に存在することが知られている。u の共役調和関数 v で $v(z_0) = 0$ を満たすものは一意的に存在する。

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

は条件を満たすことが分かる。詳しくは桂田 [24] を見よ。

(7.1) は**正規化条件**と呼ばれる。

7.5 単位円盤 D_1 の等角写像, Schwarz の補題

標準領域として選ばれることが最も多い、D_1 それ自身の等角写像について調べよう。

次の事実を証明しよう (とても有名である)。簡単な D_1 を簡単な D_1 に写す — ナンセンスな話のようであるが、後々重要とわかる。

定理 7.9 D_1 から D_1 への双正則な関数の一般形は

$$f(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \tag{7.3}$$

ただし ε, z_0 は、$|\varepsilon| = 1$, $|z_0| < 1$ を満たす複素数である。

まず、(7.3) で定めた f が単位円盤の写像関数であること ($f\colon D_1 \to D_1$ が双正則であること) は、すでに命題 6.17 を述べてある。

その逆、つまり、単位円盤の写像関数は (7.3) の形をした 1 次分数変換に限ることを証明しよう。

そのために有名な Schwarz の補題を用意する。

余談 7.10 (Hemann Schwarz とは) Schwarz (Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843/1/25–1921/11/30) は数多くの概念に名前を残している。大理論を打ち建てたという人でないのか、いわゆる数学史本に登場するのを見たことはないが、色々お世話になっている、という感じである。以下で紹介する Schwarz の補題以外にも、誰でも知っている Cauchy-Schwarz の不等式 (Cauchy-Schwarz inequality), Dirichlet 問題の解を求めるための Schwarz の交代法 (Schwarz alternating method), 曲面積の定義の議論で有名な例である Schwarz の提灯 (Schwarz lantern, Schwarz's polyhedron), 偏微分の順序交換に関する Schwarz の定理 (f が C^2 級ならば $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$)、多角形領域の写像関数についての Schwarz-Christoffel mapping, Schwarz の鏡像の原理 (Schwarz reflection principle) などなど。どういう人か知りたくなってくる。■

命題 7.11 (Schwarz の補題) $f\colon D_1 \to \mathbb{C}$ は正則で

$$(\forall z \in D_1)\,|f(z)| \le 1, \quad f(0) = 0$$

を満たすならば、

$$(\forall z \in D_1)\,|f(z)| \le |z|\,, \quad |f'(0)| \le 1$$

が成り立つ。さらに

$$(*) \qquad ((\exists z_1 : 0 < |z_1| < 1)\,|f(z_1)| = |z_1|) \quad \vee \quad |f'(0)| = 1$$

が成り立つならば、

$$(\exists c \in \mathbb{C} : |c| = 1)(\forall z \in D_1) \quad f(z) = cz.$$

この命題を証明するために、正則関数の最大値原理が必要になる。(「複素関数」で解説済みのはずであるが) 念のため、復習しておこう。

命題 7.12 (正則関数の最大値原理 (the maximum modulus principle)) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$z_0 \in \Omega$,

$$(\forall z \in \Omega) \quad |g(z)| \le |g(z_0)| \quad (\text{i.e., } |g(z_0)| \text{ は } |g| \text{ の最大値})$$

が成り立つならば、

$$(\exists c \in \mathbb{C})(\forall z \in \Omega) \quad g(z) = c.$$

(領域で正則関数の絶対値が最大値を取れば、実は定数関数である。)

Schwarz の補題は以下のように証明出来る。

証明 $g(z) := \dfrac{f(z)}{z}$ は $z = 0$ を除去可能特異点とするので、D_1 で正則として良い。

$0 < r < 1$ を満たす任意の実数 r に対して、$|g|$ の $\overline{D}(0;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$ における最大値は、最大値原理によって、(g が定数関数であるときも含めて) 円周 $|z| = r$ 上で実現されることが分かる。すなわち

$$(\exists z_0 \in \mathbb{C} : |z_0| = r)(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \le r) \quad |g(z)| \le |g(z_0)|\,.$$

ゆえに

$$|g(z)| \le |g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} \le \frac{1}{r}.$$

特に

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \le r) \quad |g(z)| \le \frac{1}{r}.$$

これから

$$(\forall z \in D_1) \quad |g(z)| \le 1$$

が得られる (背理法を使えば簡単)。f で書くと

$$(\forall z \in D_1) \quad |f(z)| \le |z|\,.$$

また $g(0)=\lim_{z\to 0} g(z)=\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0)$ であるから、

$$|f'(0)|=|g(0)|\le 1.$$

$(*)$ が成り立つ場合を考える。$(*)$ は g で表すと、

$$(\exists z\in D_1)\quad |g(z)|=1$$

である。これは領域 D_1 で正則関数の絶対値 $|g|$ の最大値が存在する、ということを意味するので、最大値の原理によって、g は定数関数である:

$$(\exists c\in\mathbb{C})(\forall z\in D_1)\quad g(z)=c.$$

ゆえに $f(z)=cz$ $(z\in D_1)$. $\max_{z\in D_1}|g(z)|=1$ であるから $|c|=1$ である。■

命題 7.13 (単位円盤の等角写像の特徴付け) $f\colon D_1\to D_1$ が双正則であれば

$$(\exists\varepsilon\in\mathbb{C}:|\varepsilon|=1)(\exists z_0\in D_1)(\forall z\in D_1)\quad f(z)=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.$$

(証明に先立ち、黒板に 3 つの単位円を描く。)

証明 $f(D_1)=D_1\ni 0$ より、$f(z_0)=0$ を満たす $z_0\in D_1$ が存在する。

$$\varphi(z):=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z},\quad F(z):=f\left(\varphi^{-1}(z)\right)$$

とおくと、$\varphi\colon D_1\to D_1$ と $f\colon D_1\to D_1$ が双正則であることから、$F\colon D_1\to D_1$ も双正則である。そして

$$F(0)=f\left(\varphi^{-1}(0)\right)=f(z_0)=0.$$

$|F(z)|<1$ $(z\in D_1)$ より Schwarz の補題が適用できて、

$$|F(z)|\le|z|\quad(z\in D_1).$$

一方 $F^{-1}(D_1)=D_1$ であるから、やはり Schwarz の補題が適用できて、

$$\left|F^{-1}(w)\right|\le|w|\quad(w\in D_1).$$

これは

$$|z|\le|F(z)|\quad(z\in D_1)$$

を意味する。ゆえに

$$|F(z)|=|z|\quad(z\in D_1).$$

再び Schwarz の補題によって (ただし今度は「さらに」の部分を用いる)、

$$(\exists\varepsilon\in\mathbb{C}:|\varepsilon|=1)(\forall z\in D_1)\quad F(z)=\varepsilon z.$$

$F=f\circ\varphi^{-1}$ であるから、

$$f(z)=F\left(\varphi(z)\right)=\varepsilon\varphi(z)=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.■$$

7.6　上半平面 H の等角写像

$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ とする。H を上半平面と呼ぶ。$\mathbb{H}$ と書く人も多い。
H も標準領域に選ばれることが多い。H の等角写像について調べよう。

1 次分数変換

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} \tag{7.4}$$

は **Cayley 変換**と呼ばれる。

$$\begin{aligned}
1-|f(z)|^2 &= 1-\frac{z-i}{z+i}\cdot\overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = 1-\frac{(z-i)\overline{(z-i)}}{(z+i)\overline{(z+i)}} \\
&= \frac{(z+i)(\bar{z}-i)-(z-i)(\bar{z}+i)}{|z+i|^2} = \frac{z\bar{z}+i\bar{z}-iz-i^2-(z\bar{z}-i\bar{z}+iz-i^2)}{|z+i|^2} \\
&= \frac{2i(\bar{z}-z)}{|z+i|^2} = \frac{4\operatorname{Im} z}{|z+i|^2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} z > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| < 1, \\
\operatorname{Im} z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| = 1, \\
\operatorname{Im} z < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(z)| > 1.
\end{aligned}$$

これから、

$$\begin{aligned}
&f(H) = D(0;1), \\
&f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \land z \neq 1\}, \quad f(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \\
&f\left(\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}\right) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}.
\end{aligned}$$

f は上半平面 H を $D(0;1)$ の上に写す双正則写像である。つまり、Cayley 変換は上半平面の写像関数である。特に Cayley 変換は実軸を単位円周に写す。

余談であるが、スペクトル論で、自己共役作用素の “Cayley 変換” が unitary 変換になる、という命題が重要な役割を果たす。

H から D_1 への双正則写像は

$$w = \varepsilon\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}} \quad (\varepsilon \in \mathbb{C},\ |\varepsilon| = 1,\ z_0 \in H).$$

(証明は比較的簡単なので、書くのをサボる。)

例 7.14 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ と書く．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対し $A(I-tJ) = I+tJ$ という関係が成り立つとき，a, b, c, d を t の式で表せ．

また t が実数全体を動くとき，関係 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点 (x,y) が動いてできる図形を求め，これを図示せよ．　(1977 年度東京大学入試問題) ■

7.7 代表的な領域の間の等角写像

念のため: $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ とする。

- 単位円盤の写像関数については、すでに解決してある (命題 6.17, 命題 7.13)。
  D_1 から D_1 への双正則写像は
  $$f(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \quad (\varepsilon \in \mathbb{C},\ |\varepsilon| = 1,\ z_0 \in \mathbb{C},\ |z_0| < 1).$$
- H から H への双正則写像は
  $$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0).$$
- H から D_1 への双正則写像は
  $$w = \varepsilon \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \quad (\varepsilon \in \mathbb{C},\ |\varepsilon| = 1,\ z_0 \in H).$$

7.7.1 ちょっと考えたことのメモ

D_1 から D_1 への双正則写像は

$$\varphi_{\varepsilon, z_0}(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad |z_0| < 1. \tag{7.5}$$

この逆写像は同じ形をしているはずであるが、確かに

$$\varphi^{-1}_{\varepsilon, z_0}(w) = \overline{\varepsilon} \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}, \quad w_0 := -\varepsilon z_0.$$

実際 $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon}$ に注意して

$$\begin{aligned} w = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \quad &\Leftrightarrow \quad w - w\overline{z_0} z = \varepsilon z - \varepsilon z_0 \quad \Leftrightarrow \quad w + \varepsilon z_0 = (\varepsilon + \overline{z_0} w) z \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{w + \varepsilon z_0}{\varepsilon + \overline{z_0} w} \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{\varepsilon} \frac{w - (-\varepsilon z_0)}{1 - \overline{(-\varepsilon z_0)} w}. \end{aligned}$$

H から H への双正則写像は

$$\varphi_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0. \tag{7.6}$$

この逆写像も同じ形をしているはずであるが、確かに

$$\varphi^{-1}_{a,b,c,d}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, そして $da - (-b)(-c) = ad - bc > 0$ に注意する。)

H から D_1 への双正則写像は

$$\psi_{\varepsilon,z_0}(z)=\varepsilon\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}},\quad \operatorname{Im} z_0>0,\quad |\varepsilon|=1. \tag{7.7}$$

様子を調べるために特殊値の計算:

$$\psi_{\varepsilon,z_0}(z_0)=0,\quad \psi_{\varepsilon,z_0}\left(\overline{z}_0\right)=\infty,\quad \psi_{\varepsilon,z_0}\left(\infty\right)=\varepsilon,\quad \psi_{\varepsilon,z_0}\left(\frac{2\operatorname{Re}\left[(1-\varepsilon)z_0\right]}{|1-\varepsilon|^2}\right)=1.$$

最後の検算:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}=1 \quad&\Leftrightarrow\quad z-\overline{z_0}=\varepsilon z-\varepsilon z_0 \quad\Leftrightarrow\quad (1-\varepsilon)z=\overline{z_0}-\varepsilon z_0\\
&\Leftrightarrow\quad z=\frac{\overline{z_0}-\varepsilon z_0}{1-\varepsilon}=\frac{(1-\overline{\varepsilon})(\overline{z_0}-\varepsilon z_0)}{|1-\varepsilon|^2}=\frac{\overline{z_0}+|\varepsilon|^2 z_0-(\varepsilon z_0+\overline{\varepsilon z_0})}{|1-\varepsilon|^2}\\
&\Leftrightarrow\quad z=\frac{\overline{z_0}+z_0-(\varepsilon z_0+\overline{\varepsilon z_0})}{|1-\varepsilon|^2}.
\end{aligned}$$

ψ_{ε,z_0} の逆写像は

$$\psi_{\varepsilon,z_0}^{-1}(w)=\frac{w\overline{z_0}-\varepsilon z_0}{w-\varepsilon}. \tag{7.8}$$

これは D_1 から H への双正則写像の一般形である。

ふむ。$w=\varepsilon$ が $\psi_{\varepsilon,z_0}^{-1}$ の極になると (確かに $\psi_{\varepsilon,z_0}(\infty)=\varepsilon$ だから)。

あ、そうか、特に思い入れがなければ $z_0=i$ と取ると簡単で良いだろう、ということか。

$$\psi_{\varepsilon,i}(z)=\varepsilon\frac{z-i}{z+i},\quad \psi_{\varepsilon,i}^{-1}(w)=\frac{-iw-i\varepsilon}{w-\varepsilon}=-i\frac{w+\varepsilon}{w-\varepsilon}.$$

もっと簡単にしたければ、$z_0=i$, $\varepsilon=1$ ($\varepsilon=i$ の方が良いか？) として

$$\psi_{1,i}(z)=\frac{z-i}{z+i},\quad \psi_{1,i}^{-1}(w)=-i\frac{w+1}{w-1}=i\frac{1+w}{1-w}.$$

(これが Cayley 変換の式なんだ。)

思い入れがある場合は $z_0=Ri$, $R>0$ とか。

7.8 Cassini の橙形

$a>0, b>0$ とする。2 定点 $(\pm a,0)$ からの距離の積が b^2 である点の軌跡の方程式は

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}=b^2.$$

極形式では

$$r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4=b^4.$$

特に $a=b$ の場合は $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ となるので、$\sqrt{2}a$ を新たに a とおくと、

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

となり、いわゆる **lemniscate** に一致する。

- $a > b$ ならば 2 つの連結成分からなる。
- $a = b$ ならば 1 つの連結成分からない。いわゆる leminiscate. 8 の字形である。
- $a < b$ ならば 1 つの連結成分 (Jordan 曲線) で、**Cassini の橙形** (Cassini の卵形線, Cassini's oval, oval of Cassini) と呼ばれる。
  - $\sqrt{2}a > b > a$ ならば閉曲線で、凹みのある領域を囲む。
  - $b \ge \sqrt{2}a$ ならば閉曲線で、凸領域を囲む。

2 定点を $(\pm 1, 0)$ とし (これまでの a を 1 とし)、b を新たに a と書き直すと

$$\left((x+1)^2+y^2\right)\left((x-1)^2+y^2\right)=a^4.$$

$a=1$ は lemniscate で、$a>1$ ならば Jordan 曲線で、単連結領域 Ω を囲む。$a<\sqrt{2}$ ならば Ω は凹みがあるが、$a \ge \sqrt{2}$ ならば Ω は凸領域である。

$f(0)=0$, $f'(0)>0$ を満たす双正則写像 $f\colon \Omega \to D(0;1)$ は

$$f(z)=\frac{az}{\sqrt{a^4-1+z^2}}.$$

これは $z = \pm\sqrt{a^4-1}i$ が特異点である (分岐点というべきか)。

逆写像は

$$f^{-1}(w)=\frac{\sqrt{a^4-1}\,w}{\sqrt{a^2-w^2}}$$

で、これは $w=\pm a$ が特異点である。

7.9 準備: Joukovski 変換

次項で頻出するので、Joukovski 変換を紹介しておくべきである。

準備中 (桂田 [22] という雑然としたノートがある。)

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

$|z|>1$ を $\mathbb{C}\setminus[-2,2]$ に双正則に写像する。

$\rho>1$ とするとき、$|z|=\rho$ の像は

$$\frac{x^2}{(\rho+1/\rho)^2}+\frac{y^2}{(\rho-1/\rho)^2}=1$$

という楕円である。

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

$$z^2-2wz+1=0$$

$$z=w\pm\sqrt{w^2-1}.$$

$$z=w+\sqrt{w+1}\sqrt{w-1}$$

7.10 実例集

$D(c;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$, $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

以下は、私が学生だったときの演習問題である。ほとんどは、辻・小松 [13] に載っている。

そのうち、整理できたら解答を書くかもしれないが、とりあえず桂田 [25] (雑然としたノート) がある。

必要が生じない限り勉強する必要はないと思う。「こういう領域の等角写像は式で表せるんだ、ふーん。」くらいで十分である。

問 14. $0 < \alpha < 2\pi$ とする。$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \alpha\}$ を $D(0;1)$ の上に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。(解答は p. 141) **解答へ**

問 15. $D(0;1) \cap H$ を $D(0;1)$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

問 16. $\Omega := D(0;1) \cap D(1;1)$ を $D(0;1)$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

問 17. 次の各領域を単位円の外部 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。

(1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| > 1\}$

(2) $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$

解答へ

問 18. $p > 0$ とするとき、$\{z = x + iy \mid y^2 - 4px > 0\}$ を $D(0;1)$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

問 19. $a > 0$ とするとき、$\{z = x + iy \mid x^2 - y^2 - a^2 > 0\}$ を $D(0;1)$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

問 20. $c > 1$ とするとき、$\left\{z = x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; \dfrac{x^2}{(c+1/c)^2} + \dfrac{y^2}{(c-1/c)^2} > 1\right\}$ を単位円の外部に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

問 21. $0 < a < \rho$ とするとき、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - a^2| < \rho^2\}$ を $D(0;1)$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

問 22. 楕円の内部 $\left\{z = x + iy \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1\right\}$ を $D(0;1)$ に等角写像する $w = f(z)$ を求めよ。 **解答へ**

7.11 等角写像の定義をめぐって

等角写像 (**conformal mapping**) という言葉は、関数論にとどまらず一般的に用いられる言葉で、一言でいうと、交わる曲線のなす角を変えない、という条件を満たす写像のことである。

(conformal transformation は「**共形変換**」とも訳される。こちらは 2 次元に限らず良く使われる？等長性をが仮定されていたり、関数論の等角写像と相当違った意味でも使われることがあるようである。日本語の「等角」、「共形」は訳し分けているような印象もある。その辺の事情は良く分からない。)

これを尊重すると、連続な複素関数が等角であるとは、正則でいたるところ $f' \neq 0$ を満たす、ということになる。実際、次のことが成り立つ。

定理 7.15 (メンショフの定理) 領域 D で定義された定数でない連続関数 $f(z)$ が，D において正則になるための必要十分条件は，D 内の孤立集合を除いて D の各点で f が等角写像になることである。

系 7.16 連続な複素関数が等角写像であれば、実は正則関数である。

関数論の授業でメンショフの定理に言及するのは面倒だから、等角写像とは、導関数が 0 にならない正則関数のこと、と説明するのが簡単であろう。

ところで等角写像の定義に、さらに関数が単射であることを含める流儀がある。すると関数論で「等角写像」と言ったとき、どういう意味で使っているかは注意が必要ということになる。

個人的には、後者の意味では「双正則」という言葉を用いたいような気がする。そうすれば紛れがない。

正則関数が単射であれば、導関数が 0 にならないことが導かれる、という事実にも注意すべきである。単射な正則関数のことを**単葉関数** (**univalent function**) と呼ぶことも覚えておこう。

単葉という用語が出て来る定理は、私は不勉強であまり知らないのだが、次の定理だけはパッと頭に浮かぶ。

命題 7.17 (フルビッツの定理) $\mathbb{C}$ 内の領域で広義一様収束する単葉関数列の極限が定数関数でなければ、極限も単葉である。

(この定理には、関数の像 (値域) があらわに出て来ないので、双正則とは言いにくく、単葉という言葉がピッタリなのかもしれない。)

定理 7.18 (逆関数定理) 領域 D で定義された正則関数 $w = f(z)$ があり、$w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ であれば、z_0 の十分小さな開近傍 U と w_0 の十分小さな開近傍 V を適当に選べば、f は U から V の上への 1 対 1 写像で、その逆写像 g は V で正則となる。$g'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ が成り立つ。

定理 7.19 (開写像の定理) 定数でない正則関数は開集合を開集合に写像する。

系 7.20 連結開集合 D 上で正則かつ単葉 ($z \neq z' \Rightarrow f(z) \neq f(z')$) な関数 f は D から $f(D)$ の上への位相同型で、逆写像 f^{-1} は $f(D)$ で正則である。

この辺は、言葉の意味がきちんと定まっていなくて気持ちが悪い (関数論が古くからあるせい？)。

8 正則関数からなる正規族

まずは自分用のメモとして整備する。授業で説明することになったら、噛み砕いたバージョンを作る。

8.1 準備: Ascoli-Arzelrà の定理

有名な Ascoli-Arzelrà の定理を説明する。

Ascoli-Arzelà の定理は、常微分方程式の初期値問題の解の存在を保証する Peano の定理の証明や、Schauder の不動点定理の証明に用いられる。解析学にとって、必要不可欠な定理である。

定理 8.1 (Ascoli-Arzelà の定理 (1 次元バージョン)) 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体 $C([0,1];\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が、次の条件 (i), (ii) を満たしているとする。

(i) (一様有界性) $(\exists M\in\mathbb{R})$ $(\forall f\in\mathcal{F})$ $(\forall x\in[0,1])$ $\quad |f(x)|\le M.$

(ii) (一様同程度連続性) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall f\in\mathcal{F})$ $(\forall x_1,x_2\in[0,1]\colon |x_1-x_2|<\delta)$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$

このとき、$\mathcal{F}$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$[0,1]$ で一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。

証明 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ は可算集合であるから、$\{r_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ と表すことが出来る。

数列 $\{m_{0,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $m_{0,n}=n$ $(n\in\mathbb{N})$ で定める。

$\left\{f_{m_{0,n}}(r_1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界数列であるから、$\{m_{0,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{m_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で、$\left\{f_{m_{1,n}}(r_1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するものが取れる。

$\left\{f_{m_{1,n}}(r_2)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界数列であるから、$\{m_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{m_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で、$\left\{f_{m_{2,n}}(r_2)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するものが取れる。

以下同様にして、$k=3,4,\cdots$ に対して、$\{m_{k-1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{m_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で、$\left\{f_{m_{k,n}}(r_k)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するものが取れる。

$\left\{f_{m_{n,n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、$\left\{f_{m_{n,n}}(r_k)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

任意の $\varepsilon>0$ に対して、条件 (ii) の $\delta>0$ を取る。十分大きな数 $N\in\mathbb{N}$ を取ると、

$$\min_{1\le j\le N}|x-r_j|<\delta$$

が成り立つ。

$j\in\{1,\cdots,N\}$ に対して、$\left\{f_{m_{n,n}}(r_j)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるから、$\exists N'\in\mathbb{N}$ s.t.

$$p,q\ge N' \quad\Longrightarrow\quad \left|f_{m_{p,p}}(r_j)-f_{m_{q,q}}(r_j)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad (j=1,2,\cdots,N).$$

$\forall x \in [0,1]$ に対して、$|x - r_j| < \delta$ を満たす j を取れば、

$$\begin{aligned}\left|f_{m_{p,p}}(x) - f_{m_{q,q}}(x)\right| &\le \left|f_{m_{p,p}}(x) - f_{m_{p,p}}(r_j)\right| + \left|f_{m_{p,p}}(r_j) - f_{m_{q,q}}(r_j)\right| + \left|f_{m_{q,q}}(r_j) - f_{m_{q,q}}(x)\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

ゆえに $n_k := m_{k,k}$ とすれば良い。 ■

定義域を $\mathbb{R}^n$ の有界領域にしても同様に成立する (辻・小松 [13] には $\mathbb{C}$ の有界領域で使われていた)。

上の定理の一般化を考える。

関数の定義域を、$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 K にしても成り立つことはほぼ自明であるが、任意のコンパクト距離空間 X にしても成り立つ。以下、これを示そう (Banach 空間に値を取る関数にしても成り立つことが示せるが、以下では実数値、複素数値関数とする)。

コンパクト距離空間 X 上の複素数値 (または実数値) 連続関数の全体を $C(X)$ とする。通常の関数の和とスカラー倍

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

と最大値ノルム

$$\|f\| := \max_{x \in X} |f(x)|$$

のもとで $C(X)$ は Banach 空間となる。

$C(X)$ は距離空間の構造を持つわけであるが、収束はいわゆる一様収束であり、有界はいわゆる一様有界であることに注意しよう。一方で、同程度連続性は、距離空間の言葉で表せない。

定理 8.2 (Ascoli-Arzelà の定理) X はコンパクト距離空間、$C(X)$ は X 上の複素数値連続関数全体からなる Banach 空間、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $C(X)$ 内の点列とする。$\{f_n\}$ が有界 (i.e., $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$) かつ一様同程度連続 (i.e. $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists\delta > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall x, y \in X$: $d(x,y) < \delta)$ $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$) ならば、(一様) 収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。

この定理は、定理 8.1 と同様に証明できる。X の稠密な可算部分集合が必要になるが、これについては、次の補題を示せば良い。

補題 8.3 コンパクト距離空間 X は可分である。すなわち X の可算部分集合 S で、X で稠密なものが存在する。

証明 $x \in X$, $r > 0$ に対して $B(x;r)$ を X における中心 x, 半径 r の開球とする:

$$B(x;r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\{B(x;1/n) \mid x \in X\}$ は X の開被覆であるから、X のコンパクト性により、有限部分被覆 $S_n = \left\{B(x_k^{(n)};1/n) \;\middle|\; 1 \le k \le k_n\right\}$ が存在する。すなわち

$$(\exists k_n \in \mathbb{N})(\exists x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)} \in X) \quad X = \bigcup_{k=1}^{k_n} B\left(x_k^{(n)}; \frac{1}{n}\right).$$

そこで

$$S := \left\{ x_k^{(n)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le k_n \right\}$$

とおくと、S は可算集合であり (可算個の有限集合の合併であるから)、かつ X で稠密である。実際、任意の $x \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分大きい n を取ると、$\frac{1}{n} < \varepsilon$ が成り立つ。S_n は X の被覆であるから、$\exists x_k^{(n)} \in X$ s.t. $x \in B(x_k^{(n)}; 1/n)$. $x_k^{(n)} \in S$ であり、$d(x, x_k^{(n)}) < 1/n < \varepsilon$ が成り立つ。ゆえに S は X で稠密である。 ■

8.1.1　歴史覚書

原論文について、「担当授業のこととか，なんかそういった話題。」[28] で教わった。フレシェ [26] の文献リストに載っていたそうで、Google Books で入手可能である。

Giulio Ascoli, 1843–1896

> Ascoli, G., Le curve limite di una varietà data di curve (1883-1884), pp. 521–586.

Cesare Arzelà, 1847–1912

> Arzelà, Cezare, Funzioni di lincee (1889), pp.342–348.

8.2　正規族

まず正規族の定義を与える。

定義 8.4 (正規族 (normal family)) $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \emptyset$, $\mathcal{F}$ は D 上の複素数値連続関数全体 $C(D; \mathbb{C})$ のある部分集合とする。$\mathcal{F}$ が**正規族**であるとは、$\mathcal{F}$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が、D で広義一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ を持つことをいう。

こういうものを扱うための手段は確立されていて、関数解析や超関数論などで学ぶ機会がある。とりあえず要点のみを記す。

D が $\mathbb{R}^n$ の compact 集合 K であれば、$f \in C(D; \mathbb{C})$ に対して

$$\|f\|_K := \max_{x \in K} |f(x)|$$

とおくと、$C(D; \mathbb{C})$ は $\|\cdot\|_K$ をノルムとして Banach 空間となる。この Banach 空間における収束は、D 上の一様収束である。

D が $\mathbb{R}^n$ の開集合である場合、D の compact 近似列 $\{K_n\}$ を取ると、$C(D; \mathbb{C})$ は $\|\cdot\|_{K_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ をセミノルムとする Frechét 空間となる。この Frechét 空間における収束は、D 上の広義一様収束である。

[28] https://blog.goo.ne.jp/kei_matsuura2007/e/b1eae56382662e3c4e93585cf9b6f4f6

8.3 Montel の定理

(正則関数列の広義一様収束については、既に ?? で扱っている。)

D が $\mathbb{C}$ の領域で、関数族 $\mathcal{F}$ の各要素が D 上の正則関数である場合、$\mathcal{F}$ が正規族であるかどうかの判定について、次の便利な定理がある。

定理 8.5 (Montel の定理) D を $\mathbb{C}$ の領域、$\mathcal{F}$ は D 上定義された正則関数全体の集合とする。このとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\mathcal{F}$ は正規族である。

(ii) D の任意の compact 部分集合 K に対して、$\mathcal{F}$ は K で一様有界 (i.e. $\sup_{f\in\mathcal{F}}\max_{z\in K}|f(z)| < +\infty$) である。

証明 (準備中。関数論のやや程度の高いテキストには大抵書いてある。例えば高橋 [27], 杉浦 [28])

8.4 Hurwitz の定理

(この項の内容は、§§?? に入れるか、この節に入れるか、少し迷ったが、詳しく述べると話が細かくなりすぎるので、基本的な §§?? は避けて、こちらで解説することにした。)

以下の 3 つの定理は、どれも Hurwitz の定理と呼ばれることがある (テキストによって、どれをそう呼ぶか異なる)。3 つめの定理が、次節の Riemann の写像定理の証明に必要になる。

定理 8.6 (Hurwitz の定理 1) D を $\mathbb{C}$ の領域、$\{f_n\}$ は D の正則関数の列で、D 上 f に広義一様収束するとする。(f が定数関数 0 でなく) $c \in D$ が f の m 位の零点ならば、

$$(\exists\rho_0 > 0 : D(c;\rho_0) \subset D)(\forall\rho \in (0,\rho_0))(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N} : k \geq N)$$
$$f_k \text{ は } D(c;\rho) \text{ で重複度を込めてちょうど } m \text{ 個の零点を持つ}$$

が成り立つ。さらにこれらの零点は $k \to \infty$ のとき、c に収束する。

証明 (準備中。偏角の原理による。)

以下の 2 つの定理は、この定理の系であるが、直接証明してあるテキストも多い。

定理 8.7 (Hurwitz の定理 2) D を $\mathbb{C}$ の領域、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は D の正則関数の列で、D 上 f に広義一様収束するとする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、f_n は D で零点を持たないならば、f は D で零点を持たないか、または f は D で恒等的に 0 に等しい。

証明 (準備中)

単射な正則関数のことを**単葉関数** (**univalent function**) と呼ぶ。

定理 8.8 (Hurwitz の定理 3) D を $\mathbb{C}$ の領域、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は D で正則かつ単葉な関数からなる列で、D 上 f に広義一様収束するとする。このとき f は D で単葉であるか、または D で定数関数である。

証明 (準備中)

余談 8.9 Adolf Hurwitz (1859–1919) は関数論､代数幾何学､整数論に業績がある。Klein (1849–1925) の弟子。Hilbert (1862–1943) や Minkowski (1864–1909) との関わりも深い。■

9 Riemann の写像定理

(工事中。現時点では穴だらけ。立ち入り禁止。)

9.1 Riemann の写像定理の証明

補題 9.1 D は $\mathbb{C}$ の単連結領域, $D \neq \mathbb{C}$ とするとき、あす有界単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ と双正則写像 $\varphi\colon D \to \Omega$ が存在する。

証明 $a \in \mathbb{C} \setminus D$ を任意に 1 つ取り $f(z) := z - a$ とおく。これは正則で、D では 0 にならず、D は単連結であるから、ある正則関数 $g\colon D \to \mathbb{C}$ が存在して、$f(z) = g(z)^2$. (要するに $\sqrt{z-a}$ の一価正則な分枝 g が取れる。)

g は単射である (もしそうでなければ、$f = g^2$ も単射でなくなり、矛盾が生じる)。

$D_1 := g(D)$, $D_2 := -g(D)$ とおくと、$D_1 \cap D_2 = \emptyset$. (もしそうでなければ、ある $z_1, z_2 \in D$ が存在して、$g(z_1) = -g(z_2)$. このとき $z_1 - a = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - a$. これから $z_1 = z_2$. すると $g(z_1) = g(z_2) = 0$. ゆえに $z_1 = z_2 = a$. ゆえに $a \in D$. これは矛盾である。)

$b \in D_2$ と任意に 1 つ取り、$h(z) := \dfrac{1}{z-b}$ とおくと、h は D_1 で正則かつ単射である。

$D(b;r) \subset D_2$ を満たす r が取れる。このとき、$z \in D_1$ ならば、$|z-b| \geq r$. ゆえに $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$. したがって、$h(D_1)$ は有界である。

$$\Omega := h \circ g(D), \quad \varphi\colon D \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) := h(g(z))$$

とすれば Ω, φ は条件を満たす。■

Ω は

$$\Omega \subset D(0;1), \quad 0 \in \Omega$$

を満たすように取れる。定理は、$D \subset D(0;1)$, $0 \in D$ として証明すれば良い。

$$\mathcal{F} := \left\{ |f'(0)| \;\middle|\; f\colon D \to D(0;1)\ \text{正則},\ f(0) = 0 \right\}. \tag{9.1}$$

補題 9.2 D は $\mathbb{C}$ の単連結開集合で、$D \neq \mathbb{C}$, $0 \in D$ を満たすとする。$\mathcal{F}$ は (9.1) で定める。双正則な $f_0 \in \mathcal{F}$ が存在したとすると

$$|f_0'(0)| = \max_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| .$$

証明 $f_0 \in \mathcal{F}$ が双正則であったとする。任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して、$h := f \circ f_0^{-1}$ とおくと、$h\colon D(0;1) \to D(0;1)$ は正則で、$h(0) = 0$ を満たす。ゆえに Schwarz の補題より

$$(\forall z \in D(0:1))\ |h(z)| \le |z|, \quad |h'(0)| \le 1.$$

$h \circ f_0 = f$ であるから

$$|f'(0)| = |h'(0) f_0'(0)| \le |f_0'(0)| .■$$

補題 9.3 D は $\mathbb{C}$ の単連結開集合で、$D \neq \mathbb{C}$, $0 \in D$ を満たすとする。$\mathcal{F}$ は (9.1) で定める。$f_0 \in \mathcal{F}$ が

$$|f_0'(0)| = \max_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$$

を満たすならば、$f_0(D) = D(0;1)$.

証明 背理法による。$f_0(D) \neq D(0;1)$ と仮定するとある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して $0 < |\alpha| < 1|$ かつ $\alpha \notin f_0(D)$.

$$f_1(z) := \frac{f_0(z) - \alpha}{\overline{\alpha} f_0(z1)}$$

とおくと (f_0 と、単位円盤を単位円盤に写す 1 次分数変換のうち、α を原点に写すもの、との合成)、f_1 は D で正則で、$|f_0(z)| < 1$, $(\forall z \in D)$ $f_1(z) \neq 0$.

D は単連結であるから、$f_2(z)^2 = f_1(z)$ $(z \in D)$ を満たす正則関数 $f_2\colon D \to \mathbb{C}$ が存在する。$\beta := f_2(0)$ とおくと、$\beta^2 = \alpha$ であり

$$f_3(z) := \frac{f_2(z) - \beta}{\overline{\beta} f_2(z) - 1} \quad (z \in D)$$

とおくと $f_3 \in \mathcal{F}$. ところが

$$f_1'(0) = \left(|\alpha|^2 - 1\right) f_0'(0), \quad f_2'(0) = \frac{f_1'(0)}{2\beta}, \quad f_3'(0) = \frac{f_2'(0)}{|\beta|^2 - 1}$$

であるから

$$f_3'(0) = \frac{1 + |\alpha|}{2\beta} f_0'(0).$$

ゆえに

$$|f_3'(0)| = \frac{1 + |\beta|^2}{2\,|\beta|} |f_0'(0)| > |f'(0)| .$$

これは矛盾である。■

補題 9.4 D は $\mathbb{C}$ の開集合で $a \in D$ とする。$\mathcal{H}(D)$ は、D で正則な関数全体の集合に、広義一様収束の位相を入れた Frechét 空間とする。このとき $\mathcal{H}(D) \ni f \mapsto f'(a) \in \mathbb{C}$ は連続である。

証明 列的連続性を示せば良い。$\{f_n\}$ を $\mathcal{H}(D)$ 内の列で、$n \to \infty$ のとき $f_n \to f$ を満たすものとする。r を十分小さな正の数として、$\gamma(t) := a + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと

$$f_n'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz,$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

が成り立つ。γ^* の上では f_n は f に一様収束するので、$n \to \infty$ のとき $f_n'(a) \to f'(a)$. ■

定理の証明 $0 \in D$, $D \subset D(0;1)$ として証明すれば良い。

$$\mathcal{F}_0 := \left\{ f \in \mathcal{H}(D) \;\middle|\; f \text{ は単射},\ f(0) = 0, |f'(0)| \ge 1,\ f(D) \subset D(0;1) \right\}$$

とおく。

$\mathcal{F}_0 \ne \emptyset$ (実際、$f(z) := z$ は $\mathcal{F}_0$ に属する)。
[主張] $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{H}(D)$ の閉部分集合である。
(証明) $\{f_n\}$ が $\mathcal{F}_0$ 内の列で、$\mathcal{H}(D)$ において $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ が成り立つとするとき、任意の $z \in D$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(z)| < 1$ であるから、$|f(z)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z)| \le 1$. そして

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0,$$

$$|f'(0)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n'(0)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| \ge 1.$$

f は定数関数ではないので、最大値の原理により $|f(z)| < 1$. また、Hurwitz の定理により、f は単射である。以上から $f \in \mathcal{F}_0$. (主張の証明終)

$\mathcal{F}_0$ は有界であるから ($\because |f(z)| < 1$)、空でない compact 空間である。ゆえに、ある $f_0 \in \mathcal{F}_0$ が存在して、

$$|f_0'(0)| = \sup_{f \in \mathcal{F}_0} |f'(0)|.$$

補題 9.3 により、$f_0(D) = D(0;1)$ (え？なぜ？？). ゆえに $f_0 \colon D \to D(0;1)$ は双正則である。
■

9.2 耳学問: 一意化定理

一意化定理 (the uniformization theorem) 「任意の単連結 Riemann 面は、単位円盤、複素平面、Riemann 球面のいずれかに等角同値である。」この定理は、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域に限れば、Riemann の写像定理でほぼ解決する。そういう意味では、一意化定理は Riemann の写像定理の一般化である、と言える。

(Abikoff [29])

10 解析接続 (analytic continuation)

(現時点で非常に粗いけれど、加筆していく場所を定めるために、書いておく。別の文書を執筆中で、その完成度が上がったら、こちらに取り込む予定である。)

10.1 一致の定理の復習と解析接続

まず「解析的」という言葉を思い出しておこう。

定義 10.1 (解析的, 解析関数) ある領域 D $(\subset \mathbb{C})$ で定義された関数 f が**解析的** (**analytic**) であるとは、D の各点の近傍で、f が収束冪級数に展開できることを言う。

余談 10.2 (解析的 vs 正則) ある関数が解析的というのは、上で述べたように定義域の各点のある近傍でテイラー展開できるということだが、実は正則である (定義域の各点で 1 回微分可能である) ことと同値である。「解析関数」という言葉は、以下で定義する解析接続によって定まる “関数” という意味で使われることが多い。多くの場合、その関数は “多価関数” となる。$w = f(z)$ が 1 つの z に複数の w を対応させる場合、「関数」と呼ぶべきではない、という立場もあり得るが、関数論では多価関数を認めるのが普通である。その場合、1 つの z に必ずただ 1 つの w を対応させる普通の関数のことを、強調して「1 価関数」と呼ぶ。■

一致の定理を軽く復習しよう。

定理 10.3 ((再掲) 一致の定理 (identity theorem)) D は $\mathbb{C}$ の領域、f と g は D で定義された正則関数 (解析的な関数)、数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は次の (i), (ii) を満たすとする。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = a.$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $z_n \in D,\ z_n \neq a,\ f(z_n) = g(z_n).$

このとき、D 全体で f と g は一致する:

$$(\forall z \in D) \quad f(z) = g(z).$$

系 10.4 定義域内のある点の近傍で一致する正則関数 f と g は、全体で一致する。

系 10.5 定義域内のある曲線 (ただし定数曲線ではないとする) 上で一致する正則関数 f と g は、全体で一致する。

系 10.6 恒等的に 0 でない解析関数の零点は離散的である。実際 a が正則関数 f の零点とするとき、

$$(\exists r>0)(\forall z\in D(a;r)\setminus\{a\})\quad f(z)\neq 0$$

が成り立つ。

例 10.7 (実関数の複素関数への拡張) テイラー展開 (冪級数展開) が可能な実関数 $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$ (I は $\mathbb{R}$ の区間) は、複素平面内の領域 D ($\supset I$) を定義域とする正則関数 $f\colon D\to\mathbb{C}$ に拡張される (f が φ の拡張であるとは、$\forall x\in I$ に対して、$\varphi(x)=f(x)$ が成り立つということ) が、定義域を固定する限り、一意的である。つまり、正則関数 $g\colon D\to\mathbb{C}$ がやはり φ の拡張であるならば、$f=g$. これから、初等関数 (多項式関数、有理関数、三角関数、指数関数、対数関数、逆三角関数やそれらの合成関数) は、複素関数としても自動的に意味が確定する (つまり解析的という条件をつける限り、拡張の仕方は本質的にただ一通りしかないので、恣意性はない)。 ■

一般に写像の拡張というものがあるが、正則関数の (真に大きな定義域への) 正則な拡張のことを解析接続と呼ぶ。

(正則接続とは呼ばないようである。)

定義 10.8 (解析接続) D は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon D\to\mathbb{C}$ は正則とする。$\widetilde{D}\supset D$, $\widetilde{D}\neq D$ を満たす $\mathbb{C}$ の領域 $\widetilde{D}$ と、$\widetilde{D}$ で正則な関数 $\widetilde{f}\colon\widetilde{D}\to\mathbb{C}$ が存在して

$$f(z)=\widetilde{f}(z)\quad(z\in D)$$

が満たされるとき、f は $\widetilde{D}$ に**解析接続される**といい、また $\widetilde{f}$ を f の $\widetilde{D}$ への**解析接続** (**analytic continuation**) と呼ぶ。

例 10.9 $D=D(0;1)$, $\widetilde{D}=\mathbb{C}\setminus\{1\}$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad(z\in D),$$

$$\widetilde{f}(z)=\frac{1}{1-z}\quad(z\in\widetilde{D})$$

とするとき、$\widetilde{f}$ は f の $\widetilde{D}$ への解析接続である。■

余談 10.10 領域 D と正則関数 $f\colon D\to\mathbb{C}$ が与えられたとき、f の解析接続が存在するか、という問の答は、「存在するとは限らない」である。f の解析接続が存在しないとき、D は f の**存在領域**である、∂D は f の**自然境界**である、といわれる。

たとえば冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}=z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots$$

は $D=D(0;1)$ で正則な関数 f を定めるが、f は D より真に大きな領域に解析接続されない (D は f の存在領域である) ことが知られている[29]。

$\mathbb{C}$ の任意の領域は、

系 10.11 (一意接続の原理) D, $\widetilde{D}$ が $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon D\to\mathbb{C}$ は正則であるとき、f の $\widetilde{D}$ への解析接続が存在するならば、一意的である。

証明 $\widetilde{f}_1\colon \widetilde{D}\to\mathbb{C}$ と $\widetilde{f}_2\colon \widetilde{D}\to\mathbb{C}$ がともに f の解析接続ならば

$$\widetilde{f}_1(z)=f(z)=\widetilde{f}_2(z)\quad (z\in D).$$

一致の定理より、$\widetilde{D}$ 全体で $\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ が成り立つ。■

10.2 関数要素の直接・間接解析接続

(図を用意しよう。)

Weierstrass は、a を中心とする収束冪級数 $h(z)$ と、その収束円 $D=D(a;R)$ のとの組 $(h(z),D)$ を、a を中心とする**関数要素** (function element) と呼んだ。

$h(z)$ が、a を中心とする冪級数 (つまり $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ という形の式) であることを強調するために、$P(z-a)$ という記号で表すことがある。以下、それを採用しよう。

a を中心とする関数要素 $(P(z-a),D(a;R))$ が与えられたとして、任意の $b\in D:=D(a;R)$ に対して、$P(z-a)$ は b のまわりで冪級数展開できる:

$$P(z-a)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(z-b)^n=:P(z-b).$$

この収束円を $D'=D(b;r)$ とすると、r は $r\geq R-|a-b|$ を満たす数である。特に $r>0$.

こうして得られた関数要素 $(P(z-b),D(b;r))$ を、$(P(z-a),D(a;R))$ の**直接解析接続**と呼ぶ。

しばしば D' は D をはみ出す ($D'\setminus D\neq\emptyset$ すなわち $r>R-|a-c|$)。そのとき、

$$f(z):=\begin{cases} h(z) & (z\in D),\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n & (z\in D'\setminus D)\end{cases}$$

で定めた $f\colon D\cup D'\to\mathbb{C}$ は、h の $D\cup D'$ への解析接続となる。

[29] 直接的な証明は、例えば辻・小松 [13] 問題 IV 60 (2) にある。また、Ostrowski-Hadamard の**空隙定理** (Ostrowski-Hadamard gap theorem) 「冪級数 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{n_k}$ において、$\displaystyle\liminf_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}>1$ ならば、その収束円は f の自然境界である。」という定理があり (これも [13] に載っている)、その簡単な系でもある。

直接解析接続を

$$(P(z-a_1), D(a_1; r_1)), (P(z-a_2), D(a_2; r_2)), \cdots, (P(z-a_n), D(a_n; r_n))$$

と繰り返して得られた $(P(z-a_n), D(a_n; r_n))$ を $(P(z-a_1), D(a_1; r_1))$ の**間接解析接続**と呼ぶ。

こうして定義域を少しずつ広げていける可能性がある。

10.3 関数要素の曲線に沿う解析接続、Weierstarss の解析関数

特にある曲線上の点を辿って関数要素を直接・間接解析接続していくことを、**曲線に沿う解析接続**と言う。

曲線 C が $z=\varphi(t)$ $(t \in [0,1])$ で与えられるとする。各 $t \in [0,1]$ に対して、$\varphi(t)$ を中心とする関数要素 $(h_t(z), D_t)$ があって、条件

$$(\forall t \in [0,1])\ (\exists \delta > 0)\ (\forall s \in [0,1]\colon\ |t-s| < \delta)\ D_s \cap D_t \neq \emptyset \text{ かつ } h_s(z) = h_t(z)\ (z \in D_s \cap D_t).$$

を満たすとき、$(h_1(z), D_1)$ は $(h_0(z), D_0)$ の C に沿う解析接続であるという。1つの関数要素から出発して、あらゆる曲線に沿って可能な限り解析接続を行って得られる「関数」を**Weierstrass の解析関数**と呼ぶ。

2つの曲線 C と $\widetilde{C}$ が共通の始点 a と終点 b を持つとき、a を中心とする関数要素を、C と $\widetilde{C}$ に沿って b まで解析接続したとき、得られる関数要素をそれぞれ $(h_1(z), D_1)$, $\left(\widetilde{h}_1(z), \widetilde{D}_1\right)$ とすると、これらは異なる可能性がある。そのとき、1つの点 b に複数の値 $h_1(b)$, $\widetilde{h}_1(b)$ が対応しうるので、考えている解析関数は多価関数になる。

10.4 対数関数の解析接続

高木「函数論縁起」([30]) を見ることをお勧めする。

実関数 $\log x$ を $x=1$ で Taylor 展開すると

$$\begin{aligned}\log x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots \quad (-1 < x-1 < 1)\end{aligned}$$

となる[30]。そこで

$$h_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n$$

とおくと、これは収束冪級数で、収束円は $D_0 := D(1;1) = \{z \in \mathbb{C}; |z-1| < 1\}$. また明らかに

$$\forall x \in (0,2) \quad h_0(x) = \log x.$$

[30] この等式が成り立つこと自体の証明は、$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ から得られる $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ を使うのが簡単である。これが実は Taylor 展開であることを確めるのも容易である。

$(h_0(z), D_0)$ から出発して、Weierstrass の解析関数を作ろう。

$h_0'(z) = \dfrac{1}{z}$ であることに注意すると、

$$h_0(z) = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\gamma \text{ は } D_0 \text{ 内で } 1 \text{ と } z \text{ を結ぶ区分的に滑らかな曲線})$$

が成り立つことが分かる。γ の取り方は色々あるが、0 を含まない円盤 D_0 内にあることから、どれを選んでも線積分の値は変わらないことに注意しよう (積分路変形の原理)。このような場合、以下では、単に $\displaystyle\int_\gamma$ を $\displaystyle\int_1^z$ と書く。

さて、$z^* \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ とし、$C: z = \varphi(t)$ $(t \in [0,1])$ を、$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内で 1 と z^* を結ぶ区分的に滑らかな任意の曲線とする。$(h_0(z), D_0)$ を C に沿って解析接続した $(h_1(z), D_1)$ は、

$$D_1 := \{z \in \mathbb{C}; |z - z^*| < |z^*|\}, \quad h_1(z) := \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{z^*}^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (z \in D_1), \quad \text{特に } h_1(z^*) = \int_C \frac{d\zeta}{\zeta}$$

で与えられることを証明しよう ($h_1(z)$ の定義式の右辺第 2 項は、z^* から z に向う D_1 内の区分的に滑らかな曲線に沿う線積分である)。そのため、各 $t \in (0,1]$ に対して、$h_t(z)$ と D_t を

$$D_t := \{z \in \mathbb{C}; |z - \varphi(t)| < |\varphi(t)|\}, \quad h_t(z) := \int_{C_t} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\varphi(t)}^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおく。ただし C_t は、C の、パラメーターが $[0,t]$ の範囲の (1 が始点、$\varphi(t)$ が終点の) 部分曲線

$$[0,t] \ni s \mapsto \varphi(s) \in \mathbb{C}$$

のことであり、$\displaystyle\int_{\varphi(t)}^z$ は、D_t 内で $\varphi(t)$ を z と結ぶ区分的に滑らかな曲線 (例えば有向線分でも良い) である。$t = 1$ のとき、既に定義してある D_1, h_1 に一致することに注意しよう。

$h_t(z)$ は、$\varphi(t)$ を中心に冪級数展開できることを確めよう[31]。$1/\zeta$ は、D_t において、

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\varphi(t) + \zeta - \varphi(t)} = \frac{1}{\varphi(t)} \frac{1}{1 + \dfrac{\zeta - \varphi(t)}{\varphi(t)}} = \frac{1}{\varphi(t)} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{\zeta - \varphi(t)}{\varphi(t)}\right)^n$$

と広義一様収束する冪級数に展開できる。ゆえに項別積分によって、

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(t)}^z \frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{1}{\varphi(t)} \int_{\varphi(t)}^z \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{\zeta - \varphi(t)}{\varphi(t)}\right)^n d\zeta = \frac{1}{\varphi(t)} \sum_{n=0}^\infty \int_{\varphi(t)}^z \frac{(-1)^n}{\varphi(t)^n} (\zeta - \varphi(t))^n \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{(z - \varphi(t))^{n+1}}{\varphi(t)^{n+1}} \quad (z \in D_t).\end{aligned}$$

ゆえに

$$h_t(z) = \int_1^{\varphi(t)} \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{(z - \varphi(t))^{n+1}}{\varphi(t)^{n+1}} \quad (z \in D_t).$$

[31] 正則性は明らかだから、冪級数展開出来るのは当たり前、とも言えるが、ここでは具体的に冪級数展開してみる。

これは (複雑だが) 確かに冪級数展開である。

φ の連続性から ($\varepsilon-\delta$ 論法の $\varepsilon=|\varphi(t)|$ として)、

$$\exists\delta>0,\forall s\in[0,1],|s-t|\le\delta\Longrightarrow|\varphi(t)-\varphi(s)|<|\varphi(t)|\,.$$

ゆえにこのとき $\varphi(s)\in D_t$. ゆえに $D_s\cap D_t\ne\emptyset$ (少なくとも $\varphi(s)$ を含むから). $\forall z\in D_t\cap D_s$ に対して、

$$h_s(z)-h_t(z)=\int_0^{\varphi(s)}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{\varphi(s)}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\left(\int_0^{\varphi(t)}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{\varphi(t)}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right)=\int_{\varphi(t)}^{\varphi(s)}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{\varphi(s)}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{z}^{\varphi(t)}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

これは、関数 $1/\zeta$ の、D_t 内の閉曲線に沿う線積分であるから、0 に等しい。ゆえに $h_t(z)=h_s(z)$. 以上から、$(h_1(z),D_1)$ は、$(h_0(z),D_0)$ の曲線 C に沿う解析接続である。

誤解を招く恐れがないわけではないが、$(h_0(z),D_0)$ から得られる Weierstrass の解析関数は

$$f(z):=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

である。ただし $\displaystyle\int_1^z$ は、$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内で、1 と z を結ぶ区分的に滑らかな曲線 C に沿う線積分を意味する。z を固定したときも、C の取り方は色々あり、また C の取り方によって、線積分の値は異なる。

10.5 その先

定理 10.12 (モノドロミー定理 (The Monodromy Theorem, Monodromiesatz))
Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域、$a\in\Omega$, (f,D) は a における関数要素で、Ω 内の任意の曲線に沿って解析接続できるとする。このとき、Ω で一価正則な関数 F で、$F(z)=f(z)$ $(z\in D)$ となるものが一意的に存在する。

モノドロミー定理は、**一価性定理**と訳されることも多い。

11 Schwarz の鏡像の原理 (Schwarz reflection principle)

まだ工事中で、ところどころ穴が空いているので、踏み入る場合は、足元に気をつけて下さい。

Schwarz の鏡像の原理は有名であるが、案外と載っていない本が少なくない。載っていても、簡単な場合しか説明していないものが多い。

Conway [31] が詳しい。

11.1 実軸を超えての拡張

この項では、$A\subset\mathbb{C}$ に対して、

$$A^*:=\{z\in\mathbb{C};\overline{z}\in A\}$$

とおく。すなわち、A^* は A を実軸に関して折り返した集合である。
$A^*=A$ であるとき、A は実軸に関して対称である、と言うことにする。

命題 11.1 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、

$$\Omega^*:=\{z\in\mathbb{C};\overline{z}\in\Omega\}$$

とおき、$f^*\colon\Omega^*\to\mathbb{C}$ を

$$f^*(z):=\overline{f(\overline{z})}\quad(z\in\Omega^*)$$

で定めると、f^* は正則である。

証明 $c\in\Omega^*$ とすると、$\overline{c}\in\Omega$. f は Ω で正則だから、$\exists\varepsilon>0$, $\exists\{a_n\}_{n\geq 0}$ s.t

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-\overline{c}\right)^n\quad(z\in D\left(\overline{c};\varepsilon\right)).$$

このとき、$\forall z\in D(c;\varepsilon)$ に対して、$\overline{z}\in D\left(\overline{c};\varepsilon\right)$ であるから、

$$f\left(\overline{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\overline{z}-\overline{c}\right)^n.$$

ゆえに

$$f^*(z)=\overline{f\left(\overline{z}\right)}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\overline{z}-\overline{c}\right)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}(z-c)^n.$$

ゆえに f^* は $D(c;\varepsilon)$ で正則である。ゆえに f^* は Ω^* で正則である。■
同様に u が Ω で調和ならば、$u^*(z):=u(\overline{z})$ は Ω^* で調和である。

補題 11.2 Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\Omega\neq\emptyset$, $\Omega^*=\Omega$ (Ω は実軸に関して対称) とするとき、Ω は実軸の開区間を含む。

証明 $\Omega\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$ である。実際、もしも $\Omega\cap\mathbb{R}=\emptyset$ ならば、

$$\Omega^+:=\Omega\cap H^+,\quad\Omega^-:=\Omega\cap H^-,\quad H^+:=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z>0\},\quad H^-:=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z<0\}$$

とするとき、

$$\Omega=\Omega^+\cup\Omega^-,\quad\Omega^+\cap\Omega^-=\emptyset.$$

これは Ω の連結性に矛盾する。ゆえに $\Omega\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$.
$x\in\Omega\cap\mathbb{R}$ とすると、Ω が開集合であることから、$\exists\varepsilon>0$ s.t. $D(x;\varepsilon)\subset\Omega$. このとき、$I:=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\{t\in\mathbb{R};x-\varepsilon<t<x+\varepsilon\}$ とおくと、$I\subset\Omega$. ■

命題 11.3 Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\Omega \neq \emptyset$, $\Omega^* = \Omega$ (Ω は実軸に関して対称), $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、実軸上のある開区間で f は実数値を取るとする。このとき

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad (z \in \Omega).$$

証明　補題から、開区間 $I \subset \mathbb{R}$ が存在して、$f(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in I)$.

$$g(z) := f(z) - \overline{f(\overline{z})} \quad (z \in \Omega)$$

とおくと、g は Ω で正則であり、

$$g(x) = 0 \quad (x \in I).$$

一致の定理から、$g \equiv 0$ in Ω. ゆえに $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$. ■

定理 11.4 (調和関数の鏡像の原理) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\Omega \neq \emptyset$, $\Omega^* = \Omega$ (Ω は実軸に関して対称) とする。

$$\Omega^+ := \Omega \cap H^+, \quad \Omega^- := \Omega \cap H^-, \quad H^+ := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}, \quad H^- := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z < 0\},$$

$$\sigma := \Omega \cap \mathbb{R}$$

とおく。$v\colon \Omega^* \cup \sigma = \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z \geq 0\} \to \mathbb{R}$ が連続で

$$\triangle v = 0 \quad \text{in } \Omega^+, \quad v = 0 \quad \text{on } \sigma$$

が成り立つならば

$$V(z) := \begin{cases} v(z) & (z \in \Omega^+ \cup \sigma) \\ -v(\overline{z}) & (z \in \Omega^-) \end{cases}$$

とおくと $\triangle V = 0$ in Ω. すなわち実軸上で 0 である調和関数は奇関数拡張で調和に拡張できる。

証明　$\triangle V = 0$ in Ω^- は明らかである。$x_0 \in \sigma$ として、$\triangle V(x_0) = 0$ を示そう。$\overline{D}(x_0; \varepsilon) \subset \Omega$ となる $\varepsilon > 0$ が取れる。

$$P_V(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{|z - x_0| = \varepsilon}$$

P_V は $|z - x_0| < \varepsilon$ で調和であるから、$V - P_V$ はその円盤の上半分、下半分のそれぞれで調和である。$V - P_V$ は円周上で 0 である。円盤内の実軸上 ($\subset \sigma$) では $V = v = 0$, また積分の対称性から $P_V = 0$ であるから、$V - P_V = 0$. 調和関数の最大値原理から $V - P_V$ は円盤の上半分、下半分で 0 に等しい。ゆえに $V = P_V$. 特に $\triangle V(x_0) = \triangle P_V(x_0) = 0$. ■

余談 11.5 (調和関数の "偶関数拡張", "奇関数拡張") 上の話を実関数として見てみよう。良くやるように、正則関数 f に対して、実部、虚部をそれぞれ u, v とおく。つまり

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

このとき
$$f^*(x+iy)=\overline{f(x-iy)}=u(x,-y)-iv(x,-y).$$
u と v が調和ならば、$u(x,-y)$ と $-v(x,-y)$ も調和である。確かにそれは明らかだ。

u, v が $\Omega^+\cup\sigma$ で調和であるとするとき、
$$U(x,y):=\begin{cases}u(x,y) & ((x,y)\in\Omega^+\cup\sigma)\\ u(x,-y) & ((x,y)\in\Omega^-),\end{cases}$$
$$V(x,y):=\begin{cases}v(x,y) & ((x,y)\in\Omega^+\cup\sigma)\\ -v(x,-y) & ((x,y)\in\Omega^-)\end{cases}$$
とおく。まず U は Ω で調和である。V は不連続かもしれない。連続であるためには
$$V=0 \quad \text{on } \sigma$$
である必要がある。逆にこの条件が成り立っているとき、V は Ω で調和である。1 変数実関数の偶関数拡張、奇関数拡張の滑らかさの話に良く似ている。 ■

上の定理の正則関数版。系としての証明と、Morera の定理を用いる証明と。

11.2 円弧を超えての拡張

11.2.1 円に関する鏡像

複素平面内の円 C: $|z-a|=r$ を固定する。

円 C に関して、$z\in\mathbb{C}$ の鏡像 (鏡像点, 鏡映点) が w であるとは、a, z, w が一直線上に並び、
$$|z-a|\cdot|w-a|=r^2$$
を満たすことを言う。z の鏡像 w は z から一意的に定まる。以下、これを z^* と書くことにする。
$$(z^*)^*=z$$
が成り立つ。また、
$$\lim_{z\to a}z^*=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}z^*=a$$
が成り立つ。(気分的には「だから」) a の鏡像は ∞, ∞ の鏡像は a と定義する:
$$a^*=\infty,\quad \infty^*=a.$$
$\widehat{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ とする。$R(z):=z^*$ により、R: $\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ が定まる。これは同相写像であり、$R^{-1}=R$.

$z\neq a$ であれば、
$$(z^*-a)\left(\overline{z}-\overline{a}\right)=r^2$$
が成り立つ。これから
$$z\in C \quad\Leftrightarrow\quad z^*=z$$

がすぐに分かる。

$A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が円 C に関して対称であるとは、

$$R(A) = A$$

が成り立つことをいう。

命題 11.6 $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき、$R\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を円 $C\colon |z-a| = r$ に関する鏡像とする。このとき、

$$S(z) := a + \frac{r^2}{z - \overline{a}}, \quad T(z) := \overline{a} + \frac{r^2}{z-a}$$

とおくと、S は $\mathbb{C} \setminus \{\overline{a}\}$ で、T は $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ で正則で、

$$R(z) = S(\overline{z}) = \overline{T(z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}).$$

11.2.2　円に関する Schwarz の鏡像の原理

前項の結果を、領域 Ω が上半平面内に含まれ、実軸上の開区間 σ が境界 $\partial\Omega$ の一部となっているとき、Ω で定義された正則関数の、下半平面への正則な拡張を保証する定理ととらえ、上半平面の代わりに円 C の内部で置き換えた定理を考えよう。

$$C_1 := \{z \in \mathbb{C}; |z - a_1| = r_1\}, \quad D_1 := \{z \in \mathbb{C}; |z - a_1| < r_1\},$$
$$C_2 := \{z \in \mathbb{C}; |z - a_2| = r_2\}, \quad D_2 := \{z \in \mathbb{C}; |z - a_2| < r_2\},$$
$$\Omega \subset D_1, \quad \sigma := \partial\Omega \cap C_1 = C_1 \quad \text{or} \quad \left\{a + r_1 e^{i\theta}; \theta \in (\alpha, \beta)\right\}, \quad \beta - \alpha \le 2\pi$$

$f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$,

$$f(\Omega) \subset D_2, \quad f(\sigma) \subset C_2$$

とする。

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & (z \in \overline{\Omega}) \\ R_2(f(R_1(z))) & (z \in R_1(\Omega)) \end{cases}$$

$\widetilde{\Omega} := \Omega \cup \sigma \cup R_1(\Omega)$ は C_1 に関して対称な領域で、$\widetilde{f}$ は $\widetilde{\Omega}$ で正則である。実際、正則関数 $S_1\colon \mathbb{C} \setminus \{\overline{a_1}\} \to \mathbb{C}$, $T_2\colon \mathbb{C} \setminus \{a_2\} \to \mathbb{C}$ で、

$$R_1(z) = S_1(\overline{z}), \quad R_2(z) = \overline{T_2(z)}$$

を満たすものが存在する。

$$R_2(f(R_1(z))) = \overline{T_2(f(S_1(\overline{z})))}$$

であるから、$\widetilde{f}|_{R_1(\Omega)}$ は正則である。

11.3　解析曲線を超えての拡張

(準備中)

A　解答

解答 1. $x=m+1/2\ (m\in\mathbb{Z})$ のとき

$$\begin{aligned}&e^{i\pi z}=e^{i\pi(m+1/2+iy)}=e^{-\pi y}e^{i\pi(m+1/2)}=e^{-\pi y}(-1)^m i,\\&e^{-i\pi z}=e^{\pi y}(-1)^m(-i)=(-1)^{m+1}e^{\pi y}i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_1(z)&=\frac{2\pi i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}=\frac{2\pi i}{e^{-\pi y}(-1)^m i-e^{\pi y}(-1)^{m+1}i}=\frac{2\pi}{(-1)^m\left(e^{-\pi y}+e^{\pi y}\right)}=(-1)^m\frac{\pi}{\cosh\pi y},\\s_2(z)&=\pi i\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}=\pi i\frac{e^{-\pi y}(-1)^m i+e^{\pi y}(-1)^{m+1}i}{e^{-\pi y}(-1)^m i-e^{\pi y}(-1)^{m+1}i}=\pi i\frac{e^{-\pi y}-e^{\pi y}}{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}=-i\pi\tanh\pi y.\end{aligned}$$

ゆえに ($x=N+1/2,\ -(N+1/2)\ (N\in\mathbb{N})$ のとき)

$$|s_1(z)|=\frac{\pi}{\cosh\pi y}\le\pi,\quad |s_2(z)|=\pi\left|\tanh(\pi y)\right|\le\pi.$$

$y=(N+1/2)$ のとき

$$\begin{aligned}&e^{i\pi z}=e^{i\pi(x+(N+1/2)i}=e^{-\pi(N+1/2)}e^{i\pi x}=e^{-\pi(N+1/2)}e^{i\pi x},\\&e^{-i\pi z}=e^{\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}.\end{aligned}$$

$$s_1(z)=\frac{2\pi i}{e^{-\pi(N+1/2)}e^{i\pi x}-e^{\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}}=\frac{2\pi i}{e^{(N+1/2)\pi}\left(-e^{-i\pi x}+e^{-\pi(2N+1)}e^{i\pi x}\right)},$$

$$|s_1(z)|\le\frac{2\pi}{e^{(N+1/2)\pi}\left(1-e^{-\pi(2N+1)}\right)}=\pi e^{-N\pi}\frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi(2N+1)}}.$$

$$\frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi(2N+1)}}\le\frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi}}=\frac{\pi}{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}\le\frac{1}{2}.$$

$$|s_1(x)|\le\frac{\pi e^{-\pi N}}{2}.$$

$$s_2(z)=i\pi\frac{-e^{\pi(N+1/2)}e^{i\pi x}+e^{\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}}{-e^{\pi(N+1/2)}e^{i\pi x}-e^{\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}}=-i\pi\frac{1+e^{-2\pi(N+1/2)}e^{2\pi ix}}{1-e^{-2\pi(N+1/2)}e^{2\pi ix}}$$

$$|s_2(z)|\le\pi\frac{1+e^{-2\pi(N+1/2)}}{1-e^{-2\pi(N+1/2)}}\le\pi\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\le 2\pi.$$

$y=-(N+1/2)$ のとき

$$e^{i\pi z}=e^{i\pi(x-(N+1/2)i}=e^{\pi(N+1/2)}e^{i\pi x}$$

$$e^{-i\pi z}=e^{-\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}.$$

$$s_1(z)=\frac{2\pi i}{e^{\pi(N+1/2)}e^{i\pi x}-e^{-\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}}=\frac{2\pi ie^{-(N+1/2)\pi}e^{-i\pi x}}{1-e^{-(2M+1)\pi}e^{-2\pi ix}}.$$

$$|s_1(z)|\le\frac{2\pi e^{-(N+1/2)\pi}}{1-e^{-(2N+1)\pi}}=\pi e^{-N\pi}\frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-(2N+1)\pi}}.$$

$$\frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi(2N+1)}} \le \frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi}} = \frac{2}{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}} \le \frac{1}{2}.$$

$$|s_1(x)| \le \frac{\pi e^{-\pi N}}{2}.$$

$$s_2(z) = i\pi\frac{-e^{\pi(N+1/2)}e^{i\pi x} + e^{\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}}{-e^{\pi(N+1/2)}e^{i\pi x} - e^{\pi(N+1/2)}e^{-i\pi x}} = -i\pi\frac{1+e^{-2\pi(N+1/2)}e^{2\pi i x}}{1-e^{-2\pi(N+1/2)}e^{2\pi i x}}$$

$$|s_2(z)| \le \pi\frac{1+e^{-2\pi(N+1/2)}}{1-e^{-2\pi(N+1/2)}} \le \pi\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \le 2\pi.\blacksquare$$

問題へ戻る

解答 2.

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\cosh(iz) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z, \\
\sinh(iz) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i\sin z, \\
\tanh(iz) &= \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i\sin z}{\cos z} = i\tan z, \\
\coth(iz) &= \frac{1}{i\tan z} = -i\cot z.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\cos(iz) &= \cosh\left(i^2 z\right) = \cosh(-z) = \cosh z, \\
\sin(iz) &= \frac{1}{i}\sinh\left(i^2 z\right) = -i\cdot\sinh(-z) = i\sinh z, \\
\tan(iz) &= \frac{1}{i}\tanh(i^2 z) = -i\cdot\tanh(-z) = i\tanh z, \\
\cot(iz) &= \frac{1}{-i}\coth(i^2 z) = i\cdot\coth(-z) = -i\coth z.\blacksquare
\end{aligned}$$

問題へ戻る

解答 3. $f(z) := \dfrac{a}{a^2-z^2}$ とおくと、f の極は $z=\pm a$.

$$\operatorname{Res}(f;a) = \left.\frac{a}{(a^2-z^2)'}\right|_{z=a} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f;-a) = \left.\frac{a}{(a^2-z^2)'}\right|_{z=-a} = \frac{1}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2-n^2} &= -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f s_2; c\right) = -\left(\operatorname{Res}\left(f s_2; a\right) + \operatorname{Res}\left(f s_2; -a\right)\right) \\
&= -\left(s_2(a)\operatorname{Res}(f;a) + s_2(-a)\operatorname{Res}(f;-a)\right) \\
&= -\left(\pi\cot(\pi a)\cdot\frac{-1}{2} + \pi\cot(-\pi a)\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi\cot(\pi a).\blacksquare
\end{aligned}
$$

問題へ戻る

解答 4. (結果のみ)

$$
\pi\,\mathrm{cosec}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2}.
$$

問題へ戻る

解答 5. (準備中)

問題へ戻る

解答 6. (準備中)

問題へ戻る

解答 7. (準備中)

問題へ戻る

解答 8. (準備中)

問題へ戻る

解答 9. (準備中)

問題へ戻る

解答 10. (準備中)

問題へ戻る

解答 11. (準備中)

問題へ戻る

解答 12. (これは気になれば自分でやってみるくらいで良いと思う。そんなに難しくない。)
■

問題へ戻る

解答 13. (省略)

問題へ戻る

解答 14. $\zeta = z^{\pi/\alpha}$ と、Cayley 変換 $w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$ を合成すれば良い。

$$f(z) = \frac{z^{\pi/\alpha} - i}{z^{\pi/\alpha} + i}.$$

(ただし、冪関数 z^β は、$z^\beta = \exp(\beta \log z)$, $\log z = \log|z| + i\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ と定義する。) ■

問題へ戻る

解答 15. $F(z) := \frac{1+z}{1-z}$ は、$F(-1) = 0,\ F(1) = \infty,\ F(0) = 1,\ F(i) = i$ を満たす。ゆえに $F(\Omega) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg\zeta < \pi/2\}$. ゆえに $\widetilde{F}(z) := F(z)^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ は、$\widetilde{F}(\Omega) = H$ を満たす。これと Cayley 変換 $G(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$ を合成すればよい。

$$f(z) = G(\widetilde{F}(z)) = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - i}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + i}. \blacksquare$$

問題へ戻る

解答 16. 二つの円 $|z| = 1$, $|z-1| = 1$ の交点は $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $F(z) := \frac{z-a}{z-b}$ とおくと、$F(a) = 0$, $F(b) = \infty$. 円 $|z| = 1$, $|z-1| = 1$ は原点と ∞ を通る一般の円、つまり直線に写る。

$$F(1) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/3}} = e^{i2\pi/3},$$

$$F(0) = \frac{a}{b} = \frac{e^{-i\pi/3}}{e^{i\pi/3}} = e^{-i2\pi/3}.$$

ゆえに

$$F(\Omega) = \left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{2}{3}\pi < \arg z < \frac{4}{3}\pi \right\}.$$

そこで $\widetilde{F}(z) := \frac{z-a}{z-b} e^{-2\pi i/3}$ とすると

$$\widetilde{F}(\Omega) = \left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \arg z < \frac{2}{3}\pi \right\}.$$

$G(w) = w^{3/2}$ と合成すると

$$G \circ F(\Omega) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\zeta > 0\}.$$

Cayley 変換 $H(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i} = 1 - \frac{2i}{\zeta + i}$ と合成すると、像は $D(0;1)$ となる:

$$H \circ G \circ F(\Omega) = D(0;1).$$

ゆえに

$$f(z) = 1 + \frac{-2i}{\left(\frac{z-a}{z+b}e^{-2\pi i/3}\right)^{3/2} + i}$$

が条件を満たす写像である。■

問題へ戻る

解答 20. Joukovski 変換である。

問題へ戻る

解答 21. (とりあえず) (これは境界が $|z+a|\cdot|z-a| = \rho^2$ ということで、Cassini の橙形だな。$a=1$ とするとき、$f(z) = \dfrac{\rho z}{\sqrt{\rho^4 - 1 + z^2}}$ ということだった。)

$Z = z/a$ とおくと、$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - a^2| < \rho^2\}$ が $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z^2 - 1| < (\rho/a)^2\}$ になる、これを $|w| < 1$ に移すのが、$w = \dfrac{(\rho/a)Z}{\sqrt{(\rho/a)^4 - 1 + Z^2}}$ であるから、

$$w = \frac{(\rho/a)z/a}{\sqrt{(\rho/a)^4 - 1 + (z/a)^2}} = \frac{\rho z}{\sqrt{\rho^4 - a^4 + a^2 z^2}}.$$

これが正しいかどうかは知らない。図でも描いてみるのだろう。) ■

問題へ戻る

B 近傍

この講義では、近傍について学びたければ、位相空間のテキスト (古いけれど、大抵のことが確実に書いてあるものとして、松坂 [17], 河田・三村 [18] をあげておく) で自習しよう、というスタンスだけれど、言葉の定義くらいは説明しておこう。

以下、一応は一般的な位相空間の話として説明するが、$X = \mathbb{C}$ と思って読めば十分である。

定義 B.1 (点の近傍, 近傍系) (1) X を位相空間、$a \in X, U \subset X$ とする。U が a の**近傍** (a neighborhood of a) であるとは、X の開集合 V で、$a \in V \subset U$ を満たすものが存在することをいう。U が開集合である場合、U は a の**開近傍**であるという。

(2) X を位相空間, $a \in X$ とするとき、a の近傍全体の集合を a の**近傍系** (the complete system of neighborhoods for a) と呼ぶ。

余談 B.2 (部分集合の近傍) 点でなく、部分集合に対しても、その近傍が定義される。

X を位相空間、$A \subset X, U \subset X$ とする。U が A の**近傍** (neighborhood) であるとは、X の開集合 V で、$A \subset V \subset U$ を満たすものが存在することをいう。■

一般の「近傍」は知らなくても、「ε 近傍」という言葉は知っている人が多いと想像する。a の ε 近傍とは、a を中心とする半径 ε の開円盤 $D(a;\varepsilon)$ である。

例 B.3 (ε 近傍は近傍である) $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ とするとき、a の ε 近傍 $U := D(a;\varepsilon)$ は a の開近傍である。実際、$V := U$ とおくと、V は開集合で、$a \in V \subset U$. ゆえに U は a の開近傍である。 ■

例 B.4 $a \in \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ の場合、U が a の近傍であるためには、

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad D(a;\varepsilon) \subset U$$

であることが必要十分である。(感覚的な言い回しになるが、a に十分近い点はもれなく含んでいるのが近傍である。) この条件を見て、開集合の定義を思い出す人も多いと思う。開集合は、それに属する任意の点の近傍である。 ■

問 1. このことを証明せよ。

問 7 の解答 U が a の近傍とすると、ある開集合 V が存在して、$a \in V \subset U$. 開集合の定義から、$(\exists \varepsilon > 0)$ $D(a;\varepsilon) \subset V$. ゆえに $D(a;\varepsilon) \subset U$.

逆に、 $(\exists \varepsilon > 0)$ $D(a;\varepsilon) \subset U$ が成り立つとするとき、$V := D(a;\varepsilon)$ とおくと、V は開集合で、$a \in V \subset U$ が成り立つ。■

定義 B.5 (位相空間の 1 点の基本近傍系) X を位相空間、$a \in X$ とする。X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が、a の**基本近傍系**とは、次の 2 条件が成り立つことを言う。

(i) $\mathcal{U}$ の任意の元 U は a の近傍である (U は a を含むある開集合を含む)。

(ii) $(\forall V\colon V$ は a の近傍$)$ $(\exists U \in \mathcal{U})$ $U \subset V$.

基本近傍系は、近傍系の部分集合であるが、開集合、点列の極限、関数の極限・連続性などの判定には、基本近傍系だけあれば十分である (Riemann 球面の場合の定義 4.6 を見よ)。

例 B.6 (ある点を中心とする球の族は、その点の基本近傍系) $a \in \mathbb{C}$ とするとき、$\{D(a;\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ は a の基本近傍系になる。 ■

問 2. このことを証明せよ。(上で色々準備してあるので、簡単に済む。)

以上は、あらかじめ位相が決まっている (開集合系が与えられている) 場合の話であるが、位相が定まっていない集合に対して、各点の基本近傍系となるべき集合族を与えることで位相を定めることが出来る (Riemann 球面の位相の決定がまさにそれであった)。

そのための基礎となるのが次の命題である。

命題 B.7 集合 X の各点 x に対して、X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{B}(x)$ が与えられていて、次の条件を満たすとき、X の位相が一意的に存在して、それについて、$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系となる。

任意の $x \in X$ に対して、

(i) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$.

(ii) $(\forall V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x))\ (\exists U \in \mathcal{B}(x))\ U \subset V_1 \cap V_2$.

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{B}(x)$.

(変だな。(iii) は $\forall V \in \mathcal{B}(x)\ x \in V$ とすべきか？？)

問 3. このことを証明せよ。(方針の説明: 開集合をどう定義すれば良いか、すぐ思いつくであろう。そのとき、位相 (開集合系) の公理が成り立つことは簡単に確認できる。その開集合系を使って近傍を定義したとき、$\mathcal{B}(x)$ が x の基本近傍系になっていることを確認する。一意性は…)

問 8 の解答 (略)

問 9 の解答 (略)

C 自分用メモ: 近傍系, フィルター

位相空間 X とその要素 a があるとき、a の近傍系 (the complete system of neighborhoods, the neighborhood filter) とは、a の近傍全体の集合である。ここでは $\mathcal{U}(a)$ と書くことにする。

集合族 $\mathcal{B}(a)$ が a の基本近傍系 (a neighborhood basis for a, a filter base of the neighborhood filter) とは、次の二つの条件 (i), (ii) を満たすことと定義する。

(i) $\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{U}(a)$.

(ii) $(\forall U \in \mathcal{U}(a))\ (\exists V \in \mathcal{B}(a))\ V \subset U$.

$\mathcal{B}(a)$ が a の基本近傍系であれば、a の近傍系は、$\mathcal{B}(a)$ の要素を含むような集合の全体である:

$$\mathcal{U}(a) = \{U \mid (\exists V \in \mathcal{B}(a))\ V \subset U \subset X\}.$$

距離空間 $(X; d)$ において、

$$\mathcal{B}(a) = \{B(a; 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

で定まる $\mathcal{B}(a)$ は a の基本近傍系である。($B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$.)

半順序集合 $(X; \leq)$ の部分集合の族 $\mathcal{F}$ がフィルターであるとは、

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(b) $(\forall x, y \in \mathcal{F})\ (\exists z \in \mathcal{F})\ z \leq x \wedge z \leq y$.

(c) $(\forall x \in \mathcal{F})\ (\forall y \in X)\ x \leq y \Rightarrow y \in \mathcal{F}$.

フィルターの例として、位相空間 X, $a \in X$ に対して、a の近傍系 $U(a)$ があげられる。実際、(a) $\mathcal{U}(a)$ は順序集合 $(2^X; \subset)$ の部分集合の族であり、$X \in \mathcal{U}(a)$ であるから、$\mathcal{U}(a) \neq \emptyset$. (b) $U, V \in \mathcal{U}(a)$ とするとき、$W := U \cap V$ とすると、$W \in \mathcal{U}(a)$, $W \subset U$, $W \subset V$. (c) $U \in \mathcal{U}(a)$, $V \subset X$, $U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{U}(a)$.

D　ホモロジー形の Cauchy の積分定理

「複素関数」講義ノートの付録「回転数を使った Cauchy の積分定理、積分公式、留数定理」にマージする予定。

D.1　閉曲線の回転数とその性質

まず閉曲線が単に連続である (微分可能性を仮定しない) 場合の定義を紹介する。

$a \in \mathbb{C}$ と a を通らない $\mathbb{C}$ 内の閉曲線 C: $z = \varphi(t)$ $(t \in I := [\alpha, \beta])$ があるとする。(C が a を通らないというのは、$a \notin C^* = \{\varphi(t) \mid t \in I\}$ ということである。)

$$r(t) := |\varphi(t) - a| \quad (t \in I)$$

とおくと、r は 0 にならない連続関数である。

(D.1) $$\varphi(t) - a = r(t) e^{i\theta(t)} \quad (t \in I)$$

を満たす連続関数 $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ が存在する (証明準備中)。

閉曲線であることから $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. これから $r(\alpha) = r(\beta)$ かつ $\theta(\alpha) \equiv \theta(\beta) \pmod{2\pi}$. ゆえに

(D.2) $$n(C, a) := \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}$$

は整数である。$n(C, a)$ を a に関する曲線 C の**回転数** (winding number) または**指数** (index) と呼ぶ。

回転数 (指数) を表す記号は統一されていない。n(曲線, 点) は Ahlfors で採用されているものである (とりあえず偉い人に従っておく)。

C が C^k 級ならば r, θ も C^k 級であり、C が区分的 C^1 級ならば r, θ も区分的 C^1 級である。

命題 D.1 曲線 C が区分的 C^1 級であるとき、$n(C, a)$ は線積分で表される:

(D.3) $$n(C, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}.$$

証明　(以下では、C が C^1 級の場合の証明を書くが、区分的に C^1 級の場合の証明もマイナーチェンジである。よくある話。)

$z=r(t)e^{i\theta(t)}$ より $dz=r'(t)e^{i\theta(t)}+i\theta'(t)r(t)e^{i\theta(t)}dt$ で

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-a}&=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{r'(t)e^{i\theta(t)}+i\theta'(t)r(t)r^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\left(\frac{r'(t)}{r(t)}+i\theta'(t)\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi i}\left([\log|r(t)|]_\alpha^\beta+i\,[\theta(t)]_\alpha^\beta\right)=\frac{\theta(\beta)-\theta(\alpha)}{2\pi}=n(C,a).\blacksquare\end{aligned}$$

考える曲線を区分的 C^1 級に限って、この積分表示 (D.3) を回転数の定義としてあるテキストも多い。

(D.1), (D.2) から、直観的には、

回転数 $n(C,a)$ は、C が a のまわりを何回 (反時計回りに) 回るかを表している。

シンプルな曲線では直観と一致することが確かめられる。(具体例を並べた方が良いかな？)

命題 D.2 (閉曲線の回転数の基本的な性質) (1) $n(C,a)\in\mathbb{Z}$.

(2) $C\colon z=a+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ のとき $n(C,a)=1$.

(3) $n(-C,a)=-n(C,a)$.

(4) $C^*\subset D$, $a\notin D$ となる星形領域 D が存在するならば、$n(C,a)=0$.

(5) 十分遠くの a に対して $n(C,a)=0$. すなわち任意の閉曲線 C に対して、$(\exists R\in\mathbb{R})$ $(\forall a\in\mathbb{C}\colon |a|>R)$ $n(C,a)=0$.

(6) $b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c\in\mathbb{C}$ とするとき、$\varphi(z):=bz+c$ とおくと、$n(\varphi(C),\varphi(a))=n(C,a)$.

(7) $n(C,a)$ は $\mathbb{C}\setminus C^*$ の各連結成分上で定数である。

証明

(1) より一般の連続閉曲線の場合に示してある。

(2) 良く知られた計算である。$dz=ire^{i\theta}d\theta$ であるから、

$$n(C,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{(a+re^{i\theta})-a}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=1.$$

(3) 逆向きの曲線に沿う線積分は -1 倍になる。

(4) $a\notin D$ であるから、$D\ni z\mapsto\dfrac{1}{z-a}\in\mathbb{C}$ は正則である。D は星形領域であり、C は D 内の区分的 C^1 級閉曲線であるから、星形領域に対する Cauchy の積分定理によって

$$n(C,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-a}=\frac{1}{2\pi i}\cdot 0=0.$$

(5) C^* は $\mathbb{C}$ の有界閉集合であるから、十分大きい正数 R を取ると、$C^* \subset D(0;R)$. $D := D(0;R)$ とおくと、任意の $a \in \mathbb{C} \setminus D$ に対して、$n(C,a) = 0$. 特に $|a| > R$ ならば $n(C,a) = 0$.

(6) $f\colon \mathbb{C} \setminus C^* \to \mathbb{R}$ を $f(a) := n(C,a)$ で定めると、連続である。整数値しか取らないことから、$\mathbb{C} \setminus C^*$ の連結成分で定数である。 ■

例 D.3 $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $C\colon z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とするとき、

$$n(C,a) = \begin{cases} 1 & (a \in D(c;R)) \\ 0 & (a \notin \mathbb{C} \setminus \overline{D(c;R)}). \end{cases}$$

色々な証明があるが、事前に $\mathbb{C} \setminus C^*$ の各連結成分上で定数と分かっていると簡単である。 ■

定義 D.4 (0 にホモロジー同値) Ω を $\mathbb{C}$ の開集合、Ω を D 内の区分的 C^1 級閉曲線とする。

$$(\forall a \notin \Omega) \quad n(C,a) = 0$$

が成り立つとき、C は Ω 内で (に関して) 0 に**ホモロジー同値** (homologous to zero) あるいは C は Ω 内で**ホモローグ 0** という。

$n(C,a) \neq 0$ が成り立つことを「C は a のまわりを回る」ということにすると、

C が D 内で 0 にホモロジー同値とは、C が D の補集合の点のまわりを回らないこと、

あるいは

C が D 内で 0 にホモロジー同値とは、「C が回っている点は必ず D に属する

と言える。

ともすると、$n(C,a) \neq 0$ が成り立つことを「C は a を囲む」とも言いたくなるが、「囲む」という言葉は安易に定義しない方が良さそうである (後の定義 D.10 を見よ)。

定義 D.5 ((1 次元) チェイン, サイクル, サイクルの回転数)

(1) $\mathbb{C}$ 内の有限個の区分的 C^1 級曲線の形式和 $C = C_1 + \cdots + C_n$ を $\mathbb{C}$ 内の 1 次元**チェイン**と呼ぶ。

(2) $\mathbb{C}$ 内の有限個の区分的 C^1 級閉曲線の形式和 $C = C_1 + \cdots + C_n$ を $\mathbb{C}$ 内の 1 次元**サイクル**と呼ぶ。その像 $C^* = C_1^* \cup \cdots \cup C_n^*$ に属さない $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$n(C,a) := \sum_{j=1}^{n} n(C_j, a)$$

を a に関する C の**回転数** (指数) と呼ぶ。

本当はここをもっとていねいにやらないといけないのだが (今のままだと、2 つのチェインが等しいかどうかもまともに定義できていない)、Ahlfors [14] でも言い訳を書いてサボってあるし、後日きちんと書いてある本を読んでからにする。

Ahlfors はホモトピーを一切使わないので、線積分を考えるとき、曲線は区分的に C^1 級と仮定しているようだ。

$C=C_1+(-C_1)$ の像は C_1^* なのか、それとも $C\sim 0$ なのだから、1 点とか、空集合とか考えるのか？？

ここらへんで図による例を沢山見せるのかな。

D.2 ホモロジー形の Cauchy の積分定理

次の定理は、Ahlfors [14] には、Artin や Beardon による証明が載っている。最近の洋書では、以下に引用する Dixon [32] (1971) の証明が “常識的” のような雰囲気が感じられた。和書でも、1979 年の高橋 [27] に採用されている。しかし、それより後に著された杉浦 [28] では、Beardon の証明が採用されている (なぜだろう？)。どれを採用するかは趣味の問題なのかもしれない。

次の補題はしばしば利用される[32]。

補題 D.6 Ω を $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則に対して、$g\colon\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ を

$$g(z,\zeta):=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & (z\neq\zeta)\\ f'(z) & (z=\zeta)\end{cases}$$

で定めるとき、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) $\forall z,\zeta\in\Omega$ に対して $g(z,\zeta)=g(\zeta,z)$.

(2) $\forall\zeta\in\Omega$ に対して、$\Omega\ni z\mapsto g(z,\zeta)\in\mathbb{C}$ は正則である。

(3) g は $\Omega\times\Omega$ で連続である。

(本当は、g は $\Omega\times\Omega$ で正則である。)

証明

(1) 定義式の形から明らかである。

(2) $\Omega\setminus\{\zeta\}$ で正則であり、ζ で連続であるから、ζ でも微分可能である。

(3) g が対角線集合の補集合で連続であることは明らかである。(z_0,z_0) での連続性を確かめ

[32] 実は私の学位論文でも使った (高橋先生の本は愛読書だったはずだが、載っていることに気が付かず、証明にちょっと苦労した思い出がある)。

る。十分小さい $r>0$ を取ると、$D(z_0;r)\subset\Omega$. $z,\zeta\in D(z_0;r)$ に対して

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{w-\zeta}dw,\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

であるから、$z\neq\zeta$ のとき

$$g(z,\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{(w-\zeta)(w-z)}dw.$$

$z=\zeta$ のとき

$$g(z,\zeta)=f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$$

これから $(z,\zeta)\to(z_0,z_0)$ のとき、

$$g(z,\zeta)\to\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw=f'(z_0)$$

であることが分かる。■

うーん、もっとうまいまとめ方があるような。対角線集合の補集合で正則であることは明らか (あ、2 変数関数だから、正則というのを控えているのかな)。$\forall z_0\in\Omega$ に対して $r:=\inf_{z\in\partial\Omega}|z-z_0|$ とおくと、

$$g(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{(w-\zeta)(w-z)}dw\quad(z,\zeta\in D(z_0;r)).$$

これから g が $\Omega\times\Omega$ で正則である。いずれにしても、高橋 [27] の証明は完璧である。

定理 D.7 (ホモロジー形の Cauchy の積分定理, Cauchy の積分公式) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、C は Ω 内の 1 次元サイクルで Ω 内で 0 にホモロジー同値 (i.e., $a\notin\Omega\Rightarrow n(C;a)=0$)、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1)

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

(2) 任意の $a\in\Omega\setminus C^*$ に対して、

$$n(C,a)f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

証明 $g\colon\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ を

$$g(z,\zeta):=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & (z\neq\zeta)\\ f'(z) & (z=\zeta)\end{cases}$$

で定める。任意の $\zeta\in\Omega$ に対して、$\Omega\ni z\mapsto g(z,\zeta)\in\mathbb{C}$ は正則関数であり、g は $\Omega\times\Omega$ で連続である。

$$E:=\{a\in\mathbb{C}\setminus C^*\mid n(C,a)=0\}$$

とおくと E は開集合であり (連結成分の合併だから)、

$$(\exists R \in \mathbb{R}) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset E.$$

定理の仮定より $\Omega^c \subset E$ であるから、$\mathbb{C} = \Omega \cup E$.

$z \in \Omega \cap E$ とすると、$z \notin C^*$, $n(C, z) = 0$ であるから、

$$\int_C g(z,\zeta)\, d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - 2\pi i \cdot n(C,z) f(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ゆえに

$$h(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_C g(z,\zeta)\, d\zeta & (z \in \Omega) \\ \displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & (z \in E) \end{cases}$$

とおくと (場合分けで定義してあるが矛盾なく定義できて)、h は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。そして

$$\lim_{|z| \to \infty} h(z) = 0$$

が成り立つ。実際、

$$|h(z)| \le \max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)| \max_{\zeta \in C^*} \frac{1}{|\zeta - z|} \int_C |d\zeta| \to 0 \quad (|z| \to \infty).$$

Liouville の定理より h は定数で、実は 0 に等しい。

$z \in \Omega \setminus C^*$ とすると、

$$0 = h(z) = \int_C g(z,\zeta)\, d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i n(C,z)$$

より

$$n(C,z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

これは (2) が成り立つことを意味する (z を a, ζ を z と書き直せば良い)。

$a \in \Omega \setminus C^*$ とする。f の代わりに $z \mapsto (z-a) f(z)$ について上に示したことを適用すると

$$n(C,z) \left(f(z)(z-a) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(\zeta - a)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in \Omega \setminus C^*).$$

$z = a$ を代入して $\displaystyle\int_C f(\zeta) d\zeta = 0$ を得る。■

D.3 古典的な定理のホモロジー版代替物

この項の内容は、本質的に Ahlfors [14] からの抜き書きである。

古めかしいテキストでは、「囲む」という言葉を安直に使って "定理" を記述している。ここでは回転数の言葉を用いて「囲む」という言葉を厳密に定義して、古典的な定理のリフォームを示す。

杉浦 [28] では、「単一連結」という概念を臨時に導入して議論している。これは実は単連結と同値であることが判明する。

(「任意の閉曲線について、0 にホモトピー同値 $\Rightarrow$ 0 にホモロジー同値」であるから、単連結ならば単一連結である。ところが閉曲線 C が 0 にホモロジー同値であっても、0 にホモトピー同値であるとは限らない。だから、単一連結ならば単連結が成り立つというのは、それほど自明ではないわけである。杉浦 [28] では、単一連結領域について Riemann の写像定理を証明することで、それが単連結であることを証明していた。大立ち回りの印象がある。)

定義 D.8 (杉浦 [28] の真似) D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする。D が**単一連結**であるとは、D 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C が D 内で 0 にホモロジー同値であること、すなわち

$$a \notin D \quad \Rightarrow \quad n(C, a) = 0$$

が成り立つことをいう。

系 D.9 D を $\mathbb{C}$ 内の単一連結な領域、$f\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、C を D 内の区分的 C^1 級閉曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

証明 D が単一連結であるから、D 内の区分的 C^1 級閉曲線である C は、D 内で 0 にホモロジー同値である。ゆえに定理 D.7 により

$$\int_C f(z)\, dz = 0. \blacksquare$$

定義 D.10 (サイクルが領域を囲む, Ahlfors[14] §5.1 定義 4) D を $\mathbb{C}$ の領域、C を $\mathbb{C}$ の 1 次元サイクルとする。C が D を**囲む**とは、

$$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus C^*) \quad n(C, a) = \begin{cases} 1 & (a \in D) \\ 0 & (a \in D^c \setminus C^*) \end{cases}$$

が成り立つことをいう。

つまり、C が D を囲むとは、D の点の周りは 1 回だけまわり、D に含まれない点の周りはまわらないことを言う。

定理 D.11 $\mathbb{C}$ の 1 次元サイクル C が領域 D を囲み、f が $D \cup C^*$ の近傍で正則ならば

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

であり、任意の $z \in D$ に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

D 内にある孤立特異点を除いて f が $D \cup C^*$ で正則ならば、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum_j \mathrm{Res}(f; a_j).$$

証明 f が正則な、$D \cup C^*$ の開近傍を Ω とする ($D \cup C^* \subset \Omega$ であることに注意)。$a \notin \Omega$ ($a \in \Omega^c$) ならば $a \in (D \cup C^*)^c = D^c \cap (C^*)^c = D^c \setminus C^*$ であるから $n(C, a) = 0$. ゆえに C は Ω で 0 にホモロジー同値である。ゆえに定理 D.7 によって、

$$\int_C f(z)\,dz = 0, \quad (\forall a \in \Omega \setminus C^*) \quad n(C,a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

後者より、$z \in D$ ならば $n(C, z) = 1$ であるから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \blacksquare$$

注意 D.12 領域 D を囲むサイクル C の像 C^* は、D の位相空間論的な境界

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0) D(z;\varepsilon) \cap D \neq \emptyset \ \wedge \ D(z;\varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus D) \neq \emptyset\}$$

を含むが、逆は正しくない ($\partial D \subsetneqq C^*$ がありうる)。 $\blacksquare$

例 D.13 8 の字曲線は領域を囲まない。 $\blacksquare$

はてな？ Green の定理のように、領域 D の境界が有限個の区分的 C^1 級閉曲線で、各曲線の進行方向の左手に D が見えるようになっているとき、∂D は D を囲むことが証明できるのだろうか？

独白 辻正次先生が言ったという「函数論は幾何である」というのは、こういう意味なのかなあ？

E 単連結領域の特徴付け

高橋 [27] の §3.5 にある。

定理 E.1 D は $\mathbb{C}$ 内の領域とする。

(i) D 内の任意の閉曲線が 1 点に連続的に変形できる。
(一般の単連結性の定義に近い。)

(ii) D 内の任意の閉曲線 γ は、D 内で 0 にホモロジー同値。言い換えると $\forall c \notin D$ に対して $n(\gamma;c)=0$ (γ は c の周りを回らない).
(杉浦 [28] では、この条件が成り立つとき「単一連結」と呼んだ。)

(iii) D 内の任意のサイクル (回路) γ は、D 内で 0 にホモロジー同値。

(iv) D 内の任意のサイクル γ と、D で定義された任意の正則関数 f に対して、$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(v) (正則関数の原始関数の存在) D で定義された任意の正則関数 f に対して、f の正則関数 F が存在する (D で定義された正則関数 F で $F'=f$ が成り立つものが存在する)。

(vi) (正則関数の対数の正則な分枝の存在) f が D で定義された正則関数で、D で決して 0 にならなければ、D で定義された正則関数 g で、$f(z)=\exp g(z)$ を満たすものが存在する。

(vii) (正則関数の $\sqrt{\ }$ の正則な分枝の存在) f が D で定義された正則関数で、D で決して 0 にならなければ、D で定義された正則関数 g で、$f(z)=g(z)^2$ を満たすものが存在する。

(viii) D は単位円盤に位相同型である。(等角同型というわけではないんだな。)

最後のところで Riemann の写像定理 (の証明) という大道具を使う。単位円板に位相同型であることが分かれば、(i) が成り立つことは自明に近い。

余談 E.2 (Ahlfors [14] での単連結性の定義) Ahlfors [14] では、「($\mathbb{C}$ の) 領域は、拡張された平面で考えて補集合が連結なとき、単連結であるという」という定義を採用し、その定義を述べた直後に、(iii) との同値性を証明している (§4.2)。

円の外部 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|>R\}$ の $\widehat{\mathbb{C}}$ での補集合は、$\{z\in\mathbb{C} \mid z-c|\le R\}\cup\{\infty\}$ で、これは連結でないので、円の外部は単連結ではない。

Ahlfors はこの定義が簡単で便利だと考えているようだけど、率直に言って分かりにくい、間違えやすいと思っている。慣れると道具が増えて便利ではあるが。

帯領域 $\{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z|<1\}$ の $\widehat{\mathbb{C}}$ での補集合は、$\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z\ge 1 \vee \mathrm{Im}\, z\le -1\}\cup\{\infty\}$ で、これは連結であるので、帯領域は単連結である (離れているようだけど、∞ があるせいで「つながっている」)。■

証明

(i) ⇒ (ii)

(ii) ⇒ (iii)

(iii) ⇒ (iv)

(iv) ⇒ (v) これは基本的で「複素関数」でも講義した (講義ノート [4] に書いてある)。

(v) ⇒ (vi) $\dfrac{f'}{f}$ は D で正則であるから、Ω で正則な G で、$G' = \dfrac{f'}{f}$ を満たすものが存在する。

$$\begin{aligned}(f(z)\exp(-G(z)))' &= f'(z)\cdot\exp(-G(z)) + f(z)\cdot\exp(-G(z))(-G'(z)) \\ &= \left(f'(z) - f(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\exp(-G(z)) = 0\end{aligned}$$

であるから、ある定数 C が存在して、任意の $z \in D$ に対して

$$f(z)\exp(-G(z)) = C.$$

ゆえに

$$f(z) = C\exp G(z).$$

仮定より $C \neq 0$. $d := \operatorname{Log} C$ とおくと、$C = \exp d$. ゆえに

$$f(z) = C\exp G(z) = \exp d \exp G(z) = \exp(d + G(z)).$$

$g(z) := d + G(z)$ とおけば良い。

(vi) ⇒ (vii) $\exp h(z) = f(z)$ $(z \in D)$ を満たす正則関数 h が存在するので、$g(z) := \exp\dfrac{h(z)}{2}$ とおくと、

$$g(z)^2 = \left(\exp\frac{h(z)}{2}\right)^2 = \exp h(z) = f(z).$$

(vi)⇒ (viii) $D \neq \mathbb{C}$ の場合、Riemann の写像定理の証明[33]により、双正則写像 $\varphi\colon D \to D_1$ が存在するので、D は D_1 と位相同型である。

$D = \mathbb{C}$ の場合。$\varphi(z) := \dfrac{z}{1+|z|}$ $(z \in \mathbb{C})$ は D から D_1 の同相写像である。実際、$w = \varphi(z)$ であれば、$|w| = \dfrac{|z|}{1+|z|} < 1$. 一方、$w \in \mathbb{C}$ が $|w| < 1$ ならば、$z = \varphi(z)$ は $\left(|z| = \dfrac{|w|}{1-|w|}\right.$ を経て)

$$z = w\left(1 + \frac{|w|}{1-|w|}\right)$$

と解ける。

ゆえに D は D_1 と位相同型である。

[33] Riemann の写像定理のよくある証明では、単連結領域では、(vii) が成り立つことを用いて、それから双正則写像の存在を証明する。

(viii)⇒ (i) D_1 は凸なので単連結である。D は D_1 と位相同型であるから、D も単連結である。 ■

現在 (i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (iv) の証明を書いていないが、「応用複素関数」の講義 (桂田 [4]) で、(i) ⇒ (v) を証明してある ((i) から (iv) を弱くしたものも証明してある) ので、(i), (v), (vi), (vii), (viii) の同値性は証明出来ている。

F misc

F.1 Wirtinger の微分係数 $\partial/\partial z$, $\partial/\partial\bar z$

独立変数 z の関数 $f(z)$ は、(x,y) を変数とする関数とみなせる。

逆に (x,y) の関数 $u(x,y)$ は、

$$x=\frac{z+\bar z}{2},\quad y=\frac{z-\bar z}{2i}$$

であるから、z, $\bar z$ の関数とみなすことが出来る。例えば

$$x+3y=\frac{z+\bar z}{2}+3\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right)\bar z.$$

⋯ という説明は、z と $\bar z$ は独立でないので、本当はおかしい。

z と $\bar z$ は独立でないので、いわゆる偏微分ではないのであるが、

$$\text{(F.1)}\qquad \frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と定義する。

この式は次のような形式的計算から導かれる:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}&=\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial}{\partial \bar z}&=\frac{\partial x}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Wirtinger(ウィルティンガー)**の微分係数**と呼ぶらしい[34]。

繰り返しになるが、z と $\bar z$ は独立ではないが

$$\text{(F.2)}\qquad \frac{\partial z}{\partial \bar z}=0,\quad \frac{\partial \bar z}{\partial z}=0$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \bar z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)=\frac{1}{2}\left(1+i^2\cdot 1\right)=0,\\ \frac{\partial \bar z}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x-iy)=\frac{1}{2}\left(1+(-i)^2\cdot 1\right)=0.\end{aligned}$$

[34] Wirtinger (1865–1945)

以下は、笠原 [33] を参考にした。

f が C^1 級であれば

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(よく知られているように) $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ が、正則性のための必要十分条件である。

Laplacian も簡潔に表すことができる。

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}=\triangle u.$$

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}},\quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\right)}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}.$$

f が z_0 の近傍で C^1 級ならば、$z\to z_0$ のとき

$$f(z)=f(z_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_0}(z-z_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\right)_{z_0}(\overline{z}-\overline{z_0})+o\left(|z-z_0|\right).$$

f が z_0 の近傍で C^2 級ならば、$z\to z_0$ のとき

$$\begin{aligned}f(z)=f(z_0)&+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_0}(z-z_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\right)_{z_0}(\overline{z}-\overline{z_0})\\&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z_0}(z-z_0)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\right)_{z_0}(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}^2}\right)_{z_0}(\overline{z}-\overline{z_0})^2\right]\\&+o\left(|z-z_0|^2\right).\end{aligned}$$

Green の定理の公式は次のように表せる:

$$\int_{\partial D}f(z)\,dz=2i\iint_D\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,dx\,dy.$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{1}{z-z_0}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,dx\,dy.$$

(以下はやや未整理だが、書き足しておく。)

Wirtinger の微分係数の定義は

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{F.3}$$

である。

次の定理は $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ と並べてみると覚えやすい。頭に入れておこう。

定理 F.1 (Wirtinger の微分係数の共役複素数) C^1 級の f について

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}},\quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\right)}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}.$$

(https://tex.stackexchange.com/questions/588010/annoying-black-color-appears-on-beamer-block-after-some-edits)

次の 2 つの定理が基本的である。

定理 F.2 (複素関数の Wirtinger 微分係数) C^1 級の複素関数 f とその実部・虚部 u, v に対して

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)\right], \tag{F.4a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\right]. \tag{F.4b}$$

ゆえに C^1 級の複素関数 f に対して、f が正則であるためには、$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ を満たすことが必要十分である。

証明

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + u_y)).\blacksquare$$

定理 F.3 (正則関数のウィルティンガー微分) 正則関数 f に対して

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{f'}.$$

証明 正則関数 $f = u + iv$ に対しては、(F.4a), (F.4b) と Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) = \frac{1}{2}(2u_x + 2iv_x) = u_x + iv_x = f',$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + u_y)) = \frac{1}{2}(0 + i\cdot 0) = 0.$$

残りの 2 つには、定理 F.1 を用いるという手もあるが、ここでは定理 F.2 を用いて

$$\frac{\partial}{\partial z}\overline{f} = \frac{\partial}{\partial z}(u + i(-v)) = \frac{1}{2}(u_x + (-v)_y + i((-v)_x - u_y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y - i(v_x + u_y)),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{f} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u + i(-v)) = \frac{1}{2}(u_x - (-v)_y + i((-v)_x + u_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(-v_x + u_y)).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して

$$\frac{\partial}{\partial z}\overline{f} = \frac{1}{2}(0 - i\cdot 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{f} = u_x - iv_x = \overline{f'}.\blacksquare$$

Laplacian を導く重要な公式:

定理 F.4

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\triangle$$

証明

$$\partial\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right)\frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right) = \frac{1}{4}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) = \frac{1}{4}\triangle.\blacksquare$$

系 F.5 (調和関数を ∂ すると正則) $\mathbb{R}^2$ の開集合 $\widetilde{\Omega}$ 上で定義された調和関数に $\frac{\partial}{\partial z}$ を作用させた関数は $\Omega = \left\{x + iy \,\middle|\, (x, y) \in \widetilde{\Omega}\right\}$ で正則である。

次の 2 つは混同しやすそうだが

定理 F.6 f が C^1 級のとき

$$4\left|\partial f\right|^2 = 4\left|\frac{1}{2}\left(\partial_1 f - i\partial_2 f\right)\right|^2 = (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2, \tag{F.5}$$

$$4\left(\partial f\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\left(\partial_1 f - i\partial_2 f\right)\right)^2 = (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2 - 2i(\partial_1 f)(\partial_2 f). \tag{F.6}$$

G　偏角の原理、Rouché の定理

定理 G.1 (偏角の原理 (argument principle)) D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、その境界 ∂D は有限個の互いに交わらない区分的に C^1 級の単純閉曲線であるとする。$\overline{D}$ のある開近傍で有理形の関数 f に対して、

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(N - P).$$

ただし f は C の中に零点を N 個、極を P 個持つとする (どちらも位数の分だけ重複して数える)。

有理形でなく正則とすると、$P = 0$ なので、右辺は $2\pi i N$.
$\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = d\arg f(z)$ と書けることから、偏角の原理と呼ばれている。

定理 G.2 (Rouché の定理) D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、その境界 ∂D は有限個の互いに交わらない区分的に C^1 級の単純閉曲線であるとする。$\overline{D}$ のある開近傍で正則な関数 f, g に対して、$|f(z)| > |g(z)|$ が成り立つならば、D 内の零点の個数は $N(f + g) = N(f)$ を満たす。

例 G.3 $|z| \leq 1$ の近傍で正則な関数 g が、$|z| = 1$ で $|g(z)| < 1$ を満たせば $|z| < 1$ の範囲に $z = g(z)$ の解がただ一つ存在する。 $\blacksquare$

H　Carathéodory の定理

論文としては、Osgood [34], [35], Carathéodory [36], McShane [37], Arsove [38] がある。
辻 [21]

参考文献案内

チェックすべき本　「複素関数」でも紹介した、1 変数複素関数論入門の定番のテキスト (例えば、神保 [10], 杉浦 [28], Ahlfors [14], 高橋 [27] など) は、もちろん参考になるが、留数定理の説明が終わったところから、十分なページを割いているテキストにも目を向けるべきであろう。

例えば、田村 [11], 笠原 [33], 藤本 [39], 野口 [19] などがあげられる[35]。

[11] は、微分積分の延長として、関数論の初等的範囲から重要な話題をピックアップして作った、とあり、確かに標準的な関数論入門の少し先を初等的に取り扱っている (格好良く出来たりもするところを初等的に押し通すのは好感が持てる)。「地味」と捉えられがちであるが (普通の関数論入門で重要視されるような計算問題の解き方を詳しく解説する、という本ではないので、一般受けしないのだろう)、思いの外参考になる。

[33], [39], [19] も、それぞれ特色のある良書である。自分の目的に合うかどうか知るため、めくってみることをお勧めする。

(脱線になるけれど、これらの本は、ネットで酷評されたりすることがある。関数論入門の参考書として使う場合は、難しいし、試験対策に役立たないかもしれないので、点が低くされたりするのかも。そういうのに惑わされないように。)

書籍ではないが、大島 [40] は、色々なことが簡潔に説明されていて便利かもしれない (非常に情報量が多い)。

Riemann 面　関数論で、少し突っ込んだ話をする場合、Riemann 面を避けて通ることは出来ない。

昔の関数論の本は、多価関数の Riemann 面の素朴な説明が載っていることが多かったが、最近はあまり見かけない。「複素関数」の教科書に指定した神保 [10] はしっかり書いてあって良い。

Riemann 面に関する本格的なテキストは、非常に多く出版されている。現代的な定義を確立したとされるワイル [41] が有名な古典である (3 つの版があるが、どれも重要という人もいる。邦訳は初版を訳したもの (?))。私は学生時代にこの分野をあまり勉強したことはないので (小平 [42] を「通読」したくらい — 消化不良だったと思う) 少々無責任かもしれないが、以下は参考まで。自分が必要に応じてにわか勉強した範囲では、和書では、楠 [43]、及川 [44] が頼りになった。洋書もいくつかめくってみたが (Forster [45] とか、Donaldson [46] とか有名な本は多い)、私には Miranda [47] が読みやすいと感じた。

Riemann 面について学ぶには、多くの数学的常識 (位相空間, 多様体, etc.) が必要となる[36]。そういう意味で初学者には敷居が少し高いかもしれない。

ポテンシャル問題　(準備中)

[35] これらの本は、関数論の入門講義のテキストとしては “難しめ” で、正直勧めにくいが、入門の先を学ぶ場合は推奨本になる。

[36] 例えば位相空間については、とっつきやすそうな新しいテキストも増えているが、松坂 [17], 河田・三村 [18] をあげておく。多様体については松本 [48] が定番本である。ただし通読には長い時間がかかる。何か講義を聴いてペースメーカーにしないと読破は難しいかも。

多変数関数論　多次元化に目を向けると、多変数関数論や複素多様体論というものがある。最近は日本語に限っても色々なテキストが出版されているが、筆者は不勉強なので省略する。

佐藤超函数　筆者が学生の頃は、佐藤超函数の話題が出ることも多かったし、それを学ぶことのできるテキストがいくつか書店で入手可能であった (森本 [49], 金子 [50], 山中 [51], 小松 [52], 今井 [53] など)。今ではこれらの本の入手もやや難しくなっている (特に金子先生の本の入手が難しくなっていることが個人的には残念である)。青木・片岡・山崎 [54] という本が出版されていて、個人的に興味を持っているが、まだ目を通していない。

“数値関数論”　Henrici [1], [2], [3] は、厚手の本 3 冊からなる数値的な応用複素関数論のテキストである。ややクラシックな応用数学の本と言うべきかもしれないが、私には、ある意味では逆に時代を先取りしているように思える。20 世紀の数学では、対象の存在が証明出来れば、それを求めるアルゴリズムを必須とせずに議論を進めるようになった。それは数学の大きな進歩ではあったが、行き過ぎの面があったのではないか。具体的に計算できる場合は、計算で求めてしまった方が良い場合があるのは当然である。それなのに計算の価値を不当に低く評価してきたようなところがある。最近は、アルゴリズムの追求が尊重されるようになって来ている。(解析学では、微分方程式の解を近似的にでも計算することに、従来から一定の価値が認められてきたが、最近では代数学 (Gröbner 基底に基づく様々な計算法など) や幾何学の分野でも変化が進んでいるように見受けられる。)

参考文献

[1] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume 1: Power Series Integration Conformal Mapping Location of Zero*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc (1977, 1988 (Paperback)).

[2] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume 2: Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics, Continued Fractions*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc (1977, 1991 (Paperback)).

[3] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume 3: Discrete Fourier Analysis, Cauchy Integrals, Construction of Conformal Maps, Univalent Functions*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc (1986, 1993 (Paperback)).

[4] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf` (2014〜).

[5] 森正武, 杉原正顯：複素関数論, 岩波書店 (2003).

[6] 一松信（ひとつまつしん）：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。

[7] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, 多変数の微積分のうちの重積分についての講義のノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf (2008).

[8] 鹿野健：リーマン予想, 日本評論社 (1991).

[9] Bak, J. and Newman, D. J.: *Complex Analysis, Second Edition*, Springer (1999).

[10] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[11] 田村二郎：解析関数, 裳華房 (初版 1962, 新版 1983).

[12] 吉田洋一：函数論 第 2 版, 岩波書店 (1965).

[13] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満(ゆうじょうぼうずいまん)、 水本久夫。

[14] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (初版は 1953 で、最新版である Third Edition は 1979/1/1？私は 1979 年の秋に購入した).

[15] 楠幸男, 須川敏幸：複素解析学特論, 現代数学社 (2019/11/21).

[16] 志賀浩二：複素数 30 講, 朝倉書店 (1989).

[17] 松坂和夫：集合・位相入門, 岩波書店 (1968).

[18] 河田敬義(かわだゆきよし), 三村雄征(ゆきお)：現代数学概説 II, 岩波書店 (1965), 古いテキストであるが、 位相空間論で大事なことが証明付きで程よく網羅されているので、 辞書として使うのに好適である。

[19] 野口潤次郎：複素解析概論, 裳華房 (1993/5/1).

[20] 一松信：函数論入門, 培風館 (1957).

[21] 辻正次：複素函数論, 槇書店 (1968).

[22] 桂田祐史：Joukovski 変換, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/joukovski.pdf (2012/12/19〜).

[23] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf (2008〜).

[24] 桂田祐史：ポテンシャル問題の数値計算, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/potential.pdf (2017).

[25] 桂 田 祐 史：等 角 写 像, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/conformal-mappings.pdf (2005).

[26] 斎藤正彦訳・討論フレシェ著, 森毅解説・討論, 杉浦光夫討論：抽象空間論, 共立出版 (1987/11/5).

[27] 高橋礼司:複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初､筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、 https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる．

[28] 杉浦光夫:解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), 丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844 でアクセスできる．

[29] Abikoff, W.: The Uniformization Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 8, pp. 574–592 (1981).

[30] 高木貞治：函数論縁起, 共立出版 (1946), 高木 [55] に収録されている。

[31] Conway, J. B.: *Functions on One Complex Variables I, II*, Springer (201x).

[32] Dixon, J. D.: A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 29, No. 3, pp. 625–626 (1971).

[33] 笠原乾吉：複素解析, 1 変数解析関数, 実教出版 (1978), 2016 年にちくま学芸文庫に入った (ファンとして非常に嬉しい)。 新井仁之先生の書評が http://researchmap.jp/joqp1cgc9-1782088/ にある。 ついに Kindle 化されたので買えなくなることはなくなったが、 数式の見栄えが poor である。文庫に入ったのは最近のことなのに、なぜこうなる？？

[34] Osgood, W. F.: On the Green's function for the most general simply connected plane region, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 1, No. 3, pp. 310–314 (1900).

[35] Osgood, W. F.: Note on the Functions Defined by Infinite Series Whose Terms are Analytic Functions of a Complex Variable; with Corresponding Theorems for Definite Integrals, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 3, No. 1/4, pp. 25–34 (1901–1902).

[36] Carathéodory, : Remark on a Theorem of Osgood Concerning Convergent Series of Analytic Functions, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 34, No. 6, pp. 721–725 (1928).

[37] McShane, E. J.: On the Osgood-Caratheodory Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 44, No. 5, pp. 288–291 (1937).

[38] Arsove, M. G.: The Osgood-Taylor-Caratheodory Theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 19, No. 1, pp. 38–44 (1968).

[39] 藤本孝坦（ひろたか）：複素解析, 岩波書店 (2006/5/10).

[40] 大島利雄：関数論 (複素解析 II の講義のためのノート), http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/CAMPUS/ca.pdf, さすがに server not found になりましたね。 (2003〜2008).

[41] H. ワイル：リーマン面, 岩波書店 (1974/5/27, 2003/5/23), Die Idee der Riemannschen Fläche (1913) の田村二郎による翻訳.

[42] 小平邦彦：複素解析, 岩波書店 (1978).

[43] 楠幸男：函数論 — リーマン面と等角写像 —, 朝倉書店 (1973/3/30, 2011/11/20 復刊).

[44] 及川広太郎：リーマン面, 共立出版 (1987/10/1, 復刊 2024/11/11), 出版社の WWW サイトに正誤表がある。https://hondana-storage.s3.amazonaws.com/1040/files/11571_seigo.pdf.

[45] Forster, O.: *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer (1981/11/2).

[46] Donaldson, S.: *Riemann Surfaces*, Oxford University Press (2011/5/19).

[47] Miranda, R.: *Algebraic Curves and Reimann Surfaces*, American Mathematical Society (1995/4/1).

[48] 松本幸夫：多様体の基礎, 東京大学出版会 (1988), Maruzen eBook に入っている。https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/Viewer/Id/3000046849 でアクセス可能。

[49] 森本光夫：佐藤超函数入門, 共立出版 (1976, 2000/9/1 復刊), 現在品切れ.

[50] 金子晃：新版 超函数入門, 東京大学出版会 (1996), もともと二分冊で出版されたものの復刊。その後オンデマンド版も出たが、 それも新刊では入手不可能になっている？

[51] 山中健：線形位相空間と一般関数, 共立出版 (1966), 在庫切れと思ったていたら、ペーパーバック予約受付中になっている？？？

[52] 小松彦三郎：超関数論入門, 岩波書店 (2019/9/10), もともとは岩波講座基礎数学の解析学の一冊であった。

[53] 今井功：応用超関数論 I, II, サイエンス社 (1981), 版元在庫切れで中古市場でプレミア価格がついている.

[54] 青木貴史, 片岡清臣, 山崎晋：超函数・FBI 変換・無限階擬微分作用素, 共立出版 (2004/6/11).

[55] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。 また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。

索 引