

応用複素関数レポート課題1

桂田 祐史

2026年6月16日

レポート課題1

次の (1) と (2) (A, B のどちらか一方を選ぶ) を行うこと。

- (1) 6月16日の授業「流れの合成」(講義ノート「複素関数と流体力学」[1]の§4.3「基本的な流れの重ね合わせ」、また講義のスライドPDFで言うと§5.15「流れの合成」)から3つの流れを選んで、等ポテンシャル線、流線、ベクトル場を適当に(流れの様子が良く分かるように)可視化し、流れがどのようなものか説明せよ(特に流速に注意すること)。流線における流れ関数の値が分かるように説明すること。

注意: 3つの基本的な流れそのもの(一様流, 湧き出し& 吸い込み, 渦糸)は該当しない。そういうものを重ね合わせた流れを説明せよ、ということである。

[どのように取り組むか] 一様流、湧き出しのサンプル・プログラム (Mathematica) は

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/>

で公開してある。それらは講義内容と対応するように書かれていて、それを解読すれば要領は分かるはず。細かいところは各々の流れに合うように直す必要がある。

- (2) 次のどちらかを選ぶ。

A $f(z) = z^\alpha$ を複素速度ポテンシャルとする流れを説明せよ。図を用いて流れの様子を示すこと。

とりあえず α は正の定数とする。なるべく一般的に考えてもらいたい、分かりにくければ、まず $\alpha = n$ や $\alpha = \frac{1}{n}$ (n は2以上の自然数) でもよい。余裕があれば $\alpha < 0$ の場合も考えよ。

B 講義で Bernoulli の等式を紹介したが、テキストで説明されることの多い場合を理解して説明してみよう。

Euler 方程式 $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p$ で支配される流体の運動を考える。密度 ρ は正の定数とする。

(i) 3次元ベクトル場 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ に対して、

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right) - \mathbf{v} \times (\text{rot } \mathbf{v})$$

が成り立つことを示せ。(rot $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ である。)

(ii) C を流線とするとき

$$\int_C (\mathbf{v} \times (\text{rot } \mathbf{v})) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成り立つことを示せ (理由を簡単に書くだけで良い)。($\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ は単位接線ベクトル \mathbf{t} を用いて $\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds$ とも書かれる。)

(iii) 任意の流線に沿って、

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{\rho} p$$

は定数であることを示せ。

- 〆切は7月3日(金) (23:00) ← 7月17日 23:00 に変更します。提出は Oh-o! Meiji を用いる。
Oh-o! Meiji の設定を間違えていて、提出する場所がなかったので、提出する場所を作りました。〆切までの時間を確保するために、〆切を2週間先の7月17日(金)23:00に変更します。
- 原則として、レポート本文はA4サイズの(なるべく1つの)PDF形式とする。A4の紙に手書きしたものをスキャンしても良い(図に書き込みをする場合はそれがやりやすいかもしれない)。

参考 「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」¹

- 今回、プログラミング言語は Mathematica を想定しているが、自分の MacBook で実行できるものならば何を使っても構わない。
- プログラムとその実行結果、再現するための情報(入力パラメーターは何かとか)もレポートに含めること。
- プログラムはレポート本文に含めても良いし、別ファイルとして提出しても良い。
- (今回は問題にならないと思われるが) 図を PDF で出力するとサイズが大きくなることがある。そのことで Oh-o! Meiji のファイル・サイズの制限(1ファイル30MB未満)に引っかかった場合は工夫すること。
(a) 複数の PDF に分割する。(b) 複雑な図は PDF よりも、PNG のようなイメージ形式に変換するとサイズが抑えられることが多い。
- ベクトル場表示は、意外と手間がかかることもある。

授業で `VectorPlot[]` という関数を紹介したが、これは Mathematica の比較的新しい関数であり、仕様が固まり切っていない。例えば `VectorScaling` というオプションも、version 12.1 で導入されたもので、それ以前の Mathematica にはない(代わりに `VectorScale` というオプションがあった)。使い方はマニュアルを見ること。

図を描くのには、問題ごとの工夫が必要で微調整はするもの、と考えること(気軽に相談して下さい)。

¹https://m-katsurada.sakura.ne.jp/how_to_pdf/

- 湧き出しのサンプル・プログラム `source.nb`² のように、`Boolean[]` を使って、特定の点の近傍のベクトル場を描くことをやめたり出来る。場所ごとに違う設定で図を描いて、それぞれ見せるとか、合成して一つの図を作るとか。
- `VectorScaling` オプションを使わずに、自分で 0 でないベクトルの長さを 1 に正規化してしまうなどの工夫もできる (サンプル・プログラムでは、単に $f'(x+I y)$ の実部と虚部を取り出して `vv[]` を作ったが、そこで処理を加える)。
- この際、新しい Mathematica にバージョンアップする、というのも検討するとよい。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf> (2015～).

²<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/source.nb>